CORRECTION EVALUATION SUR ORTHOGONALITE

Dans toute l'évaluation, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice 1 : / 2 pts

On donne le point $A(2\,;1\,;-3)$ et le vecteur $\vec{n}(2;3\,;-2)$, normal à $\mathcal{P}$.
Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}(A;\vec{n})$

Correction :

On remplace les coordonnées de $\vec{n}$ dans l'équation $ax+by+cz+d=0$. On obtient donc une équation qui s'écrit : $2x+3y-2z+d=0.$ On remplace par les coordonnées du point A afin de déterminer la valeur de d. $4+3-2\times(-3)+d=0$ soit $d=-13$
Le plan a pour équation : $\mathcal{P}(A;\vec{n}): 2x+3y-2z-13=0$

Exercice 2 : / 4 pts

On donne les points $A(1\,;2\,;4)$, $B(5\,;3\,;1)$, $C(-1\,;1\,;2)$ et $D(-2\,;2\,;3)$

1) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ puis les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$
2) Vérifier que $\vec{n}(-5\,;14\,;-2)$ est normal au plan (ABC)
3) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
4) Déterminer une équation cartésienne du plan parallèle à (ABC) qui passe par D

Correction :

1) On utilise la formule du cours $\overrightarrow{AB}(4\,;1\,;-3)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,;-1\,;-2)$
2) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace. On évalue alors le produit scalaire avec le $\vec{n}$ proposé
   $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = -5\times4+14\times1-2\times(-3)=0$
   $\vec{n}.\overrightarrow{AC} = -5\times(-2)+14\times(-1)-2\times(-2)=0$
   Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de l'espace, il est donc normal au plan formé par les trois points A, B et C.
3) On a pour commencer $(ABC): -5x+14y-2z+d=0$. On peut injecter les coordonnées d'un des trois points de l'espace afin de déterminer d
   $-5\times1+14\times2-2\times(4)+d=0$ soit alors $d=-15$
   On a donc $(ABC): -5x+14y-2z-15=0$
4) Puisque les deux plans sont parallèles, ils ont le même vecteur directeur.
   On a donc $\mathcal{P}(D;\vec{n}): -5x+14y-2z+d=0$. En injectant les coordonnées du point D, on obtient alors. $-5\times(-2)+14\times2-2\times3+d=0$ soit $d=-32$
   On a donc $\mathcal{P}(D;\vec{n}): -5x+14y-2z-32=0$

Exercice 3 : / 4 pts

On donne les points $A(2\,;4\,;1)$ et $B(0\,;-2\,;3)$.

1. Déterminer une équation de la sphère $(\mathcal{S})$ de diamètre $[AB]$.
2. Soient $(\mathcal{P}_A)$ le plan tangent à la sphère $(\mathcal{S})$ en A. Déterminer une équation de ce plan.

Correction :

1. Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de la sphère. $\overrightarrow{AM}(x-2; y-4\,; z-1)$ et $\overrightarrow{BM}(x; y+2\,; z-3)$
   On écrit alors le produit scalaire : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = x(x-2)+(y-4)(y+2)+(z-1)(z-3)$
   En développant : $(\mathcal{S}): x^2-2x+y^2-2y+z^2-4z-5=0$
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(-2;-6\,;2)$ est normal au plan tangent. $(\mathcal{P}_A): x+3y-z+d=0$ soit en remplaçant par les coordonnées de A : $(\mathcal{P}_A): x+3y-z-13=0$

Exercice 4 : / 3 pts

On donne une droite définie par : $(\mathcal{D}): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et un plan défini à l'aide d'une équation cartésienne $(\mathcal{P}): 2x + y - 3z + 5 = 0$

Déterminer soigneusement la position relative de $(\mathcal{D})$ et de$(\mathcal{P})$

Correction :

On exhibe $\vec{u}(1; 2\,; 1)$ et $\vec{n}(2; 1\,; -3)$. On évalue $\vec{u}.\vec{n} = 2 + 2 - 3 = 1$. La droite et le plan ont donc un unique point en commun. On doit donc résoudre un système.

$$(S): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 + t \\ 2x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On injecte les trois premières équations dans la dernière.
On résout alors : $2(1 + t) + 1(-3 + 2t) - 3(2 + t) + 5 = 0$ soit $t = 2$; En remplaçant la valeur de t, on obtient les coordonnées du point d'intersection $I(3\,; +1\,; 4)$

Exercice 5 : / 2 pts

On donne les points $A(2\,; 4\,; 1)$ et $B(1\,; 3\,; 3)$.
Déterminer l'équation cartésienne du plan qui passe par A, perpendiculaire à la droite (AB)

Correction :

Puisque (AB) est perpendiculaire au plan, $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan cherché. On évalue donc les coordonnées $\overrightarrow{AB}(-1; -1\,; 2)$.
On a donc $\mathcal{P}\left(A; \overrightarrow{AB}\right): -x - y + 2z + d = 0$. Attention, on remplace par les coordonnées du point A pour déterminer la valeur de d.
$-1 \times 2 - 1 \times 4 + 2 \times (1) + d = 0$ soit alors $d = 4$
On obtient $\mathcal{P}\left(A; \overrightarrow{AB}\right): -x - y + 2z + 4 = 0$

Exercice 6 : / 2 pts

On donne $A(1\,; 3\,; 1)$ et $B(-1\,; -5\,; 3)$ et $\mathcal{P}(B, \vec{n}) : 1x + 2y + 2z + 5 = 0$
Déterminer la distance du point A au plan $\mathcal{P}$.

Correction :

On exhibe $\vec{n}(1; 2\,; 2)$ soit alors $\|\vec{n}\| = 3$. On vérifie bien que B soit sur $\mathcal{P}$.
On évalue $\overrightarrow{AB}(-2\,; -8\,; 2)$. On calcule alors $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -2 - 16 + 4 = -14$
On a donc $AH = \frac{|-14|}{3}$ soit en rendant rationnel $AH = \frac{14}{3}$
La valeur absolue est importante car une distance est toujours positive.

Exercice 7 : / 3 pts

On donne la sphère d'équation cartésienne $(\mathcal{S}): (x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 44$ et la droite définie par $(\mathcal{D}): \begin{cases} x = 1 + 1t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - 1t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la droite et de la sphère

Correction :

Pour rappel, intersection ça rime avec …. Accolade.
On doit donc résoudre un système qui met en jeu l'équation de la sphère et l'équation paramétrique de la droite

$$(Système) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - t \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 44 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

On injecte alors les équations paramétriques dans celle de la sphère.

$$(Système) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - t \\ (1+t+2)^2 + (-3+t-2)^2 + (2-t-1)^2 = 44 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$(Système) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - t \\ (t+3)^2 + (t-5)^2 + (-t+1)^2 = 44 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$(Système) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - t \\ 3t^2 - 6t + 35 = 44 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

On résout alors l'équation $3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$

Cette équation possède deux racines évidentes $t = -1$ et $t = 3$

La sphère et la droite ont donc deux points d'intersection $A(0\,;-4\,;3)$ et $B(4\,;0\,;-1)$