# Correction Évaluation sur les matrices

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

***Exercice 1 :*** / 2 pts

On donne les matrices suivantes. Donner leurs dimensions respectives

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_{3,2}$
- $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B \in \mathcal{M}_{3,3}$
- $C = (1 \quad 1 \quad 3)$, $C \in \mathcal{M}_{1,3}$
- $D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $D \in \mathcal{M}_{2,1}$

***Exercice 2 :*** / 2 pts

On donne les matrices suivantes.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

Effectuer les opérations suivantes $A + B$, $3B$, $A - B$,

***Solution :***

$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$, puis $3B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -9 & -12 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$ et enfin $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

***Exercice 3 :*** / 4 pts

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer à la main $A^2$,puis $A^3$.
2) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, $A^n = A^2$.

***Solution :***

On calcule donc les premières puissances de $A$.

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$

$P_n : \forall n \geq 2, A^n = A^2$

***Initialisation :***

Pour $n = 2$, on a $A^2 = A^2$. $P_2$est vraie, La propriété est initialisée.

***Hérédité :***

Je suppose qu'il existe un entier $n$ tel que $P_n$ soit vraie et je veux montrer alors :
$P_{n+1}$: $A^{n+1} = A^2$ ( ?)

Je vais ***injecter*** l'hypothèse de récurrence : $A^{n+1} = A^n \times A = A^2 \times A = A^3 = A^2$
Ainsi $P_{n+1}$est vraie, La propriété est héréditaire

***Conclusion :***

$\forall n \geq 2, A^n = A^2$

***Exercice 4 :*** / 1 pt

Parmi les matrices suivantes, laquelle est inversible ?

- $A = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

***Solution :***

On calcule leurs déterminants : $det(A) = 0$ et $det(B) = 2$
$A$ n'est pas inversible et $B$ l'est.

***<u>Exercice 5 :</u>*** / 2 pts

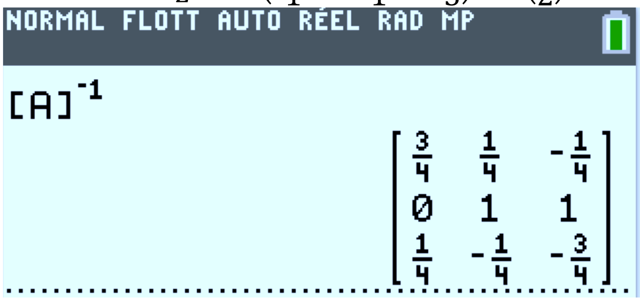
Résoudre le système suivant en utilisant le calcul matriciel.

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - 3z = 2 \end{cases}$$

***<u>Solution :</u>***

On transforme sous forme matriciel : $\begin{cases} 2x - y - 2z = 2 \\ -x + 2y + 3z = 0 \\ x - y - 3z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a alors : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ : On obtient :




soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ; On a : $S = \{(1; 2; -1)\}$

***<u>Exercice 6 :</u>*** / 2 pts

On se place dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. On donne $A(5; -2)$

1) Donner la matrice représentant une rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{-\pi}{3}$
2) Calculer les coordonnées de l'image de $A$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

***<u>Solution :</u>***

1) Pour une rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{-\pi}{3}$, $T = \begin{pmatrix} \cos\frac{-\pi}{3} & -\sin\frac{-\pi}{3} \\ \sin\frac{-\pi}{3} & \cos\frac{-\pi}{3} \end{pmatrix}$

   Soit donc $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5-2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-5\sqrt{3}-2}{2} \end{pmatrix}$. On a $A'\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{2}; \frac{-5\sqrt{3}-2}{2}\right)$

***<u>Exercice 7 :</u>*** / 2 pts

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A^2 + 2A - 3I$.
2) En déduire l'inverse de $A$

***<u>Solution :</u>***

On évalue $A^2 + 2A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a donc $A^2 + 2A - 3I \Leftrightarrow A \times \frac{1}{3}(A + 2I) = I$ et donc $A^{-1} = \frac{1}{3}(A + 2I)$

***Exercice 8 :*** / 5 pts

Un service hospitalier d'urgences accueille chaque semaine un nombre important de personnes à soigner.
Il est nécessaire de répertorier rapidement les différentes urgences pour pouvoir répondre le plus efficacement possible aux demandes de soin.
Le service classifie trois sortes de patients qui se présentent aux urgences :

- Les urgences graves donc prioritaires, notées $P_1$.
- Les urgences secondaires, non prioritaires, notées $P_2$.
- Les patients qui se présentent pour des soins qui ne relèvent pas des urgences, notés $P_3$

Chaque semaine, le service relève les statistiques suivantes :

- $x_1$ est le nombre de patients de type $P_1$
- $x_2$ est le nombre de patients de type $P_2$
- $x_3$ est le nombre de patients de type $P_3$

On note alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Cette matrice est appelée matrice des urgences.

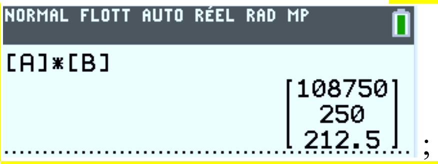
- Pour une urgence de type $P_1$, le cout moyen par patient est de 1500 euros, le temps moyen de prise en charge est de 3 heures et la masse moyenne de matériel médical utilisé est de 2,5 kg.
- Pour une urgence de type $P_2$, le cout moyen par patient est de 650 euros, le temps moyen de prise en charge est de 1,5 heures et la masse moyenne de matériel médical utilisé est de 1 kg.
- Pour une urgence de type $P_3$, le cout moyen par patient est de 90 euros, le temps moyen de prise en charge est de 15 minutes et la masse moyenne de matériel médical utilisé est de 300 grammes

1) Que signifie pour une semaine donnée la matrice $X_0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \\ 250 \end{pmatrix}$ ?
2) Écrire la matrice $A \in \mathcal{M}_{3,3}$, appelée matrice de fonctionnement représentant le coût, le temps et le matériel pour chaque type de patient.
3) Calculer à l'aide de la calculatrice $Y_0 = AX_0$ et interpréter ces résultats pour la semaine $X_0$.

Le service hospitalier ne peut pas dépasser certaines contraintes pour une semaine donnée. En particulier, il ne peut pas dépenser un budget supérieur à 224000 euros par semaine, faire travailler le personnel médical plus de 508 heures et rejeter plus de 420 kg de déchets médicaux. On donne alors $B = \begin{pmatrix} 224000 \\ 508 \\ 420 \end{pmatrix}$

4) A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre maximum d'urgences des trois types que le service peut accueillir une même semaine.

***Solution :***

1) $X_0 = \begin{pmatrix} 25 \\ 75 \\ 250 \end{pmatrix}$ signifie qu'il y a 25 patients de type $P_1$, 75 de type $P_2$ et 250 de type $P_3$
2) Par lecture de l'énoncé, on a : $A = \begin{pmatrix} 1500 & 650 & 90 \\ 3 & 1,5 & 0,25 \\ 2,5 & 1 & 0,3 \end{pmatrix}$
3) 

; L'hôpital va dépenser 108750 euros pour un total de 250 heures et avoir 212,5 kg de déchets.

4) Il faut inverser le système :$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

A l'aide de la calculatrice, on obtient :


Cela signifie qu'il y a 56 patients de type $P_1$, 160 de type $P_2$ et 400 de type $P_3$