Correction Évaluation le dénombrement

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

Exercice 1 : / 1,5 pt

Dans un jeu de 25 quilles, les quilles sont de couleurs et de formes différentes. Parmi les 11 quilles bleues, 8 ont une forme cylindrique. On compte 4 quilles rouges de forme cubique.
Compléter le tableau ci-dessous.

	Bleues	Rouges	TOTAL
Cylindriques	8	10	18
Cubiques	3	4	7
TOTAL	11	14	25

Exercice 2 : / 1,5 pt

On considère les deux ensembles $E = \{h; e; f\}$ et $F = \{d; i; e; r\}$
Déterminer les ensembles $E \cap F$, $E \cup F$ et enfin $F \times E$

Correction :

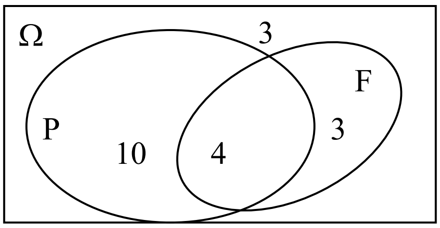
En utilisant les notations du cours, on a :
$E \cap F = \{e\}$
$E \cup F = \{d; i; e; r; h; f\}$
$F \times E = \{(d; h); (d; e); (d; f); (i; h); (i; e); (i; r); (e; h); (e; e); (e; f); (r; h); (r; e); (r; f)\}$

Exercice 3 : / 2 pts

Dans une station de sport d'hiver, On interroge au hasard 20 touristes. Parmi eux, 14 déclarent pratiquer le ski de piste, 7 déclarent pratiquer le ski de fond et enfin 4 déclarent pratiquer les deux sports.
Construire un diagramme de Venn afin de déterminer les touristes qui ne pratiquent aucune des deux activités.

Correction :

On construit un diagramme de Venn à deux ensembles non disjoints.
On note P l'ensemble des touristes qui pratiquent le ski de Piste et F ceux qui pratiquent le ski de fond.



On obtient alors $Card(\bar{P} \cap \bar{F}) = 3$

Exercice 4 : / 2 pts

Au bridge, chaque joueur possède une main de 13 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes.
1) Combien de mains peut-on distribuer au bridge ?
2) Combien de mains ne contiennent qu'un seul cœur ?

Correction :

1) Une main est la constitution d'un ensemble non ordonné de 13 cartes parmi 52. Il s'agit d'une combinaison. $\binom{52}{13} = 6{,}35 \times 10^{11}$
2) On doit donc au préalable choisir un cœur parmi tous les cœurs puis 12 cartes parmi toutes les cartes sans cœur. On a donc : $\binom{13}{1} \times \binom{39}{12} = 5{,}08 \times 10^{10}$

Exercice 5 : / 4 pts

Sept amis, quatre garçons et trois filles se rendent à un concert de musique classique. Ils s'assoient les uns à côté des autres dans la même rangée.

1) Quel est le nombre de dispositions possibles.
2) Combien y-a-t-il de dispositions avec les garçons d'un côté et les filles de l'autre ?
3) Combien y-a-t-il de dispositions avec les filles et les garçons intercalés ?

Correction :

On dessine au préalable une rangée de 7 sièges. Cela pourrait ressembler à ça.

1) On doit donc effectuer une liste ordonnée de 7 éléments dans un ensemble de 7 éléments sans répétition. Il s'agit d'une permutation. On a $Card(E) = 7!$ Soit 5040
2) Il faut faire attention car on a deux options. Les garçons à gauche et les filles à droites ou le contraire.
   Par exemple :

Fille 1	Fille 2	Fille 3	Garçons 1	Garçons 2	Garçons 3	Garçons 4

   Il s'agit donc d'établir deux listes ordonnées sans répétition d'éléments du même sexe.
   On a donc $Card(E') = 3! \times 4! + 4! \times 3!$. Ainsi $Card(E') = 288$
3) Si on doit alterner, on ne peut commencer que par les garçons à l'extérieur. Il n'y aurait pas assez de filles sinon. Par exemple :

Garçons 1	Fille 2	Garçons 4	Fille 1	Garçons 2	Fille 3	Garçons 3

On a donc $Card(E'') = 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1$.. soit au final $Card(E'') = 144$

Exercice 6 : / 3 pts

On considère les polynômes du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$.(avec a non nul)

1) Combien de polynômes peut-on former si on souhaite que les coefficients a, b et c soient des chiffres ?
2) Parmi les polynômes précédents, combien admettent 0 comme racine ?

Correction :

1) On doit calculer le nombre de 3-uplet ne commençant pas par 0. En effet, si $a = 0$, l'expression n'est plus un second degré.
   On a donc $Card(E) = 9 \times 10 \times 10$ soit $Card(E) = 900$
2) Pour que 0 soit une racine, il faut que c soit nul. On dénombre alors :
   $Card(E') = 9 \times 10 \times 1$ soit $Card(E') = 90$

Exercice 7 : / 1 pt

Développer $(a + b)^5$ pour a et b réels quelconques.

Correction :

$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Exercice 8 : / 2 pts

Lors d'une partie de jeu de sociétés, le personnage sur le plateau doit procéder à 7 déplacements successifs. Chaque déplacement correspond à une direction (gauche, droite, haut, bas).
Combien de chemins différents le personnage peut-il emprunter, sachant que les retours en arrière sont possibles ?

Correction :

Il s'agit d'un 7-uplet dans un ensemble à 4 éléments. On a donc pour nombre de chemins possibles : $Card(E) = 4^7$ soit donc : $Card(E) = 16384$

Exercice 9 : / 3 pts

On donne $E = \{a; b; c; d; e\}$ un ensemble fini à 5 éléments.

1) Combien existe-t-il de parties de E
2) Combien existe-t-il de partie de E contenant a et b ?
3) Lister toutes les parties de E à 3 éléments.

Correction :

1) Il s'agit d'une question de cours. $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^5$ soit $Card(\mathcal{P}(E)) = 32$
2) On a donc déjà deux éléments fixés. On peut lister ces parties :

$\{(a; b);\ (a; b; c); (a; b; d); (a; b; e); (a; b; c; d); (a; b; c; e); (a; b; d; e); (a; b; c; d; e)\}$

Soit au total 8 éléments de $\mathcal{P}(E)$

3) $\{(a; b; c); (a; b; d); (a; b; e); (b; c; d); (b; c; e); (b; d; e); (c; d; e); (a; c; d); (a; c; e); (a; d; e)\}$

Soit au total 10 éléments de $\mathcal{P}(E)$;

En fait, il s'agit de choisir 3 lettres parmi 5. Soit $\binom{5}{3} = 10$