CORRECTION EVALUATION SUR LOIS A DENSITE

Exercice 1: *densité de probabilité* / 3 pts

Soit *f*, définie sur $[0;4]$ par $f(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^3$

1) Montrer que *f* est une densité de probabilité sur $[0;4]$
2) Calculer alors $P(0 \le X \le 2)$ ou *X* est la variable aléatoire de densité *f* sur $[0;4]$
3) Déterminer l'espérance mathématique de *X*.

Correction :

1) *f* est positive et continue sur $[0;4]$ On évalue alors l'intégrale sur $[0;4]$ afin de vérifier la 3ème condition : $\int_0^4 \left(\frac{x}{4}\right)^3 dx = \left[\left(\frac{x}{4}\right)^4\right]_0^4 = 1-0=1$

   F est bien une densité de probabilité sur $[0;4]$

2) $P(0 \le X \le 2) = \int_0^2 \left(\frac{x}{4}\right)^3 dx = \left[\left(\frac{x}{4}\right)^4\right]_0^2 = \frac{1-0}{16} = \frac{1}{16}$

3) On évalue alors $E(X) = \int_0^4 x\left(\frac{x}{4}\right)^3 dx = \left[\frac{16}{5}\left(\frac{x}{4}\right)^5\right]_0^4 = \frac{16}{5}$ soit donc $E(X)=3{,}2$

Exercice 2 : *loi normale centrée réduite* / 3 pts

Soit *X* une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

1) Exprimer à l'aide d'une intégrale $P(1 \le X \le 2)$
2) Donner à l'aide de votre calculatrice la valeur approchée à 10^{-6} de cette probabilité.
3) En utilisant des critères de normalité, donner en une valeur approchée à 10^{-4}

Correction :

1) $P(1 \le X \le 2) = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
2) On utilise la touche `2:normalFRép(` On obtient $P(1 \le X \le 2) \approx 0{,}1359052$
3) A l'aide des critères de Normalité, $P(1 \le X \le 2) \approx \frac{0{,}954-0{,}683}{2} \approx 0{,}1355$

Exercice 3 : *loi exponentielle* / 2 pts

Soit *X* une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle d'espérance $\frac{1}{4}$

1) Donner l'expression de la densité de probabilité de cette variable aléatoire.
2) Calculer alors $P_{X\ge 1}(X \ge 5)$ en valeur exacte.

Correction :

1) On rappelle que la densité d'une loi exponentielle est notée :
$f(t)=4e^{-4t}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ car l'espérance vaut 0,25
2) On rappelle que la loi exponentielle est sans vieillissement.
$P_{X\geq 1}(X\geq 5)=P(X\geq 4)$ Soit donc $P_{X\geq 1}(X\geq 5)=e^{-4\times 4}$ $P_{X\geq 1}(X\geq 5)=\dfrac{1}{e^{16}}$

Exercice 4 : *loi uniforme* / 2 pts

Sur les paquets de céréales MATIN-MIAM, la masse indiquée est de 375g. Statistiquement, on n'a jamais trouvé de paquet pesant moins de 365g et plus de 385g. A l'intérieur de cette fourchette, on estime que les masses sont uniformément réparties.

1) Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire continue M modélisant la masse d'un paquet de céréales.
2) Que représente 375g pour cette variable M ?
3) Calculer la probabilité qu'un paquet de céréales ait une masse comprise entre 365g et 370g.

Correction :

1) On détermine les bornes de la densité uniforme $f : x \mapsto \dfrac{1}{20}$ sur $[365\,;385]$
2) 375 représente l'espérance de M
3) $P([365\,;370])=\displaystyle\int_{365}^{370}\frac{1}{20}\,dx=\frac{5}{20}=0,25$ soit $P(365\leq X\leq 370)=0,25$

Exercice 5 : / 3 pts

1) On sait que X suit une loi normale $N(150\,;\sigma^2)$. Donner la valeur de σ sachant que $P(126\leq X\leq 174)\approx 0,997$
2) On sait que X suit une loi normale $N(\mu\,;25)$. Déterminer la valeur de μ sachant que $P(X\leq 22)\approx 0,7$

Correction :

1) Il faut centrer et réduire la variable X. $P(\dfrac{126-150}{\sigma}\leq\dfrac{X-150}{\sigma}\leq\dfrac{174-150}{\sigma})$ soit alors $P(\dfrac{-24}{\sigma}\leq\dfrac{X-150}{\sigma}\leq\dfrac{24}{\sigma})\approx 0,997$ On reconnaît le troisième critère de normalité. On peut donc affirmer que $\sigma=8$
2) On remarque que $P(2\leq X\leq 22)\approx 0,954$ correspond à $P(\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma)\approx 0,954$ soit le deuxième critère de normalité. soit alors $\mu=12$

Exercice 6 : / 1 pt

On sait que X est une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(-7\,;2)$

Donner l'arrondi au millième du nombre réel t tel que $P(X\geq t)\approx 0,756$

Correction :

On inverse la probabilité $P(X\geq t)\approx 0,756$ équivaut $P(X\leq t)\approx 0,244$ On utilise alors la touche `3:invNormale(` On obtient $t\approx -7,98$

Exercice 7 : / 3 pts

Dans un magasin spécialisé dans la vente de téléphones portables, on fait une promotion sur un type d'appareil A. Dans une journée, 150 personnes se présentent indépendamment. La probabilité pour qu'une personne achète l'appareil A est de 0,4. On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'articles A vendus en une journée.

1) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Calculer alors son espérance et son écart-type.
2) On admet que la loi de la variable aléatoire Y, avec $Y = \dfrac{X-60}{6}$ peut être approchée par la loi normale centrée réduite. Sur quel théorème est basée cette approximation ?
3) En utilisant cette approximation précédente, calculer $P(69 \leq X \leq 72)$

Correction :

1) Il s'agit d'une répétition d'épreuves successives indépendantes. X est une variable aléatoire qui compte le nombre de personnes achetant l'appareil A.
   X suit donc une loi binomiale de paramètre n=150 et p= 0,4
2) On utilise le théorème de Moivre Laplace après avoir vérifié les trois critères : n est bien plus grand que 30 et np et $n(1-p)$ sont bien plus grand que 5.
3) On centre et on réduit la variable $P(\dfrac{69-60}{6} \leq \dfrac{X-60}{6} \leq \dfrac{72-60}{6})$

soit alors $P(1,5 \leq \dfrac{X-60}{6} \leq 2)$ soit à l'aide de la calculatrice `2:normalFRép(`,

on obtient $P(69 \leq X \leq 72) \approx 0,044$

Exercice 8 : *Recherche d'un paramètre* / 3 pts

Sur une chaine d'embouteillage dans une brasserie, la quantité x (en cl) de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille d'une contenance de 110 cl, peut être modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale $N\left(\mu\,;2^2\right)$

La législation impose qu'il y ait moins de 0,1% des bouteilles contenant moins de un litre. A quelle valeur de μ doit on régler la machine afin de respecter la loi ?

Correction :

On nomme X la variable aléatoire donnant le volume des bouteilles.
On écrit la probabilité proposée : $P(X \leq 100) \approx 0,001$
On centre et on réduit cette probabilité :

$$P(\frac{X-\mu}{2} \leq \frac{100-\mu}{2}) \approx 0,001$$

La variable $\dfrac{X-\mu}{2}$ suit donc une loi normale centrée et réduite.

$\dfrac{100-\mu}{2} = -3,09023$ et donc $\mu = 106,18$