CORRECTION EVALUATION SUR LOIS A DENSITE

NOM :…………………………………. PRENOM :……………………… SUJET C

Exercice 1 : *densité de probabilité* / 3 pts

Soit *f*, définie sur [0 ; 2] par $f(x) = 0{,}15(x^2 + x + 1)$

1) Montrer que *f* est une densité de probabilité sur [0 ; 2]

Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque adolescent, associe la quantité de soda, en litres, bue quotidiennement. On admet que *X* suit sur [0 ; 2]la loi continue dont la densité de probabilité est définie par *f*.

2) Calculer alors $P(X \leq 0{,}25)$
3) Déterminer l'espérance mathématique de *X* et interpréter le résultat par une phrase.

Correction :

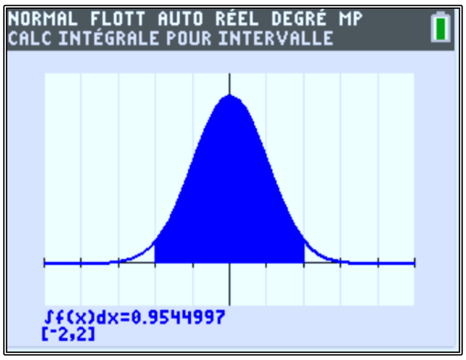
1) f est continue sur $[0;2]$car c'est un polynôme. f est aussi positive car le discriminant est négatif. Il reste à évaluer la valeur de l'intégrale.
$f(x) = 0{,}15(x^2 + x + 1)$ donc $F(x) = 0{,}15\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)$ est une primitive .
On calcule alors $I = \int_0^2 0{,}15(x^2 + x + 1)dx = \left[0{,}15\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\right]_0^2$
Soit en remplaçant $I = 0{,}15\left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\right)$ soit donc $I = 1$
f est bien une densité de probabilité sur $[0; 2]$
2) $P(X \leq 0{,}25) = \int_0^{0{,}25} 0{,}15(x^2 + x + 1)dx = \left[0{,}15\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\right]_0^{0{,}25}$
$P(X \leq 0{,}25) = 0{,}15\left(\frac{0{,}25^3}{3} + \frac{0{,}25^2}{2} + 0{,}25\right)$ soit donc $P(X \leq 0{,}25) = \frac{11}{256}$
3) On rappelle que $E(X) = \int_0^2 xf(x)dx$ soit ici $E(X) = \int_0^2 x \times 0{,}15(x^2 + x + 1)\,dx$
$E(X) = \int_0^2 0{,}15(x^3 + x^2 + x)\,dx$ donc $E(X) = \left[0{,}15\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\right]_0^2$
Soit donc $E(X) = 1{,}3$

Exercice 2 : *loi normale centrée réduite* / 3 pts

Soit *X* une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

1) Tracer approximativement la représentation graphique de la courbe de Gauss.
2) Sur la courbe, faire apparaître le deuxième critère de Normalité et donner sa valeur
3) En déduire, à 10^{-3}, la valeur de $P(X \leq 2)$

Correction :



$P(-2 \leq X \leq 2) = 0{,}954$

$P(X \leq 2) = 0{,}5 + \frac{0{,}954}{2}$ soit donc $P(X \leq 2) = 0{,}977$

Exercice 3 : *loi exponentielle* / 4 pts

La durée de vie, exprimée en années, d'un smartphone est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle d'espérance 4

1) Déterminer la valeur du paramètre et donner l'expression de la densité de probabilité de cette variable aléatoire.
2) Quelle est la probabilité que la durée de vie du smartphone soit inférieure à 5 ans ?
3) Quelle est la probabilité que la durée de vie du smartphone soit comprise entre 1 et 4 ans ?
4) Antoine possède un smartphone depuis deux ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne au maximum encore trois ans ?
5) Calculer $P_{X\geq 1}(X \geq 5)$ en valeur exacte.

Correction :

1) Puisque l'espérance est l'inverse du paramètre, on a : $\lambda = \frac{1}{4}$
2) On peut donner la densité $\begin{array}{l} f: [0\,;+\infty[\to\mathbb{R}^+ \\ x\mapsto \frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}} \end{array}$

   On cherche ici : $P(X \leq 5) = 1 - e^{-\frac{5}{4}}$ soit donc $P(X \leq 5) \approx 0{,}713$
3) $P(1 \leq X \leq 4) = e^{-\frac{1}{4}} - e^{-1}$ soit donc $P(1 \leq X \leq 4) \approx 0{,}411$
4) On cherche donc $P_{(X\geq 2)}(X \leq 5)$ On utilise alors la formule d'une probabilité conditionnelle $P_{(X\geq 2)}(X \leq 5) = \frac{P((X\leq 5)\cap(X\geq 2))}{P(X\geq 2)}$

   On obtient alors : $P_{(X\geq 2)}(X \leq 5) = \frac{e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{5}{4}}}{e^{-\frac{1}{2}}}$ soit $P_{(X\geq 2)}(X \leq 5) \approx 0{,}528$
5) On utilise la loi sans vieillissement $P_{(X\geq 1)}(X \geq 5) = P(X \geq 4)$

   On a donc $P_{(X\geq 1)}(X \geq 5) = e^{-1}$

Exercice 4 : *loi uniforme* / 2 pts

Un étang de pêche est très régulièrement empoissonné. Diego adore aller y pêcher pour se ressourcer. Dans cet étang, lorsqu'un pêcheur met sa ligne à l'eau, le temps d'attente T, en minutes avant la première touche suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;60]$

1) Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire continue T modélisant Le temps d'attente.
2) Que représente 30 pour cette variable T ?
3) Déterminer la probabilité que Diego attende moins de 40 minutes pour avoir sa première touche.

Correction :

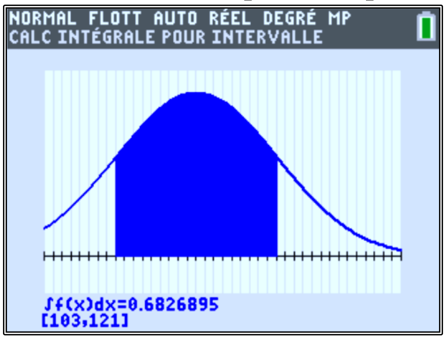
1) La densité est donnée par la formule du cours $\begin{array}{l} f: [0\,;60]\to\mathbb{R}^+ \\ x\mapsto \frac{1}{60} \end{array}$
2) 30 représente le temps moyen d'attente de la première touche : c'est l'espérance mathématiques.
3) On cherche donc $P(T \leq 40)$. A l'aide de formule du cours, $P(T \leq 40) = \frac{40}{60}$ soit donc en simplifiant $P(T \leq 40) = \frac{2}{3}$

Exercice 5 : / 2 pts

1) On sait que X suit une loi normale $N(112\,;\, \sigma^2)$. Donner la valeur de σ sachant que $P(103 \leq X \leq 121) \approx 0{,}683$
2) On sait que X suit une loi normale $N(\mu\,;\, 49)$. Déterminer la valeur de μ sachant que $P(69 \leq X \leq 111) \approx 0{,}997$

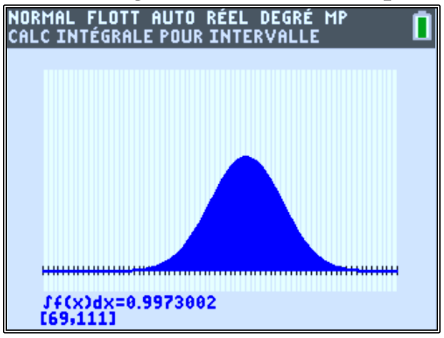
Correction :

1) On trace un dessin pour comprendre la situation



On reconnaît le premier critère de normalité. L'amplitude de l'intervalle est donc $2\sigma = 18$ soit donc $\sigma = 9$ et on a $N(112\,;\,9^2)$

2) On trace également un dessin pour comprendre



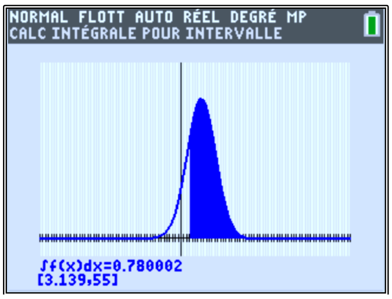
On reconnaît le troisième critère de normalité. L'intervalle est centré sur μ. On adonc $\mu = \frac{69+111}{2}$ soit $\mu = 90$ et on a $N(90\,;\,7^2)$

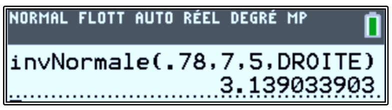
Exercice 6 : / 1 pt

On sait que X est une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(7\,;\,5^2)$
Donner l'arrondi au millième du nombre réel t tel que $P(X \leq t) = 0{,}78$

Correction :

On trace un dessin traduisant la situation. t est situé à gauche de l'axe de symétrie.





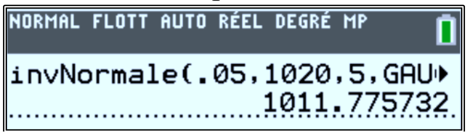
Exercice 7 : / 3 pts

Une minoterie commercialise de la farine en sachets. La variable aléatoire X qui, à chaque sachet tiré au hasard associe son poids en grammes, suit une loi normale $N(1020\,;\,5^2)$

1) Quelle est à 10^{-5} près la probabilité qu'un sachet pèse moins d'un kilogramme ?
2) Quelle est à 10^{-4} près la probabilité que le poids d'un sachet soit compris entre 990 et 1035 grammes ?
3) Déterminer à l'unité près, l'entier k tel que $P(X \leq k) = 0{,}05$. En déduire le poids d'un sachet qui est tel que 5 % des sachets fabriqués soient plus légers que lui.
4) Quel est le poids du sachet qui est tel que 10 % des sachets soient plus lourds que lui ?

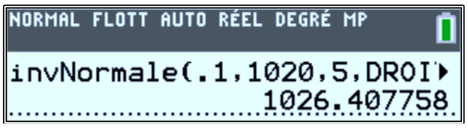
Correction :

1) On cherche $P(X \leq 1000) \approx 3{,}169 \times 10^{-5}$
2) On cherche $P(990 \leq X \leq 1035) \approx 0{,}9987$
3) Je cherche k tel que $P(X \leq k) = 0{,}05$ k est donc situé avant 1020



Il n'y a moins de 5 % de sachets qui pèsent moins de 1011 grammes

4) On cherche donc $P(X \geq k) = 0{,}10$; La TI 83 sait trouver sans problème l'aire à droite.



Il y a donc moins de 10 % des sachets qui pèsent plus de 1027 grammes.

Exercice 8 : / 2 pts

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un lave-vaisselle par une variable aléatoire $N(84;\ \sigma^2)$. On sait de plus que $P(X \leq 64) = 0{,}16$

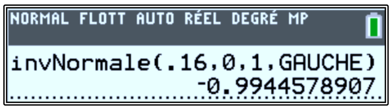
Déterminer la valeur de σ au centième.

Correction :

Il suffit de réduire et de centrer la variable afin de pouvoir inverser la loi normale

$$P(X \leq 64) = 0{,}16 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-84}{\sigma} \leq \frac{64-84}{\sigma}\right) = 0{,}16$$

On cherche donc $P\left(Z \leq \frac{-20}{\sigma}\right) = 0{,}16$

On inverse la table. On obtient 

$P(Z \leq -0{,}99) = 0{,}16$

$$\frac{-20}{\sigma} = -0{,}99$$

Soit donc $\sigma = 20{,}111$