Correction Évaluation sur composition et dérivation

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET A

Exercice 1 : / 2 pts

On donne la fonction $f(x) = \frac{5}{3x+2}$. Décomposer f sous la forme $f = vou$

Solution :

On pose : $u(x) = 3x+2$ et $v(x) = \frac{5}{x}$

On a :

$$vou : x \overset{u}{\mapsto} 3x+2$$
$$X \overset{v}{\mapsto} \frac{5}{X}$$

Exercice 2 : / 2 pts

On donne : $u(x) = -5x^2+7$ et $v(x) = \sqrt{x}$
Écrire la fonction $f = uov$
Solution :

On pose : $u(x) = -5x^2+7$ et $v(x) = \sqrt{x}$

On a :

$$uov : x \overset{v}{\mapsto} \sqrt{x}$$
$$X \overset{u}{\mapsto} -5X^2+7$$

Soit au final $f(x) = -5x+7$

Exercice 3 : / 2 pts

f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (5x+3)(7-4x)$. Déterminer la dérivée de f

Solution :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$u(x) = 5x+3 \qquad v(x) = 7-4x$$
$$u'(x) = 5 \qquad v'(x) = -4.$$

On a alors $f'(x) = -4(5x+3)+5(7-4x)$
Soit donc $f'(x) = -40x+23$

Exercice 4 : / 3 pts

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2+5x-1$
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x_0 = 3$

Solution :

On a : $f'(x) = 2x+5$.
On évalue $f'(3) = 11$ et $f(3) = 23$
On remplace ensuite dans l'équation de la tangente $T_3 : y = f'(3)(x-3)+f(3)$
Soit ici $T_3 : y = 11x-10$

Exercice 5 : / 2 pts

On donne $f(x) = (3x-8)^5$, définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de sa dérivée.

Solution :

f est de la forme u^n, avec $u(x) = 3x-8$
Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 5 \times 3 \times (3x-8)^4$ soit $f'(x) = 15(3x-8)^4$

Exercice 6 : / 2 pts

On donne $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$, définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de sa dérivée.

Solution :

f est de la forme $\sqrt{u}$, avec $u(x) = x^2+x+1$
Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$.

Exercice 7 : / 3 pts

On donne $f(x) = (2x-7)e^{5x}$, définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer l'expression de sa dérivée.

Solution :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$u(x) = 2x-7 \qquad v(x) = e^{5x}$

$u'(x) = 2 \qquad v'(x) = 5e^{5x}$.

On a alors $f'(x) = 5e^{5x}(2x-7) + 2e^{5x}$
Soit donc $f'(x) = e^{5x}(10x-33)$

Exercice 8 : / 4 pts

On donne $f(x) = cos\,(2x - \frac{\pi}{3})$, définie sur $\mathbb{R}$.

1) Calculer les 4 premières dérivées de f.
2) Conjecturer l'expression de $f^{(n)}$, pour tout n entier naturel.

Solution :

f est de la forme $cos\,(u)$, avec $u(x) = 2x - \frac{\pi}{3}$
Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2\,sin\,(2x - \frac{\pi}{3})$,
Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = -4\,cos\,(2x - \frac{\pi}{3})$,
Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f'''(x) = 8\,sin\,(2x - \frac{\pi}{3})$,
Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f''''(x) = 16\,cos\,(2x - \frac{\pi}{3})$,

On peut donc conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^n cos\,(2x - \frac{\pi}{3} + n\frac{\pi}{2})$,