

Les lois à densité

1) Introduction

Jusqu'à présent, chaque expérience aléatoire conduisait à un univers fini et chaque variable aléatoire prenait un nombre fini de valeurs. Il s'agissait donc toujours de définir une loi de probabilité sur un ensemble fini $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ et il suffisait pour cela de se donner ou de déterminer les n réels $p_i = P(X = \omega_i)$

Mais il arrive aussi que les issues d'une expérience ou les valeurs prises par une variable aléatoire X puissent être n'importe quel nombre d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ (Par exemple : la durée d'une communication). Dans ce cas, il n'est plus question de définir une loi P sur I en se donnant la probabilité de chaque élément de I (elle serait d'ailleurs nulle !) et de plus, les événements intéressants ne sont plus «obtenir tel ou tel réel», mais plutôt «Obtenir un nombre compris entre a et b ».

2) Loi continue sur un intervalle

a) Activité introductive

Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dont la forme est donnée par le domaine ci-contre. On suppose que la flèche atteint toujours la cible. On note X la variable aléatoire qui associe à chaque tir l'abscisse x du point d'impact.

On souhaiterait calculer $P(1 \leq X \leq 3)$ et $P(X = 3)$

Pour cela, on modélise en considérant que la probabilité

$P(1 \leq X \leq 3)$ est proportionnelle à l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la courbe et les droites $x = 1$ et $x = 3$

On a alors : $\int_1^3 (-1,5x^3 + 6x^2) dx = 22$ à la main ou à la TI

$$\int_0^4 (-1,5x^3 + 6x^2) dx = 32 \text{ soit } P(1 \leq X \leq 3) = \frac{11}{16}$$

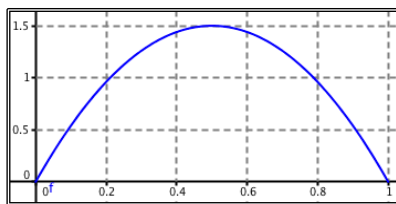
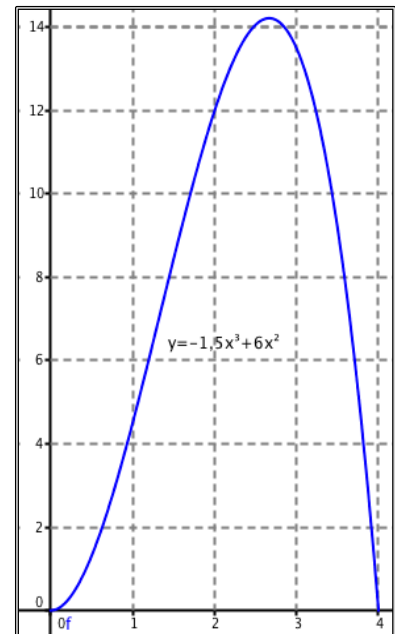
Dorénavant, notre archer s'entraîne sur trois cibles de formes différentes données ci-dessous. L'aire de chaque cible vaut 1.

Le tireur gagne lorsque $x \in [0; 0,2]$

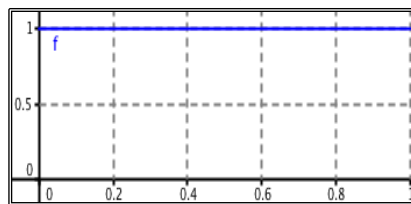
- Avec quelle cible le tireur semble avoir le plus de chance de gagner ?
- Donner graphiquement la valeur exacte de la probabilité de gagner avec la cible 2
- Par lecture graphique, donner les valeurs P_1 et P_3

Le bord supérieur du domaine est la courbe d'une fonction dont on donne l'expression.

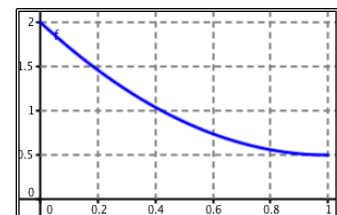
- Vérifier que l'aire de chaque domaine vaut 1.
- Calculer les valeurs exactes de P_1 et P_3 .
- Pour quelle cible l'événement $\{0,3 \leq x \leq 0,7\}$ est-il le plus probable ?



$$f(x) = 6x(1-x)$$



$$g(x) = 1$$



$$h(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$$

En conclusion, chaque tir sur une cible permet de modéliser le choix d'un réel $x \in [0;1]$ en définissant la probabilité des événements $x \in J$ pour tout intervalle $J \subset [0;1]$. La fonction dont la courbe est le bord supérieur de la courbe est appelée fonction densité de la loi de probabilité ainsi définie sur $[0;1]$

Remarque :

La loi de probabilité ainsi définie n'est pas équirépartie. Deux intervalles de même amplitude n'ont pas nécessairement la même probabilité d'être réalisés.

b) Fonction densité de probabilité

X désigne une variable aléatoire continue prenant toutes ses valeurs dans $[a;b]$. La loi de probabilité de X ne peut plus être définie par la probabilité d'obtenir chacune des valeurs de X , mais par la probabilité pour que X appartienne à un intervalle $J \subset [a;b]$, qui peut se calculer comme une aire sous une courbe.

Définition :

Soit $I = [a; b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

- On appelle densité de probabilité sur $[a; b]$, toute fonction **f continue et positive sur I** telle que $\int_a^b f(x) dx = 1$
- On définit la loi de probabilité P , de densité f sur I , en posant $P([\alpha; \beta]) = \int_\alpha^\beta f(x) dx$ pour tout intervalle $[\alpha; \beta]$ contenu dans $[a; b]$.
- La loi de P est dite continue sur $[a; b]$.

Exemple :

f est la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \cos x$.

1. Démontrer que f est une densité de probabilité sur I .
2. Déterminer la probabilité de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Solution :

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est continue et positive sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On évalue la valeur de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

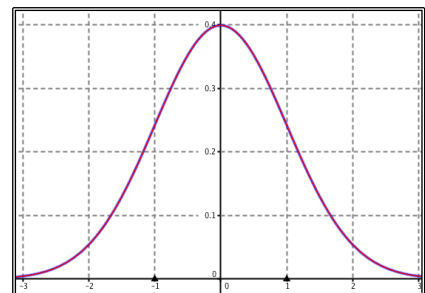
$$\text{On cherche : } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) dx = \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \approx 0,207$$

Remarque :

Lorsque f est définie sur un intervalle non borné, par exemple $[a; +\infty[$, la première condition s'écrit (sous réserve de l'existence des limites)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

La courbe ci-contre porte le nom de courbe de Gauss. Elle sera traitée plus loin.





c) Cas particulier : densité de la loi uniforme

Soit P la loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$. Ceci signifie que la probabilité ne change pas sur un intervalle d'amplitude égale.

Peut-on déterminer une fonction f définie sur $[a; b]$ de telle sorte que f soit la densité de P ?

Nous savons que, pour tout intervalle $[\alpha; \beta]$ contenu dans $[a; b]$, $P([\alpha; \beta]) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$. Si une

telle fonction f existe, nous devons avoir : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{1}{b - a} \times (\beta - \alpha)$ pour tout intervalle $[\alpha; \beta]$ contenu dans $[a; b]$.

Or $\beta - \alpha = \int_{\alpha}^{\beta} 1 dx$, donc $\frac{1}{b - a} \times (\beta - \alpha) = \frac{1}{b - a} \int_{\alpha}^{\beta} 1 dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b - a} dx$

Considérons alors la fonction constante f définie sur $[a; b]$, par $f(x) = \frac{1}{b - a}$:

f est continue sur $[a; b]$, positive car $a < b$ et $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b - a} dx = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$

Donc $f : x \mapsto \frac{1}{b - a}$ est la densité de la loi uniforme sur $[a; b]$.

Théorème :

Soit P la loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$, avec $a < b$

- La densité P est la fonction constante $f : x \mapsto \frac{1}{b - a}$ sur $[a; b]$:

- Pour tout intervalle $[\alpha; \beta]$ contenu dans $[a; b]$, $P([\alpha; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b - a} dx = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$.

Exercice :

Vous arrivez à un arrêt de bus à 10h sachant que le bus arrivera à un certain instant qui suit la loi uniformément distribuée entre 10h et 10h 30.

a. Quelle est la probabilité que votre attente dure 10 minutes ou plus ?

b. Si à 10h 15, le bus n'est pas encore arrivé, quelle est la probabilité que votre attente dure au moins 10 minutes supplémentaires ?

Solution :

Attention, avec les données de l'énoncé, il faut traiter avec des heures décimales...

On identifie les données : $a = 10$ $b = 10,5$. Donc $\frac{1}{b - a} = 2$

On a donc ici $f : x \mapsto 2$, densité uniforme sur $[10; 10,5]$

a) On cherche donc $P([10h10; 10h30]) = \int_{10+\frac{1}{6}}^{10,5} 2 dt = 2 \times \left(10,5 - 10 - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}$:

b) Il s'agit ici d'une probabilité conditionnelle, notion vue en début d'année.

On écrit donc :

$$P_{[10h15; 10h30]}([10h25; 10h30]) = \frac{P([10h25; 10h30] \cap [10h15; 10h30])}{P([10h15; 10h30])}$$

$$P_{[10h15; 10h30]}([10h25; 10h30]) = \frac{P([10h25; 10h30])}{P([10h15; 10h30])} = \frac{1}{3}$$

d) Variables aléatoires

Définition :

Soit $I = [a; b]$ avec $a < b$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et P une loi de probabilité sur I , de densité f sur I

Une variable aléatoire X à valeurs dans I suit la loi de probabilité P si :

Pour tout intervalle $[\alpha; \beta]$ contenu dans $[a; b]$, $P(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$

Remarque :

Une telle variable X est dite continue. $P(\alpha \leq X \leq \beta)$ est donc égale à l'aire du domaine comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$.

Par continuité, on a aussi : Pour tout intervalle $[\alpha; \beta]$

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X < \beta)$$

Propriétés :

- $P([a \leq X \leq b]) = \int_a^b f(t) dt = 1$
- $\forall x \in [a; b] \quad P([X = x]) = \int_x^x f(t) dt = 0$
- $\forall x \in [a; b]$ on note $(X \leq x)$ l'événement : $(a \leq X \leq x)$ et $(X \geq x)$ l'événement $(x \leq X \leq b)$.

$$\text{Alors, } P(X < x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$\text{Alors } P(X > x) = P(X \geq x) = \int_x^b f(t) dt$$

Remarque :

$$\text{On a aussi } P(X > x) = \overline{P(X \leq x)} = 1 - P(X \leq x) = 1 - \int_a^x f(t) dt.$$

Exemple :

Avec la densité de l'activité introductive $\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = 6x(1-x)$, on peut calculer :

$$P(0,3 \leq X \leq 0,7) = \int_{0,3}^{0,7} 6x(1-x) dx = \left[3x^2 - 2x^3 \right]_{0,3}^{0,7} \approx 0,57$$

Propriétés :

Soit X une Variable Aléatoire suivant une loi de probabilité P , de densité f sur $I = [a; b]$.

L'espérance mathématique de X est définie par $E(X) = \int_a^b x \times f(x) dx$.

Exemple :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$. Par définition, l'espérance

$$\text{est donnée par : } E(X) = \int_a^b x \times \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Remarque :

Cette définition d'espérance mathématique prolonge la notion de moyenne dans le cas continu

3) La loi exponentielle

La définition suivante généralise la notion de densité de loi de probabilité à un intervalle non borné de $\mathbb{R}$.

Définition :

Soit $I = [a ; +\infty[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f définie sur I est la densité d'une loi de probabilité P sur I si : f est positive, continue sur I et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt = 1$.

Illustration :

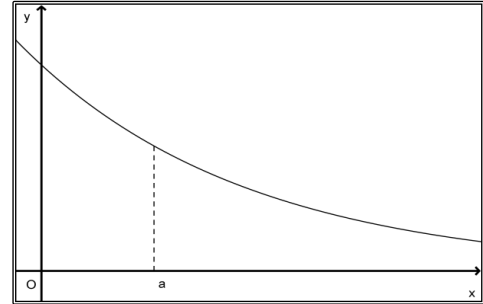
On a alors :

- Pour tout intervalle $[\alpha ; \beta]$ contenu dans I ,

$$P([\alpha ; \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

- Pour tout réel $\alpha \geq a$,

$$P([\alpha ; +\infty[) = P(\overline{[a ; \alpha]}) = 1 - P([a ; \alpha]) = 1 - \int_a^{\alpha} f(t) dt$$



Exercice :

Soit λ un réel strictement positif, λ fixé. Démontrer que la fonction f définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est la densité d'une loi de probabilité sur I .

Solution :

La fonction est bien continue sur $I = [0 ; +\infty[$ en tant que composée de fonction continue sur $I = [0 ; +\infty[$. Elle est de plus positive puisqu'une exponentielle est toujours positive. On

calcule alors : soit $\beta \geq a$ $\int_0^{\beta} \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^{\beta} = 1 - e^{-\lambda \beta}$ Par passage à la limite, on obtient :

$\lim_{\beta \rightarrow \infty} 1 - e^{-\lambda \beta} = 1$ et la fonction $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est bien une densité sur $I = [0 ; +\infty[$.

Définition :

Soit λ un réel strictement positif, λ fixé.

- La fonction f définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est une densité de probabilité sur I .
- La loi de probabilité P sur I , de densité f est appelée la **loi exponentielle de paramètre λ**

Propriété :

Soit λ un réel strictement positif, λ fixé et X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ sur $I = [0 ; +\infty[$. Pour tout nombre a et b de I , avec $a < b$.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$P(X \leq a) = P(X < a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = e^{-\lambda a}$$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$



Démonstration :

On doit donc calculer $E(X) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \lambda t e^{-\lambda t} dt$

On pose donc : $g(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$ définie sur $[0; +\infty[$. On note alors $G(x) = (-x - \frac{1}{\lambda})e^{-\lambda x}$

Montrons alors que G est une primitive de g sur $[0; +\infty[$

G est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que produit et composée de fonction dérivables sur $[0; +\infty[$

$$G'(x) = -e^{-\lambda x} + (-x - \frac{1}{\lambda})(-\lambda)e^{-\lambda x} = \lambda x e^{-\lambda x} = g(x)$$

$$\int_0^a \lambda t e^{-\lambda t} dt = \left[(-x - \frac{1}{\lambda})e^{-\lambda x} \right]_0^a = \frac{1}{\lambda} (-\lambda a e^{-\lambda a} - e^{-\lambda a} + 1)$$

On calcule donc la limite de cette expression :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} -\lambda a e^{-\lambda a} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = 0 \text{ Par croissances comparées. Donc } \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Exercice :

La durée de vie exprimée en semaine d'un composant électronique est modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,002$

- 1) Calculer la probabilité que la durée de vie du composant soit inférieure à 200 semaines.
- 2) Calculer la probabilité qu'elle soit supérieure à 200 semaines.
- 3) Calculer la probabilité que le composant fonctionne encore la 300^{ème} semaine.
- 4) Quelle est l'espérance mathématique de X ?

Solution :

- 1) On a : $P(X < 200) = 1 - e^{-0,002 \times 200} \approx 0,3$
- 2) On a : $P(X > 200) = e^{-0,4} \approx 0,7$
- 3) On a : $P(X \geq 300) = e^{-0,6} \approx 0,55$
- 4) $E(X) = \frac{1}{0,002} = 500$

Remarque :

L'espérance mathématique représente ici la durée de vie moyenne d'un composant.

Question supplémentaire :

Calculer la probabilité, pour un composant ayant déjà fonctionné 200 semaines, qu'il fonctionne encore 100 semaines plus tard.

$$P_{X \geq 200}(X \geq 300) = \frac{P((X \geq 300) \cap (X \geq 200))}{P(X \geq 200)} = \frac{P(X \geq 300)}{P(X \geq 200)} = \frac{e^{-0,6}}{e^{-0,4}} = e^{-0,2} \approx 0,82$$

Propriété :

Lorsqu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ , on a :

$$\forall t \geq 0 \text{ et } \forall h \geq 0, P_{X \geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$$

On dit que X suit une **loi de durée de vie sans vieillissement**. La probabilité que l'objet fonctionne à l'instant $t+h$ sachant qu'il fonctionne à l'instant t ne dépend pas de son âge t .

Démonstration :

$$P_{X \geq t}(X \geq t+h) = \frac{P((X \geq t+h) \cap (X \geq t))}{P(X \geq t)} = \frac{P(X \geq t+h)}{P(X \geq t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X \geq h)$$

Exemple :

La durée de vie d'un noyau d'un corps radioactif suit une loi exponentielle.

Exercice :

Le temps, mesuré en heures, nécessaire pour réparer une certaine machine suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$.

- 1) Quelle est la probabilité que le temps de réparation excède deux heures ?
- 2) Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins dix heures, étant donné que sa durée a déjà dépassé neuf heures ?

Solution :

1) On a donc $P(X > 2) = e^{-\frac{1}{2} \times 2} = \frac{1}{e}$

2) $P_{X \geq 9}(X \geq 10) = P(X \geq 1) = \frac{1}{e}$

Exemple :

Un ordinateur fonctionne tant bien que mal avant ... de tomber en panne.

La variable aléatoire X , qui désigne le nombre de jours pendant lesquels fonctionne cette machine avant de tomber en panne, suit une loi exponentielle.

Sachant que la probabilité qu'il n'y ait aucune panne durant les 10 premiers jours est égale à $\frac{1}{e}$, calculer le paramètre de la loi.

Solution :

On cherche donc à évaluer : $P(X \geq 10) = P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = e^{-10\lambda} = \frac{1}{e}$

On résout alors l'équation $e^{-10\lambda} = \frac{1}{e}$. On utilise le logarithme qui est une bijection sur $]0; +\infty[$

$-10\lambda = -1$ soit alors $\lambda = \frac{1}{10}$ remarquons que λ est bien un nombre positif...

4) La loi Normale

a) Loi normale centrée réduite

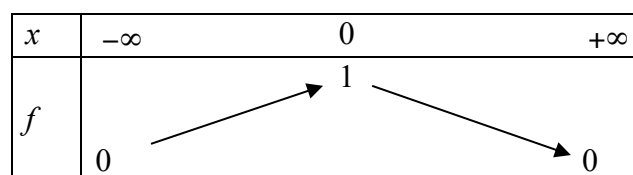
➤ Une nouvelle fonction : la fonction de Laplace-Gauss

On nomme g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Remarquons tout d'abord que cette fonction est paire. On peut donc l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

On calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0^+$ La représentation graphique de g admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ en tant que composée de

fonction dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On a alors : $g'(t) = -te^{-\frac{t^2}{2}}$ g est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$



On dit que cette courbe a la forme d'une courbe en cloche

On s'intéresse à l'aire A , en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C_g et l'axe des abscisses. Ne connaissant pas de primitive « explicite » de la fonction g , on va donc conjecturer la valeur de cette aire en utilisant la calculatrice.

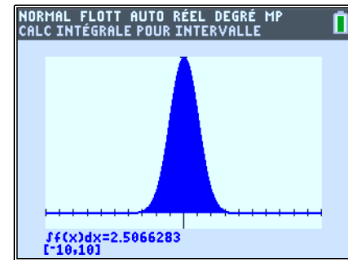
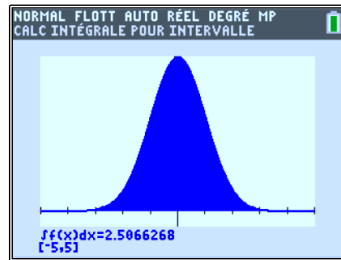
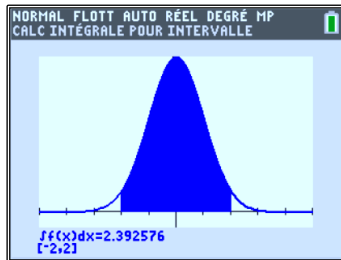
Soit α un réel strictement positif. On note $A(\alpha)$ l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C_g , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\alpha$ et $x = \alpha$.

Après avoir rentrée la fonction g , et affichée une fenêtre adaptée, on utilise la séquence

suivante pour trouver $A(2)$.

calculs f4 u1 0 rép ? L2 Z précéd L2 Z précéd
2nde trace 7 (-) 2 entrer 2 entrer

On évalue les valeurs des aires avec $\alpha = 5$, puis avec $\alpha = 10$



On observe donc que l'aire se rapproche d'une valeur limite. Reste à déterminer cette valeur.

A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$\sqrt{2\pi}$ 2.506628275

Ainsi :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est :

- paire
- positive, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
- l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C_f et l'axe des abscisses

est égale à 1, ce qui peut se traduire par $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 f(t) dt = \frac{1}{2}$

La fonction f ainsi définie est appelée **fonction de Laplace Gauss**

Propriété :

La fonction $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, continue, positive sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2}$ et

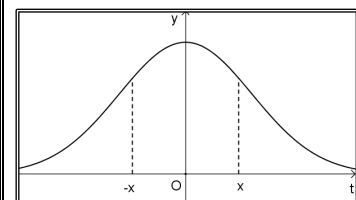
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 f(t) dt = \frac{1}{2}$ est la densité d'une loi de probabilité P sur $\mathbb{R}$.

La loi de densité f ainsi définie est appelée **loi normale centrée réduite**, notée $N(0;1)$

Propriété :

La courbe représentative de la fonction densité f de la loi normale centrée réduite $N(0;1)$ étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on en déduit les résultats suivants :

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(-x \leq X \leq x) = 2 \times P(0 \leq X \leq x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad P(X \leq x) = \frac{1}{2} + P(0 \leq X \leq x)$



Remarque : On a ainsi $P(X \leq 0) = \frac{1}{2}$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$.

L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t \times f(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t \times f(t) dt$ et la variance $V(X) = E[(X - E(X))^2]$.

On a alors $E(X) = 0$, $V(X) = 1$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1$.

Démonstration

- $V(X) = 1$ est admis, conformément au programme.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, calculons $\int_0^x t \times f(t) dt$. Remarquons que l'on peut trouver une primitive de cette fonction puisqu'il s'agit d'une fonction composée à ajuster.

$$\int_0^x t \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x -t \times e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \left(-\frac{t^2}{2}\right)' e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right),$$

Par symétrie, on a : $\int_x^0 t \times f(t) dt = -\int_0^x t \times f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}} - 1 \right)$.

Par passage à la limite, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, en posant $X = -\frac{x^2}{2}$.

Alors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t \times f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t \times f(t) dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

D'où $E(X) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 t \times f(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t \times f(t) dt = 0$.

➤ Intervalle de probabilité donnée

Théorème :

Soit X une Variable Aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$.

$\forall \alpha \in]0; 1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$

Démonstration :

Puisque X suit la loi normale $N(0; 1)$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^+$: $P(-x \leq X \leq x) = \int_{-x}^x f(t) dt$, où f est la

densité de la loi $N(0; 1)$ définie par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_{-x}^x f(t) dt = \int_{-x}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt \text{ par parité de } f \text{ sur } \mathbb{R}$$

Définissons alors la fonction F sur $[0; +\infty[$, par $F(x) = 2 \times \int_0^x f(t) dt$.

f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $F'(t) = 2f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Comme $f > 0$ sur $\mathbb{R}^+$, alors F est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

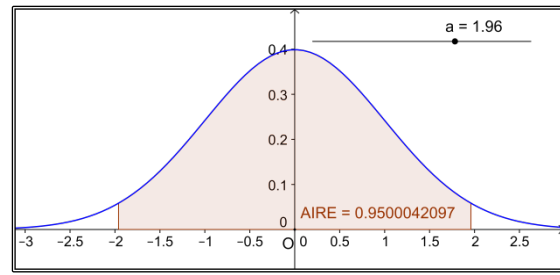
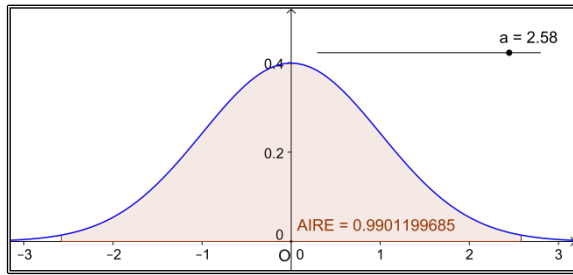
$$F(0) = 2 \times \int_0^0 f(t) dt = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{2}, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

F est continue (car dérivable), strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et $F([0; +\infty[) = [0; 1[$.

Soit α un réel tel que $0 < \alpha < 1$. Alors $-1 < \alpha < 0$, donc $0 < 1 - \alpha < 1$. A l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel u_α de $[0; +\infty[$ tel que $F(u_\alpha) = 1 - \alpha$.

$$\text{Or } F(u_\alpha) = 1 - \alpha \Leftrightarrow 2 \times \int_0^{u_\alpha} f(t) dt = 1 - \alpha \Leftrightarrow \int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} f(t) dt = 1 - \alpha \Leftrightarrow P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha.$$

➤ Valeurs remarquables



En examinant les deux graphiques ci-dessus, on obtient :

$$P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95 \Leftrightarrow P(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 1 - 0,05$$

$$P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 0,99 \Leftrightarrow P(-2,58 \leq X \leq 2,58) \approx 1 - 0,01$$

Avec les notations du théorème précédent, cela se traduit par : $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.

b) Loi normale $N(\mu; \sigma^2)$ (ou loi normale générale)

Définition :

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^{+*}$. On dit qu'une Variable Aléatoire X suit la loi normale $N(\mu; \sigma^2)$, si la Variable Aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$.

Remarque :

On dit qu'on a centré et réduit la variable X .

Propriété :

Soit X une Variable Aléatoire qui suit la loi normale $N(\mu; \sigma^2)$.

L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \mu$ et l'écart-type de X est σ .

Démonstration

X suit la loi normale $N(\mu; \sigma^2)$, donc la V.A. $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite

$N(0; 1)$. On a donc $E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = 0$ et $\sigma\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = 1$.

On rappelle que, pour tous réels a et b , $E(aX + b) = a \times E(X) + b$ et $\sigma(aX + b) = |a| \times \sigma(X)$

$$\text{Ainsi : } E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = 0 \Leftrightarrow E\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma}E(X) - \frac{\mu}{\sigma} = 0 \Leftrightarrow E(X) = \mu$$

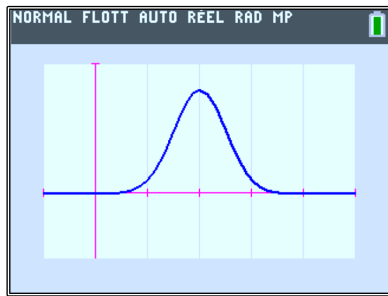
$$\text{et } \sigma\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = 1 \Leftrightarrow \sigma\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{\sigma}\right| \times \sigma(X) = 1 \Leftrightarrow \sigma(X) = \sigma.$$

Notation :

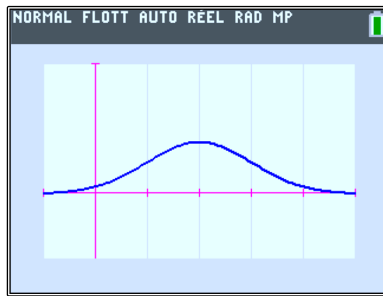
Dans de nombreux exercices, on note, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = P(X \leq x)$

c) Représentation graphique

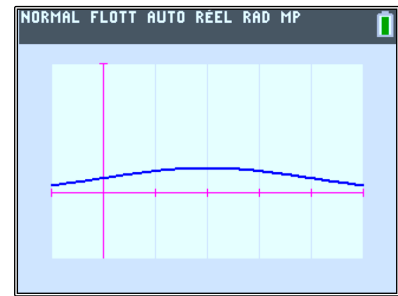
La représentation graphique d'une densité d'une loi normale $N(\mu; \sigma^2)$ est représentée par une courbe en cloche. Suivant les valeurs de μ et de σ , cette représentation est plus ou moins proche de cet aspect de cloche comme le montre les exemples ci-dessous.



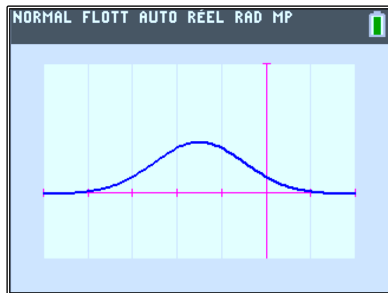
$$X \sim N(2; 0,5^2)$$



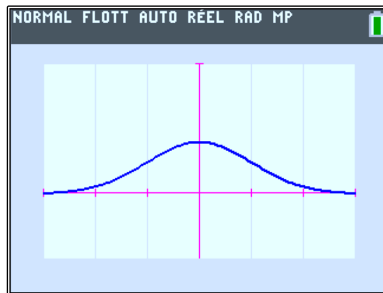
$$X \sim N(2; 1^2)$$



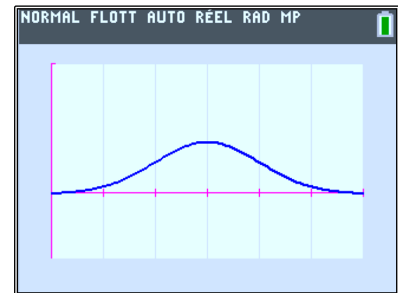
$$X \sim N(2; 2^2)$$



$$X \sim N(-1,5; 1^2)$$



$$X \sim N(0; 1^2)$$



$$X \sim N(3; 1^2)$$

- Le paramètre μ de la loi $N(\mu; \sigma^2)$ est un paramètre de position. Il localise la zone où les réalisations de X ont le plus de chance d'apparaître. On remarque que la représentation graphique de la densité est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \mu$.
- Le paramètre σ de la loi $N(\mu; \sigma^2)$ est un paramètre de dispersion. Il correspond à l'écart type. Plus il est élevé, plus l'aspect cloche disparaît pour faire place à une courbe aplatie.

d) Approximation d'une loi binomiale par la loi normale

Théorème de Moivre-Laplace (admis)

Soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B_{(n;p)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Alors, pour tous réels a et b tels que $a \leq b$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n \in [a; b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Remarque :

Puisque $E(X_n) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ avec $q = 1 - p$, la variable aléatoire Z_n (d'après la remarque préliminaire ci-dessus), n'est autre que la Variable Aléatoire centrée et réduite associée à X_n . (En pratique, il faut vérifier que $n \geq 30$ et $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$)

Exercice :

- On lance 18000 fois de suite un dé non pipé. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de 6 ou de 1 apparus.
 - Donner la loi suivie par X .
 - Calculer son espérance μ et son écart-type σ

- On admet que la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale $N(0; 1)$





Montrer que : $P(5810 \leq X \leq 6190) = P(-3 \leq Z \leq 3)$ puis donner la valeur arrondie au millièmè près de cette probabilité.

Solution :

On réalise 18 000 fois de suite et de manière indépendante la même expérience aléatoire à deux issues. La probabilité du succès est de $\frac{1}{3}$. On nomme X la variable aléatoire qui compte

le nombre de succès, alors $X \sim B\left(18000; \frac{1}{3}\right)$

L'espérance vaut: $\mu = n \times p = 18000 \times \frac{1}{3} = 6000$

L'écart type vaut: $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{4000} \approx 63,25$

On centre la variable : $5810 \leq X \leq 6190 \Leftrightarrow -190 \leq X - 6000 \leq 190$

On réduit la variable : $-190 \leq X - 6000 \leq 190 \Leftrightarrow -3,004 \leq Z \leq 3,004$

Donc $P(5810 \leq X \leq 6190) = P(-3 \leq Z \leq 3) = 0,997$

c) Les critères de normalité

Propriété :

Soit X une Variable Aléatoire qui suit la loi normale $N(\mu; \sigma^2)$.

Alors, on a :

- $P(X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]) = 0,683$
- $P(X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]) = 0,954$
- $P(X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]) = 0,997$

Remarque :

Il est important de noter que ces valeurs sont indépendantes de μ et de σ . Ces valeurs permettent de calculer mentalement des probabilités sans utiliser la calculatrice.

Exemple

Soit X une Variable Aléatoire qui suit la loi normale $N(175, 25^2)$.

Déterminer sans calculatrice $\Phi(125) = P(X \leq 125)$

Solution :

On remarque que $P(X \leq 125) = P(X \leq \mu - 2\sigma)$. On a donc à l'aide du graphique.

$$P(X \leq \mu - 2\sigma) = \frac{1 - 0,954}{2} \text{ soit donc } \Phi(125) = 0,023$$

Attention :

Lorsqu'on utilise la TI82, il faut rentrer μ et σ bien que la loi s'appelle $N(\mu, \sigma^2)$

Exercice :

Avec la calculatrice, calculer les probabilités suivantes arrondies au millièmè :

2nde distrib L2 Z var 2 (c, d, μ, σ) soit **2:normalFRép** (c, d, μ, σ)

- X suit une $N(3, 5^2)$, alors $P(-2 \leq X \leq 8) = 0,6826894809$
- X suit une $N(7, 16)$, alors $P(9 \leq X \leq 10) = 0,082$
- X suit une $N(-3, 6^2)$, alors $P(X \leq 1) = 0,748$

Exercice :

A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre a tel que :

X suit une $N(175, 25^2)$ et $P(X \leq a) = 0,782$

Solution :

On utilise : **3:invNormale** $(0.782, 175, 25)$. On obtient $a = 194,47$