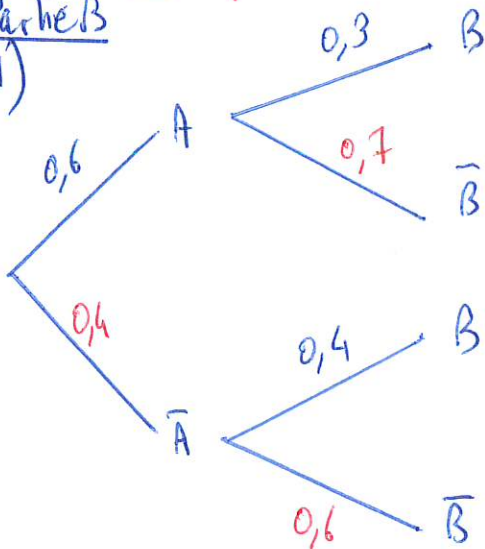


Me'hropole 52

Exercice 1: 5pts

Partie B

1)



$$2) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times \frac{P(\bar{B})}{A}$$

$$= 0,4 \times 0,6$$

$$\underline{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,24}$$

3) A l'aide de la formule des probabilités totales

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(A) \times \frac{P(B)}{A} + P(\bar{A}) \times \frac{P(B)}{\bar{A}}$$

$$= 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4$$

$$\underline{P(B) = 0,34}$$

4) On inverse le conditionnement

$$\frac{P(\bar{A})}{\bar{B}} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$= \frac{0,24}{1 - 0,34}$$

$$\underline{\frac{P(\bar{A})}{\bar{B}} = \frac{4}{11}}$$

5a) Il s'agit d'une répétition d'épreuves identiques et indépendantes à 2 issues contraires notées succès et échec. Un succès est ici que la personne meurt pas. X est la VAR qui compte le nombre de succès.

$$X \sim B(100; 0,24)$$

b) On cherche $P(X > 20) = 1 - P(X \leq 19)$. $\underline{P(X > 20) \approx 0,855}$

c) $E(X) = np$ $E(X) = 100 \times 0,24$

$$\underline{E(X) = 24}$$

Partie B :

On a $T = T_1 + T_2$

1) $E(T) = E(T_1) + E(T_2)$ car E est linéaire

$$\underline{E(T) = 100}$$

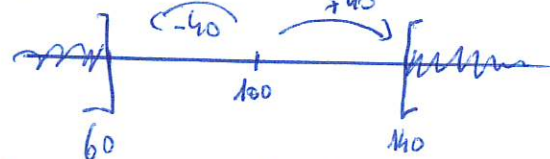
2) Puisque T_1 et T_2 sont indépendantes,

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2)$$

$$= 10^2 + 11^2$$

$$\underline{V(T) = 356}$$

3) On construit la situation



D'après l'inégalité de Bienaymé Tchebychev -

$$\forall \epsilon > 0 \quad P(|T - E(T)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(T)}{\epsilon^2} \quad \text{Avec } \epsilon = 40$$

Avec l'événement contraire

$$P(|T - E(T)| \geq 40) \leq 0,2225$$

$$P(|T - 100| < 40) \geq 0,7775 \geq 0,77$$

Exercice 2 5pts

Partie A

1) On exhibe les vecteurs directeurs.

$$\vec{u}_d (2; 1; -1)$$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

$$\vec{u}_{d'} (1; 1; -2)$$

droites sécantes ou non coplanaires

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + 2t = s \\ 2 + t = \frac{3}{2} + s \\ 3 - t = 3 - 2s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{3}{2} + 2t \\ 2 + t = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 2t \\ 3 - t = 3 - 2(\frac{3}{2} + 2t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{3}{2} + 2t \\ t = -1 \\ 3t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -\frac{1}{2} \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Les droites sont sécantes en $S(-\frac{1}{2}; 1; 4)$

2) $\vec{AB} (2; -3; 1)$

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires

a) $\vec{AC} (2; -1; 0)$

$$\vec{m} \cdot \vec{AB} = 2 - 6 + 4 = 0$$

$$\vec{m} \cdot \vec{AC} = 2 - 2 + 0 = 0$$

$\vec{m}$ normal à ABC

b) $\Pi(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM}, \vec{m} = 0$

$$\vec{AM} (x+1; y-2; z-1)$$

$$1(x+1) + 2(y-2) + 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(ABC): x + 2y + 4z - 7 = 0$$

c) A, B et C sont coplanaires. On injecte les coordonnées de S.

$$-\frac{1}{2} + 2 \times 1 + 4 \times 4 - 7 = -\frac{1}{2} + 11$$

$S \notin (ABC)$. Points non coplanaires

3) a) on vérifie que $H \in (ABC)$ $-1 + 2 \times 0 + 4 \times 2 - 7 = 7 - 7$

$$\vec{HS} (\frac{1}{2}; 1; +2) \text{ et } \vec{m} (1; 2; 4) \text{ Ainsi } \vec{m} = 2\vec{HS}$$

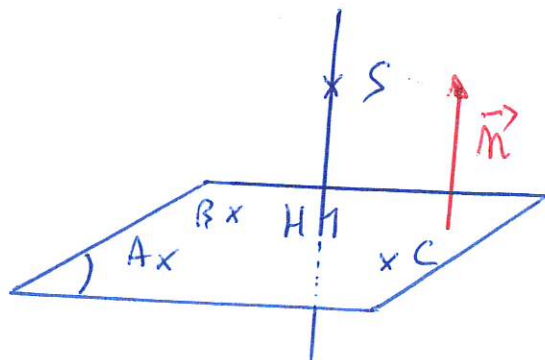
Met le projeté orthogonal de S sur (ABC)

b) on calcule $\|\vec{HS}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 4}$

$$\|\vec{HS}\| = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$\frac{\sqrt{21}}{2}$ est la plus petite distance entre S et le plan (ABC)

Il n'existe aucun point de (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$



- Partie B: M tel que $\vec{CM} = k\vec{CS}$ $k \in [0, 1]$ $C(1; 1; 1)$
 $S(-\frac{1}{2}; 1; 4)$
- 1) $\vec{CM}(x-1; y-1; z-1)$ $\begin{cases} x-1 = -\frac{3}{2}k \\ y-1 = 0 \\ z-1 = 3k \end{cases}$ $M(1-\frac{3}{2}k; 1; 1+3k)$
 $\vec{CS}(-\frac{3}{2}; 0; 3)$ $k \in [0, 1]$
- 2) MAB rectangle en M $\Leftrightarrow \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ $A(-1; 2; 1)$
 $\Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$ $B(1; -1; 2)$
- $\vec{AM}(2-\frac{3}{2}k; -1; 3k)$
 $\vec{BM}(-\frac{3}{2}k; 2; -1+3k)$
- $-\frac{3}{2}k(2-\frac{3}{2}k) - 2 + 3k(-1+3k) = 0$
 $-3k + \frac{9}{4}k^2 - 2 - 3k + 9k^2 = 0$
 $\frac{45}{4}k^2 - 6k - 2 = 0 \Leftrightarrow 45k^2 - 24k - 8 = 0$
- $\Delta > 0$, Il existe deux points potentiels $\Delta \begin{cases} k_1 \approx 0,77 \\ k_2 \approx -0,23 \end{cases}$ 1 seul point

Exercice 3: 4 pts

1) $u_n = \frac{1+5^n}{2+3^n}$ $u_n = \left(\frac{5}{3}\right)^n \times \frac{\frac{1}{5^n} + 1}{\frac{2}{3^n} + 1}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ car $\frac{5}{3} > 1$
FAUSSE

2) $\begin{cases} w_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3 \end{cases}$

On conjecture à la Calculatrice. $\forall n \in \mathbb{N}, P_n: w_n \geq n$

Initialisation: pour $n=0$ $w_0=0$ P_0 est vraie. La propriété est initialisée.

Hérédité: Je suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie et je veux montrer $P_{n+1}: w_{n+1} \geq n+1$ (?)

On sait que $w_n \geq n$
 $3w_n \geq 3n$
 $3w_n - 2n \geq n$
 $3w_n - 2n + 3 \geq n+3$
 $w_{n+1} \geq n+3 \geq n+1$

P_{n+1} est vraie.
 La propriété est héréditaire.

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq n$

VRAIE

3) en A, la Tangente est située au dessus de la courbe
 en 1, la Tangente est située en dessous de la courbe.
 la courbe tourne sa concavité au moins une fois

FAUSSE

4) Soit $f(x) = \ln x$, $\forall x > 0$.
 $f'(x) = \frac{1}{x}$

$T_1: y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$T_1: y = x - 1$

$\forall x > 0 \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$x \mapsto \ln x$ est concave sur $]0, +\infty[$
 f est située en dessous de ses tangentes

$\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$

$\ln x - x + 1 \leq 0$

VRAIE

Exercice 4: 6 pts

Partie A: lecture graphique

1) $d(2) = 15$

2) 23 m

3) $d'(4,7) = \frac{21-16,3}{4,7-0}$

$d'(4,7) \approx 1$

coefficient directeur

A(4,7,21)
 B(0,16,3)

Partie B:

(E): $y' + 0,6y = e^{-0,6t}$ (E'): $y' + 0,6y = 0$

1) a) les solutions de (E') sont: $\forall t \geq 0, y(t) = C e^{-0,6t}$, $C \in \mathbb{R}$

b) $\forall t \geq 0, g(t) = t e^{-0,6t}$ g est de la forme uv avec $u(t) = t$ $v(t) = e^{-0,6t}$
 $\forall t \geq 0, g'(t) = e^{-0,6t}(1 - 0,6t)$ $u'(t) = 1$ $v'(t) = -0,6e^{-0,6t}$

$g'(t) + 0,6g(t) = e^{-0,6t}(1 - 0,6t) + 0,6t e^{-0,6t}$
 $= e^{-0,6t}$

g est une solution de (E)

c) Par somme, les solutions de (E) sont: $\forall t \geq 0, f(t) = C e^{-0,6t} + t e^{-0,6t}$, $C \in \mathbb{R}$

d) avec la condition initiale, $f(0) = 12 \Leftrightarrow 12 = C + 0 \Leftrightarrow C = 12$
 $\forall t \in \mathbb{R}, v(t) = (12 + t) e^{-0,6t}$

2 a) v est de la forme uv . $v'(t) = 1 e^{-0,6t} + (12+t)(-0,6e^{-0,6t})$
 $\forall t \geq 0, v'(t) = (-6,2 - 0,6t) e^{-0,6t}$

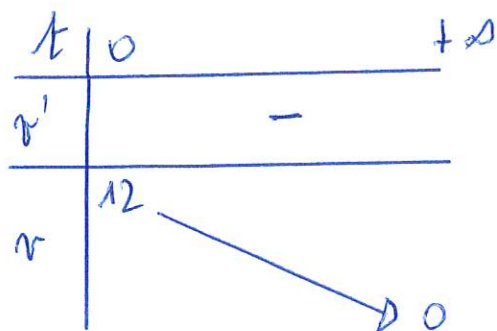
b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,6t}{e^{0,6t}} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{T}{e^T} = 0$ (croissances comparées)

$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,6t} = 0$

Par somme, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$

c) On étudie le signe de $-6,2 - 0,6t$

$$-6,2 - 0,6t > 0 \Leftrightarrow t < \frac{-6,2}{0,6} \Leftrightarrow t < -\frac{31}{3}$$



- d) sur $]0, +\infty[$,
- v est continue
 - v est décroissante
 - $v(0) > 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) < 1$
- 1 est donc une valeur intermédiaire

D'après le corollaire du TVI, l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution notée α .

Avec la lecture graphique de la 1^{ère} partie $\alpha \approx 4,7$.

3) Avec la question précédente, c'est au bout de 4,69 secondes.

Partie C:

1) $d(t) = \int_0^t v(x) dx$

$$= \int_0^t (12+x) e^{-0,6x} dx$$

$$= \left[\frac{12+x}{-0,6} e^{-0,6x} \right]_0^t + \frac{1}{0,6} \int_0^t e^{-0,6x} dx$$

$$= e^{-0,6t} \frac{12+t}{-0,6} + 20 - \frac{1}{0,6^2} \left[e^{-0,6x} \right]_0^t$$

$$= e^{-0,6t} \frac{12+t}{-0,6} + 20 - \frac{e^{-0,6t}}{0,6^2} + \frac{1}{0,6^2}$$

$$= e^{-0,6t} \left(\frac{-1}{0,6^2} - \frac{12}{0,6} - \frac{t}{0,6} \right) + \frac{205}{9}$$

$$\underline{d(t) = e^{-0,6t} \left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9} \right) + \frac{205}{9}}$$

$\Rightarrow \begin{cases} u(t) = 12+t \\ u'(t) = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} v(t) = \frac{e^{-0,6t}}{-0,6} \\ v'(t) = e^{-0,6t} \end{cases} \quad \text{I}$

2) On calcule $d(4,69)$. On obtient $d(4,69) \approx 20,94 \text{ m}$