CORRECTION EVALUATION SUR PRIMITIVES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLE

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET B

Exercice 1 : / 4 pts

Pour chacune des fonctions ci-dessous déterminer une primitive.

- $f(x) = 6x^5 - 2x + 13$
- $f(x) = x^6 - x^2 + 13x$
- $f(x) = \frac{1}{x^5} - \frac{6}{x} + \frac{\pi}{2}$
- $f(x) = \frac{-1}{4x^4} - 6ln\,(x) + \frac{\pi}{2}x$
- $f(x) = (x+5)(x-3)$
- $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 15x$
- $f(x) = -e^x + 15$
- $f(x) = -e^x + 15x$

Exercice 2 : / 6 pts

Déterminer une primitive des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ si cela est possible.

- $f(x) = 6xe^{-7x^2+2}$
- $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+3x+9}$
- $f(x) = cos(x)\,sin^6(x)$
- $f(x) = \frac{2x+7}{(x^2+7x+30)^4}$
- $f(x) = \frac{6x+1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$
- $f(x) = \frac{-3sin\,(5x)}{2+cos\,(5x)}$

Correction :

Il faut ajuster les fonctions afin de les faire rentrer dans les formules :

- $f(x) = 6xe^{-7x^2+2}$ est de la forme $u'e^u$ avec $u(x) = -7x^2 + 2$ et $u'(x) = -14x$
  $F(x) = \frac{-3}{7}e^{-7x^2+2}$
- $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+3x+9}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 9$ et $u'(x) = 2x + 5$
  On ne peut pas trouver de primitive pour f
- $f(x) = cos(x)\,sin^6(x)$ est de la forme $u'u^6$ avec $u(x) = sin\,(x)$ et
  $u'(x) = cos(x)$ On a donc $F(x) = \frac{sin^7(x)}{7}$
- $f(x) = \frac{2x+7}{(x^2+7x+30)^4}$ est de la forme $\frac{u'}{u^4}$ avec $u(x) = x^2 + 7x + 30$ et
  $u'(x) = 2x + 7$ on a donc $F(x) = \frac{-1}{3}\frac{1}{(x^2+7x+30)^3}$
- $f(x) = \frac{6x+1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$ est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 3x^2 + x + 1$ et $u'(x) = 6x + 1$
  On a donc $F(x) = 2\sqrt{3x^2 + x + 1}$
- $f(x) = \frac{-3sin\,(5x)}{2+cos\,(5x)}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 2 + cos\,(5x)$ et
  $u'(x) = -5si\,n(5x)$
  $F(x) = \frac{3}{5}ln\,(2 + cos(5x))$

Exercice 3 : / 1,5 pt

Soit la fonction définie sur $]-\infty\,; 3[\, \cup\,]3\,; +\infty[$ par $f(x) = \frac{18}{(x-3)^3}$

Démontrer que $F(x) = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$ est une primitive de f sur $]-\infty\,; 3[\, \cup\,]3\,; +\infty[$.

Correction :

Il suffit de dériver l'expression de F et de vérifier si on retombe sur f.
$F(x) = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}$ est de la forme $\frac{u}{v}$
On dérive alors le quotient :
$F(x) = \frac{(x-3)^2(2x-6)-2(x-3)(x^2-6x)}{(x-3)^4}$ On factorise alors par $(x-3)$ et on réduit
$F'(x) = \frac{18}{(x-3)^3}$

Exercice 4 : / 1,5 pt

Déterminer la primitive de la fonction $f(x) = 4x^3 - 6x + 1$qui s'annule en 2.

Correction :

On détermine toutes les primitives de f
$F(x) = x^4 - 3x^2 + x + k$ puis on évalue $F(2) = 0$
$F(2) = 6 + k$ soit donc $F(x) = x^4 - 3x^2 + x - 6$

Exercice 5 : / 2 pt

Résoudre $(E): y' = y + 1$ avec une condition initiale notée $y(0) = 1$

Correction :
On souhaite résoudre $(E): y' = y + 1$ avec une condition initiale notée $y(0) = 1$
On reconnait l'équation étudiée dans le cours. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^x - 1$ avec $C \in \mathbb{R}$
Puisque $f(0) = 1$, on a : $Ce^0 - 1 = 1$ soit $C = 2$.
On a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2e^x - 1$

Exercice 6 : / 2 pts

Soit la fonction $f(x) = 4xe^{2x-1}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer les réels a et b tels que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax + b)e^{2x-1}$ soit une primitive de la fonction f.

Correction :

On dérive l'expression de F qui est un produit de fonctions composées, dérivables sur $\mathbb{R}$
$F(x) = (2ax + 2b + a)e^{2x-1}$
On identifie alors avec f.
$\begin{cases} 2a = 4 \\ 2b + a = 0 \end{cases}$ soit donc $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ donc $F(x) = (2x - 1)e^{2x-1}$

Exercice 7 : / 3 pts

Résoudre $(E): y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x$ avec une condition initiale notée $y(4) = 0$

Correction :

On souhaite résoudre $(E): y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x$ avec une condition initiale notée $y(4) = 0$
On recherche la solution particulière sous forme affine. On obtient $g(x) = x + 2$
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} + x + 2, C \in \mathbb{R}$. On détermine la constante à l'aide de la condition initiale. $y(4) = 0 \Leftrightarrow Ce^2 + 4 + 2 = 0 \Leftrightarrow C = \frac{-6}{e^2}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -6e^{\frac{1}{2}x-2} + x + 2$