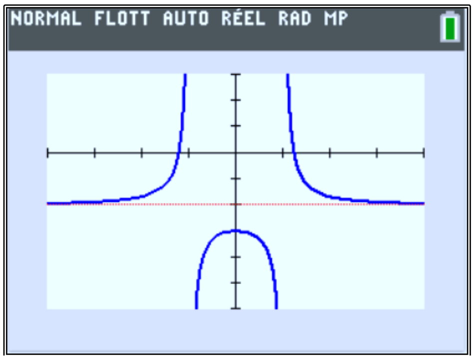
CORRECTION EVALUATION SUR LIMITES DE FONCTION

Exercice 1 : *lecture graphique* / 4 pts

On donne la représentation graphique d'une fonction *f*.
Construire le tableau de variations en prenant soin de noter toutes les limites.



Correction :

On construit le tableau complet des variations par lecture graphique

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-2

Exercice 2 : *Calculs de limites* / 8 pts

Déterminer les limites suivantes en donnant si elles existent les équations des asymptotes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^2+3x-1}{3-2x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 7e^{-x} + 2$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} sin(\frac{\pi x-1}{2x+3})$
- $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{-x^2+7x-11}{4-x^2}$

Correction :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^2+3x-1}{3-2x^2} = "FI"$ on factorise par le terme prépondérant

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^2+3x-1}{3-2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2(-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2(\frac{3}{x^2}-2)}$

  On évalue $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x^2}-2\right) = -2 \end{array}\right\}$ par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^2+3x-1}{3-2x^2} = \frac{1}{2}$ AH d'équation $y = \frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} sin(\frac{\pi x-1}{2x+3})$ On va utiliser la limite d'une fonction composée. Pour cela on

  factorise par le théorème prépondérant $\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{\pi x-1}{2x+3}) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{\pi-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}) = \frac{\pi}{2}$

  On a donc $\lim\limits_{x\to-\infty} sin(\frac{\pi x-1}{2x+3}) = \lim\limits_{\substack{x\\X\to\frac{\pi}{2}}} sin(X) = 1$ AH d'équation $y = 1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 7e^{-x} + 2 =$. Il n'y a pas de forme indéterminée ici.

  $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (3x^2) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (7e^{-x}) = 0 \end{array}\right\}$ par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 7e^{-x} + 2 = \infty$

- $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{-x^2+7x-11}{4-x^2}$ On évalue la limite du numérateur et du dénominateur.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(-x^2+7x-11)=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(4-x^2)=0^-\end{array}\right\}\text{ par quotient : }\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{-x^2+7x-11}{4-x^2}=+\infty\quad AV\ \ x=2$$

Exercice 3 : *Calculs de limites* / 3 pts

Déterminer les limites suivantes en donnant si elles existent les équations des asymptotes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sin(x)}{3-2x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+1}\frac{(1-2x)^2-1}{x-1}$

Correction :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sin(x)}{3-2x^2}$

  On va encadrer la fonction afin de pouvoir utiliser un théorème d'encadrement.
  $\forall x\in\mathbb{R}, -1\leq -\sin(x)\leq 1$ soit donc $\forall x\in\mathbb{R}, x-1\leq x-\sin(x)\leq x+1$
  On divise les inégalités par $3-2x^2$ qui est négatif au voisinage de $+\infty$
  Ainsi, pour x assez grand, , $\frac{x+1}{3-2x^2}\leq\frac{x-\sin(x)}{3-2x^2}\leq\frac{x-1}{3-2x^2}$
  On factorise afin de lever l'indétermination :

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-2x}\leq\frac{x-\sin(x)}{3-2x^2}\leq\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-2x}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-2x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-2x}\right)=0\end{array}\right\},\ \textit{théorème des gendarmes},\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sin(x)}{3-2x^2}=0\ AH\ \ y=0$$

- $\lim\limits_{x\to+1}\frac{(1-2x)^2-1}{x-1}=FI"\frac{0}{0}"$

Il y a plusieurs manières de déterminer la limite, le nombre dérivé par exemple.
Le plus simple ici est de développer le numérateur puis de le factoriser.

$$\frac{(1-2x)^2-1}{x-1}=\frac{4x^2-4x+1-1}{x-1}=\frac{4x(x-1)}{x-1}=4x$$

$\lim\limits_{x\to+1}\frac{(1-2x)^2-1}{x-1}=4$. Il n'y a pas d'asymptote.

Exercice 4 : *Croissances comparées* / 3 pts

Déterminer les limites suivantes en donnant si elles existent les équations des asymptotes :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+5x}{3-2x}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}-x+xe^x-3$

Correction :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+5x}{3-2x}=\text{"FI"}$

On factorise par le terme prépondérant

$$f(x)=\frac{e^x}{x}\times\frac{1+\frac{5x}{e^x}}{\frac{3}{x}-2}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)=+\infty\ (c.c)\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{5x}{e^x}}{\frac{3}{x}-2}\right)=\frac{-1}{2}\end{array}\right\},\ \textit{Par produit},\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+5x}{3-2x}=-\infty$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} -x + xe^x - 3$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0\ (c.c)\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x-3 = +\infty\end{array}\right\}, par\ somme,\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x + xe^x - 3 = +\infty$$

Exercice 5: *Tableau de variation* / 4 pts

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = x + 3 + \frac{9}{x-1}$

1) Montrer que C_f admet une asymptote verticale.
2) Montrer que C_f admet une asymptote oblique.
3) Déterminer la dérivée de f et construire le tableau complet des variations.

Correction :

1) On évalue la limite au voisinage de la valeur interdite.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x+3 = 4\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{9}{x-1} = +\infty\end{array}\right\}, par\ somme, \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x+3+\frac{9}{x-1} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x+3 = 4\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} \dfrac{9}{x-1} = -\infty\end{array}\right\}, par\ somme, \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x+3+\frac{9}{x-1} = -\infty$$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe.

2) On note $d(x) = f(x) - (x+3)$
   On a donc $d(x) = \frac{9}{x-1}$
   $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{9}{x-1} = 0$ La droite $y = x + 3$ est asymptote oblique à la courbe.

3) f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ en tant que somme de fonctions dérivables.
   $f'(x) = 1 - \frac{9}{(x-1)^2}$ soit en mettant au même. Dénominateur :
   $f'(x) = \frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$ que l'on factorise $f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

   On construit alors le tableau de variation sur $\mathbb{R} - \{1\}$

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	10	↗	$+\infty$