CORRECTION EVALUATION SUR DROITES ET PLANS

Exercice 1 : / 3 pts

On considère trois points de l'espace A, B et C non alignés. On définit deux points M et N par :

- $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$

1) Exprimer $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) En déduire que les points M, C et N sont alignés.

Correction :

1) On utilise la relation de Chasles afin d'obtenir la combinaison linéaire.
$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$
$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
De la même manière,
$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN}$
$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

2) On remarque que $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CM}$
Les vecteurs sont colinéaires avec un point en commun, les trois points sont donc alignés.

Exercice 2 : / 2 pts

L'espace est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On donne les points $A(-1; 2; -3)$, $B(5; 4; 2)$, et $C(-9; 2; -10)$. Calculer :

1) Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
2) Les coordonnées de I, milieu de $[BC]$.
3) Les coordonnées de $3\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{BA}$

Correction :

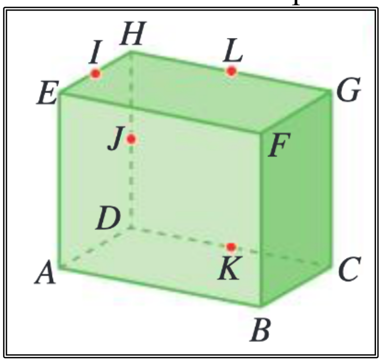
On écrit les points dans la marge en colonne afin d'appliquer sereinement les formules.

1) $\overrightarrow{AB}(6; 2; 5)$
2) On a $I(-2; 3; -4)$
3) On évalue $\overrightarrow{CB}(14; 2; 12)$. Ainsi $3\overrightarrow{CB}(42; 6; 36)$ et $-2\overrightarrow{BA}(12; 4; 10)$
On a donc $3\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{BA}(54; 10; 46)$

Exercice 3 : / 3 pts

On considère le parallélépipède rectangle ci-contre. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$, $[DH]$, $[DC]$, et $[GH]$.

1) Que peut-on dire des droites (IJ) et (FL) ?
2) Que peut-on dire des droites (IL) et (AC) ?
3) Que peut-on dire de la droite (IJ) et du plan (GCF) ?
4) Que peut-on dire de la droite (FG) et du plan (LJK) ?



Correction :

1) Les droites sont non coplanaires. (IJ) est sur la face latérale, (FL) sur la face du dessus. Elles n'ont pas de point commun car c'est (FL) qui est à l'intersection de ces deux faces.
2) Ces deux droites sont coplanaires. En effet, (IL) est parallèle à (EG), c'est la droite des milieux. De plus (EG) est parallèle à (AC). Grâce au théorème du toit, les droites sont parallèles.
3) La droite et le plan sont strictement parallèles. En effet, (IJ) est inclue dans le plan (EHD) parallèle au plan (GCF).
4) (FG) et (LJK) sont sécants (la droite est même perpendiculaire au plan). G est inclus dans le plan et appartient à la droite.

Exercice 5 : / 2 pts

Considérons les droites : $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + 2t \\ z = 2 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{D}')$: $\begin{cases} x = 1 + 6k \\ y = -4 - k \\ z = 7 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Étudier l'intersection des deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$, si elle existe.

Correction :

On exhibe un vecteur directeur de chaque droite afin de vérifier leur colinéarité. On a donc : $\vec{u}(3; 2; -5)$ et $\vec{v}(6; -1; 1)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Les deux droites sont donc sécantes ou non coplanaires. On résout donc le système afin de déterminer l'intersection.
$\begin{cases} 1 + 6k = 1 + 3t \\ -4 - k = -3 + 2t \\ 7 + k = 2 - 5t \end{cases}$, système de trois équations à 2 inconnues. On isole une inconnue et on remplace dans les 2 équations : $\begin{cases} 2k = t \\ -4 - k = -3 + 4k \\ 7 + k = 2 - 10k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2k \\ k = \frac{-1}{5} \\ k = \frac{-5}{11} \end{cases}$. Le système est donc incompatible. Les droites sont non coplanaires.

Exercice 6 : / 2 pts

Étudier l'intersection des deux droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$, si elle existe.

$(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x = 6 - t \\ y = 5 - 3t \\ z = 5 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ et $(\mathcal{D}')$: $\begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = -1 + k \\ z = 1 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Correction :

On exhibe un vecteur directeur de chaque droite afin de vérifier leur colinéarité. On a donc : $\vec{u}(-1; -3; 2)$ et $\vec{v}(3; 1; 2)$. Ces deux vecteurs ne peuvent pas être colinéaires.
Les deux droites sont donc sécantes ou non coplanaires. On résout donc le système :

$$\begin{cases} 6 - t = -4 + 3k \\ 5 - 3t = -1 + k \\ 5 + 2t = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ k = 3 \end{cases}$$

Les équations sont compatibles. Les droites ont un point d'intersection et sont sécantes en un point $A(5; 2; 7)$

Exercice 7 : / 2 pts

On donne le point $A(5; 3; -8)$ et les vecteurs $\vec{u}(1; 2; 4)$ et $\vec{v}(1; -1; -1)$
Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}(A; \vec{u}; \vec{v})$

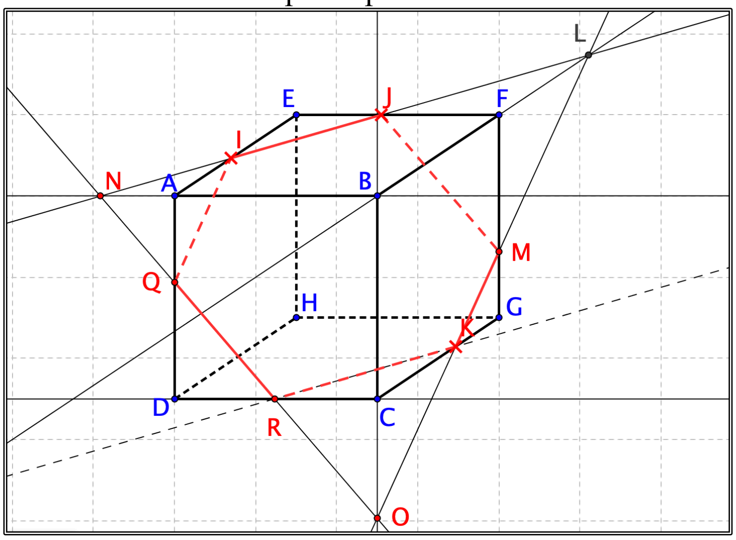
Correction :

On vérifie d'abord que les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, ce qui n'est pas le cas en regardant les deux premières coordonnées de chaque vecteur.
On a donc simplement l'équation paramétrique du plan :

$$\mathcal{P}(A;\vec{u};\vec{v}):\begin{cases} x = 5 + 1t + k \\ y = 3 + 2t - k \\ z = -8 + 4t - 1k \end{cases}, t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$$

Exercice 8 : / 3 pts

Construire la section du cube ci-dessous par le plan.



On construit ci-dessous ce qu'il reste du cube après le passage de la machette.