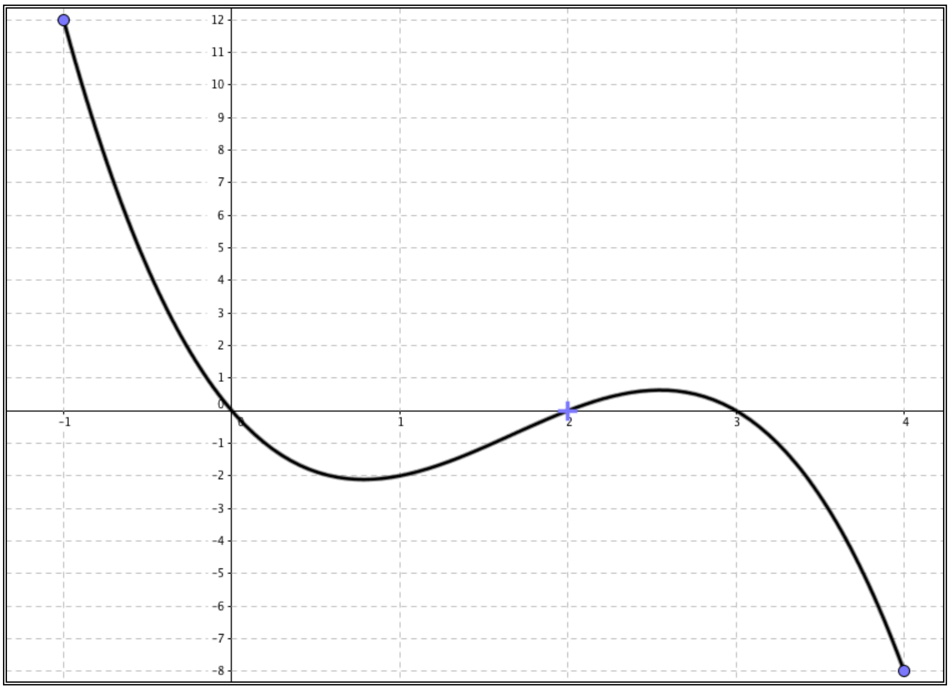
CORRECTION SUR LA CONTINUITE

Exercice 1: lecture graphique / 3 pts

La fonction f, définie sur $[-1;4]$, est connue par sa courbe représentative ci-dessous.
On peut lire, par exemple, sur la courbe que $f(2)=0$
Préciser ***le nombre de solutions*** de chaque équation ***en justifiant*** par une phrase.

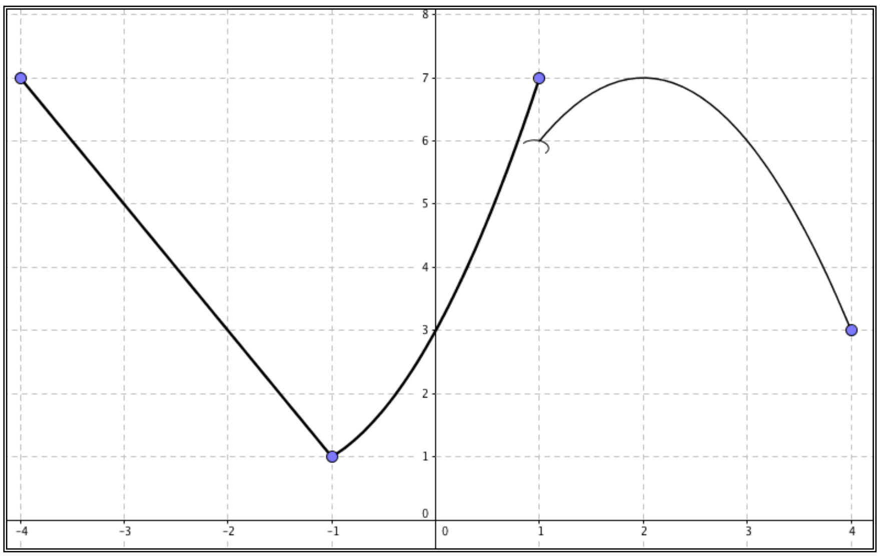
- $f(x)=5$
- $f(x)=-1$
- $f(x)=-10$



Correction :

- $f(x)=5$. En traçant la droite d'équation $y=5$, elle coupe la courbe en un seul point. Il n'y a donc qu'une seule solution.
- $f(x)=-1$ En traçant la droite d'équation $y=-1$, elle coupe la courbe en trois points. Il y a donc trois solutions à cette équation.
- $f(x)=-10$. L'image minimum vaut -8 Cette équation n'a donc aucune solution

Exercice 2 : /4 pts



Soit la fonction f définie par sa courbe représentative ci-dessus.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. ***Justifier.***(par une phrase)

1) La fonction *f* est continue sur $[-3;0]$.
2) $f(1)=5$
3) La fonction *f* est dérivable sur $[-4;1]$.
4) L'équation $f(x)=6$ admet 4 solutions sur $[-4;4]$

Correction :

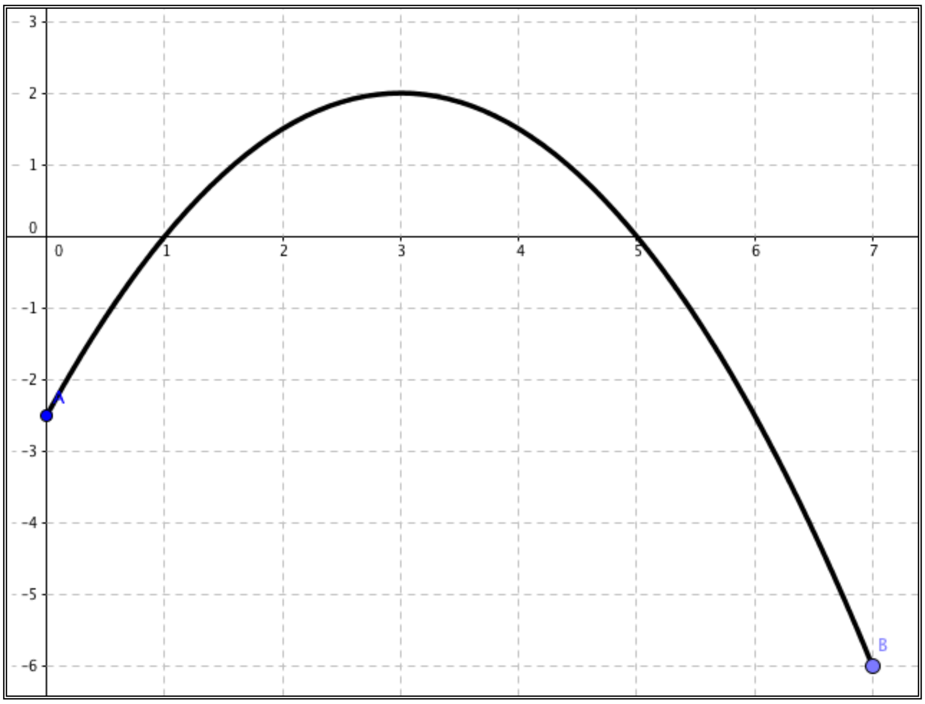
- La fonction *f* est continue sur $[-3;0]$. Vrai. La fonction ne présente pas de discontinuité sur l'intervalle même si elle n'est pas dérivable sur $[-3;0]$
- $f(1)=5$ Faux. Le point et la cédille indiquent que $f(1)=7$
- La fonction *f* est dérivable sur $[-4;1]$. Faux. La courbe représentative de la fonction est composée d'un morceau de droite et d'un morceau de parabole. Elle n'est donc pas dérivable au point d'abscisse -1 et donc pas non plus sur $[-4;1]$.
- L'équation $f(x)=6$ admet 4 solutions sur $[-4;4]$. Faux. La droite d'équation $y = 6$ ne coupe la courbe représentative qu'en trois points.

Exercice 3 : / 5pts

Soit *f* une fonction dérivable sur l'intervalle $[0;7]$

On donne ci-dessous la courbe représentative de la ***fonction f'***, dérivée de *f*.

1) Dresser le tableau de variation de *f* en s'aidant de la courbe ci-dessous.
2) A l'aide d'information lue sur la courbe, donner l'équation de la tangente à courbe représentative de *f* au point d'abscisse 3 sachant que $f(3)=1$



Correction :

Tableau de variation :

x	0	1	5	7
$f'(x)$	-	+	-	
f	↘	↗	↘	

Equation de la tangente :

$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Ici, $f(3) = 1$ et graphiquement, on lit : $f'(3) = 2$.

On remplace alors : $T : y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$T : y = 2(x-3) + 1$ Soit alors : $T : y = 2x - 5$

Exercice 4 : / 5 pts

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 20x + 12$

1) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α, localisée dans l'intervalle $[-6; -5]$.
3) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Correction :

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

$f'(x) = 6x^2 + 14x - 20$

On détermine avec le discriminant les racines de la dérivée:

On obtient. $\Delta = 196 + 480 = 676$

Il y a deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{-10}{3}$

x	$-\infty$		-10/3		1		$+\infty$
$f'(x)$		+		-		+	
f		↗	2224/27	↘	1	↗	

Sur $\left[\frac{-10}{3}; \infty\right[$, f admet 1 pour minimum donc l'équation n'admet pas de solution.

Sur $\left]-\infty; \frac{-10}{3}\right]$,

- f est continue.
- f est strictement croissante.
- $f(\frac{-10}{3}) > 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) < 0$ donc 0 est une valeur intermédiaire.

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

On utilise la méthode par balayage afin d'obtenir des encadrements successifs.

Encadrement à l'unité : $-6 \leq \alpha \leq -5$

Encadrement au dixième : $-5,6 \leq \alpha \leq -5,5$

Encadrement au centième : $-5,52 \leq \alpha \leq -5,51$

Donc on obtient la valeur approchée de α au centième : $\alpha \approx -5,52$

Exercice 5: / 3 pts

a et b désignent deux nombres réels.
f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;10]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 1 \quad si \quad x \in [0;3] \\ f(x) = ax + b \quad si \quad x \in]3;6] \\ f(x) = -x^2 + 56 \quad si \quad x \in]6;10] \end{cases}$$

Déterminer par le calcul (à l'aide d'un système) les valeurs des réels a et b pour lesquelles la fonction f est continue sur l'intervalle $[0;10]$

Correction :

On calcule l'image de 3 avec les deux expressions :
$f(3) = 10$ et $f(3) = 3a + b$ soit alors l'équation : $3a + b = 10$
On calcule l'image de 6 avec les deux expressions :
$f(6) = 20$ et $f(6) = 6a + b$ soit alors l'équation : $6a + b = 20$

On résous alors le système : $\begin{cases} 6a + b = 20 \\ 3a + b = 10 \end{cases}$

On utilise la méthode par substitution ou la méthode par combinaison linéaire :

$\begin{cases} 3a = 10 \\ 3a + b = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \dfrac{10}{3} \\ 3 \times (\dfrac{10}{3}) + b = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} a = \dfrac{10}{3} \\ b = 0 \end{cases}$ Donc $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \; si \; x \in [0;3] \\ \frac{10}{3}x \; si \; x \in]3;6] \\ -x^2 + 56 \; si \; x \in]6;10] \end{cases}$