CORRECTION EVALUATION SUR LE CALCUL INTEGRAL

Exercice 1 : / 3 pts

Calculer les intégrales basiques ci-dessous.

- $\int_0^2 3x^2 - 6x + 1dx$
- $\int_{-1}^1 x^3 - 2xdx$

Correction :

$$A = \int_0^2 3x^2 - 6x + 1dx$$
$$A = [x^3 - 3x^2 + x]_0^2$$
$$A = 8 - 12 + 2 - 0$$
$$A = -2$$

$$B = \int_{-1}^1 x^3 - 2xdx$$
$$B = \left[\frac{x^4}{4} - x^2\right]_{-1}^1$$
$$B = \frac{1}{4} - 1 - \left(\frac{1}{4} - 1\right)$$
$$B = 0$$

Exercice 2 : / 6 pts

Calculer les intégrales ci-dessous en utilisant des fonctions composées.

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{sin(x)+2}dx$
- $\int_{ln(2)}^{ln(3)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$
- $\int_0^2 e^{-4x+8}dx$
- $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x+1)^2dx$

Correction :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos(x)}{sin(x) + 2}dx$$
$$A = [ln(sin(x) + 2)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$A = ln(1 + 2) - ln(0 + 2)$$
$$A = ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$C = \int_0^2 e^{-4x+8}dx$$
$$C = -\frac{1}{4}[e^{-4x+8}]_0^2$$
$$C = -\frac{1}{4}(e^0 - e^8)$$
$$C = \frac{e^8 - 1}{4}$$

$$B = \int_{ln(2)}^{ln(3)} \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}}dx$$
$$B = \left[2\sqrt{e^x + 1}\right]_{ln(2)}^{ln(3)}$$
$$B = 2\sqrt{e^{ln(3)} + 1} - 2\sqrt{e^{ln(2)} + 1}$$
$$B = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3}$$
$$B = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$D = \int_0^1 (x + 1)(x^2 + 2x + 1)^2dx$$
$$D = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^2 + 2x + 1)^3}{3}\right]_0^1$$
$$D = \frac{1}{2}\left[\frac{(4)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3}\right]_0^1$$
$$D = \frac{63}{6}$$
$$D = 10{,}5$$

Exercice 3 : / 3 pts

Calculer les intégrales ci-dessous en utilisant la technique de l'intégration par partie.

- $\int_1^e x^2 ln(x)dx$
- $\int_0^1 xe^{2x}dx$

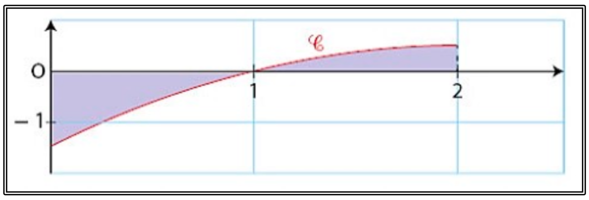
Correction :

$$A = \int_1^e x^2 ln(x)dx$$
$$A = \left[\frac{x^3}{3} ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx$$
$$A = \frac{e^3}{3} ln(e) - 0 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e$$
$$A = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}$$
$$A = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

$$B = \int_0^1 xe^{2x}dx$$
$$B = \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx$$
$$B = \frac{e^2}{2} - 0 - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1$$
$$B = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$
$$B = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Exercice 4 : / 3 pts

Soit f la fonction définie sur $[0; 2]$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$
La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est tracée dans le repère ci-contre.



Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en unité d'aire, de la surface grisée.

Correction :

On doit exprimer l'aire, donc positive.

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \left|-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}\right| dx$$
$$\mathcal{A} = -\int_0^1 -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} dx + \int_1^2 -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} dx$$
$$\mathcal{A} = -\left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x\right]_1^2$$
$$\mathcal{A} = -\left(-\frac{1}{6} + 1 - \frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{8}{6} + 4 - 3\right) - \left(-\frac{1}{6} + 1 - \frac{3}{2}\right)$$
$$\mathcal{A} = 1\, u.a$$

Exercice 5 : / 2 pts

Déterminer la valeur moyenne de la fonction exponentielle sur $[ln(2); ln(6)]$

Correction :

On doit donc calculer l'intégrale $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

$$\mu = \frac{1}{ln(6) - ln(2)}\int_{ln(2)}^{ln(6)} e^x dx$$

$$\mu = \frac{1}{ln(3)}[e^x]_{ln(2)}^{ln(6)}$$

$$\mu = \frac{1}{ln(3)}\left(e^{ln(6)} - e^{ln(2)}\right)$$

$$\mu = \frac{4}{ln(3)}$$

Exercice 6 : / 3 pts

Soient les fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$

1) On pose $I_1 = \int_0^1 f(x)dx$. Donner la valeur exacte de I_1.
2) Soit $I_2 = \int_0^1 g(x)dx$. Calculer la valeur exacte de $I_1 + I_2$.
3) En déduire la valeur exacte de I_2.

Correction :

1) On doit évaluer l'intégrale donnée.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$I_1 = \left[\frac{1}{2}ln(1+x^2)\right]_0^1$$

$$I_1 = \frac{1}{2}ln(2)$$

2) On va utiliser la linéarité de l'intégrale.

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$$

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} + \frac{x^3}{1+x^2}dx$$

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2}dx$$

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 x\, dx$$

$$I_1 + I_2 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2}$$

3) Par soustraction, on obtient alors la valeur de I_2

$$I_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln(2)$$