CORRECTION EVALUATION SUR LES SUITES

NOM :…………………………………… PRENOM :……………………… SUJET D

Exercice 1 : *Calcul de limites* / 9 pts

Calculer au voisinage de l'infini les limites des suites suivantes en expliquant votre démarche.

- $u_n = -8n^2 - 10n + 70$
- $u_n = \frac{n^3+4n+12}{-7n+12}$
- $u_n = cos\left(\frac{\pi n-5}{3+2n}\right)$
- $u_n = \sqrt{4n^2+3} - 2n$
- $u_n = 2n^2 + 5n + (-1)^n$
- $u_n = 5 - \frac{sin\,(n)}{\sqrt{n}}$

Solution :

- Pour $u_n = -8n^2 - 10n + 70$, On a

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to\infty} -8n^2 = -\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty}(-10n+70) = -\infty\end{array}\right\} Par\ somme, \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$$

- Pour $u_n = \frac{n^3+4n+12}{-7n+12}$, On a : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = "FI"$

On factorise alors par le terme prépondérant au numérateur et au dénominateur

$u_n = \frac{n^3(1+\frac{4}{n^2}+\frac{12}{n^3})}{n(-7+\frac{12}{n})}$ soit en simplifiant $u_n = \frac{n^2(1+\frac{4}{n^2}+\frac{12}{n^3})}{(-7+\frac{12}{n})}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to\infty}(-7+\frac{12}{n}) = -7 \\ \lim\limits_{n\to\infty} n^2(1+\frac{4}{n^2}+\frac{12}{n^3}) = \infty\end{array}\right\} Par\ quotient, \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$$

- Pour $u_n = cos\left(\frac{\pi n-5}{3+2n}\right)$

On utilise la limite d'une fonction composée, avec $u_n = cos(v_n)$ en posant alors $v_n = \frac{\pi n-5}{3+2n}$. On reconnait une forme indéterminée. On factorise par le terme prépondérant : $v_n = \frac{\pi-\frac{5}{n}}{\frac{3}{n}+2}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to\infty}(\pi-\frac{5}{n}) = \pi \\ \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{3}{n}+2) = 2\end{array}\right\} Par\ quotient, \lim_{n\to\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to\infty} cos\left(\frac{\pi n-5}{3+2n}\right) = \lim\limits_{X\to\frac{\pi}{2}} cos(X) = 0$

- Pour $u_n = \sqrt{4n^2+3} - 2n$, On a : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = "FI"$

On utilise l'expression conjuguée afin de lever l'indétermination.

$u_n = \frac{(\sqrt{4n^2+3}-2n)(\sqrt{4n^2+3}+2n)}{(\sqrt{4n^2+3}+2n)}$ soit $u_n = \frac{3}{(\sqrt{4n^2+3}+2n)}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to\infty} 3 = 3 \\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3}+2n\right) = +\infty\end{array}\right\} Par\ quotient, \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

- Pour $u_n = 2n^2 + 5n + (-1)^n$, on utilise un encadrement afin de déterminer la limite.

$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1$ soit alors $\forall n \in \mathbb{N}, 2n^2 + 5n - 1 \leq u_n \leq 2n^2 + 5n + 1$

On utilise le théorème de comparaison (ou de l'ascenseur) en ne conservant que la suite minorante.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to\infty} 2n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty}(5n-1) = +\infty\end{array}\right\} Par\ somme, \lim\limits_{n\to\infty}\ 2n^2+5n-1 = +\infty$$

Ainsi, on a donc , $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

On rappelle que la suite majorante n'a aucune influence sur le résultat.

- Pour $u_n = 5 - \frac{sin\ (n)}{\sqrt{n}}$, on va également procéder à un encadrement.

  $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq sin\ (n) \leq 1$ soit en construisant, $\forall n \in \mathbb{N}, 5 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq 5 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{n\to\infty}, 5 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 5 \\ \lim\limits_{n\to\infty}, 5 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 5\end{array}\right\} Par\ le\ théorème\ des\ gendarmes, \lim\limits_{n\to\infty}\ u_n = 5$$

Exercice 2 : *Problème classique* /7 pts

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases}\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0{,}5u_n + 2 \\ u_0 = 5\end{cases}$

1) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4$
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -0{,}5u_n + 2$
3) En déduire le sens de variation de (u_n).
4) (u_n) est-elle convergente ?

Correction :

1) On raisonne par récurrence :$\forall n \geq 3, P_n$:, $u_n \geq 4$

   Initialisation :

   Puisque $u_0 = 5$, on a bien $u_0 \geq 4$
   On a donc que **_P_0 est vraie. La propriété est initialisée._**

   Hérédité :

   Je suppose qu'il existe un entier n tel que P_n soit vraie et je veux montrer que P_{n+1} est vraie, c'est à dire que $u_{n+1} \geq 4$ (?)
   On construit donc à partir de l'hypothèse de récurrence :
   On sait que $u_n \geq 4$. Par produit par 0,5, on a $0{,}5u_n \geq 2$. En ajoutant 2 aux deux membres, $0{,}5u_n + 2 \geq 4$ soit donc $u_{n+1} \geq 4$
   On a donc que **_P_{n+1} est vraie_** **_La propriété est héréditaire._**

   Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 4$

2) On évalue $u_{n+1} - u_n = 0{,}5u_n + 2 - u_n$ soit donc $u_{n+1} - u_n = -0{,}5u_n + 2$
3) On factorise $u_{n+1} - u_n = -0{,}5\left(u_n + \frac{2}{-0{,}5}\right)$
   On a donc $u_{n+1} - u_n = -0{,}5(u_n - 4)$
   Puisque :$\forall n \geq 3, u_n \geq 4$, $u_{n+1} - u_n < 0$. (u_n) est décroissante.
4) (u_n) est minorée par 4 et est décroissante. Grâce au théorème du cours (limite monotone), elle est convergente.

Exercice 3 : *Calcul de somme* /4 pts

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases}\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n \\ u_0 = 4\end{cases}$

1) Donner la nature de (u_n) ainsi que ses éléments caractéristiques.

2) Donner la formule de la somme des $n+1$ premiers termes, notée S_n
3) En déduire la limite de S_n.

Correction :

1) (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = \frac{1}{3}$
2) On rappelle la formule $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ soit en remplaçant avec les valeurs de l'énoncé : $S_n = 4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$. En simplifiant, $S_n = 4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$

   Soit au final, $S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$
3) On rappelle que $0 \leq \frac{1}{3} \leq 1$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} S_n = 6$