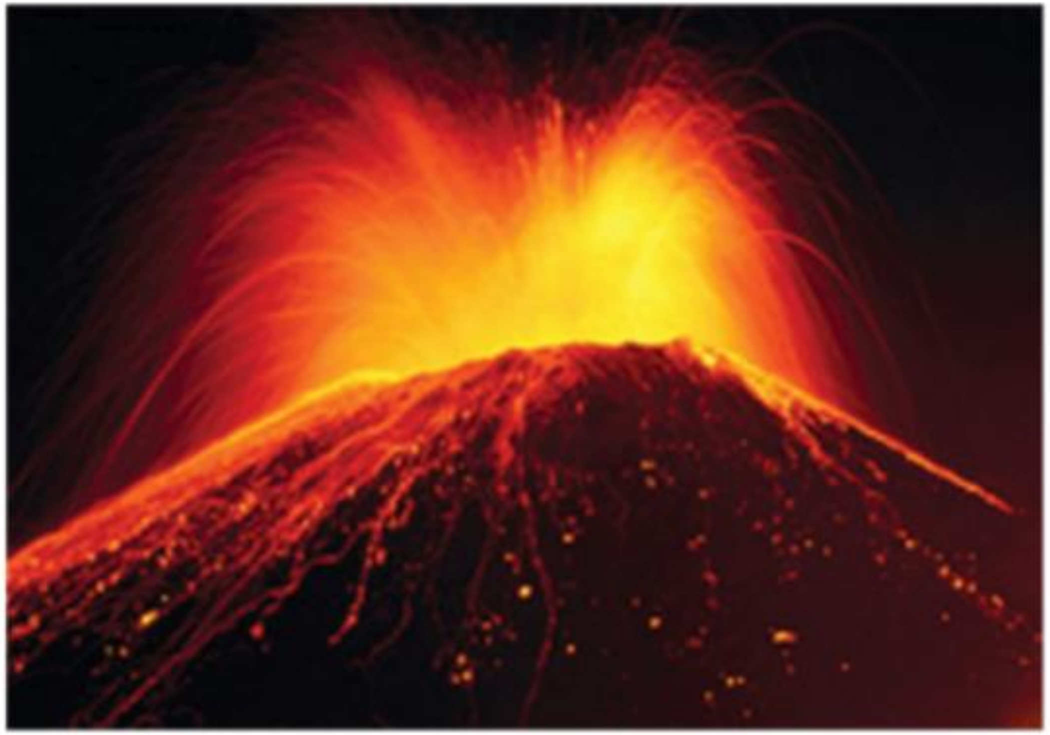
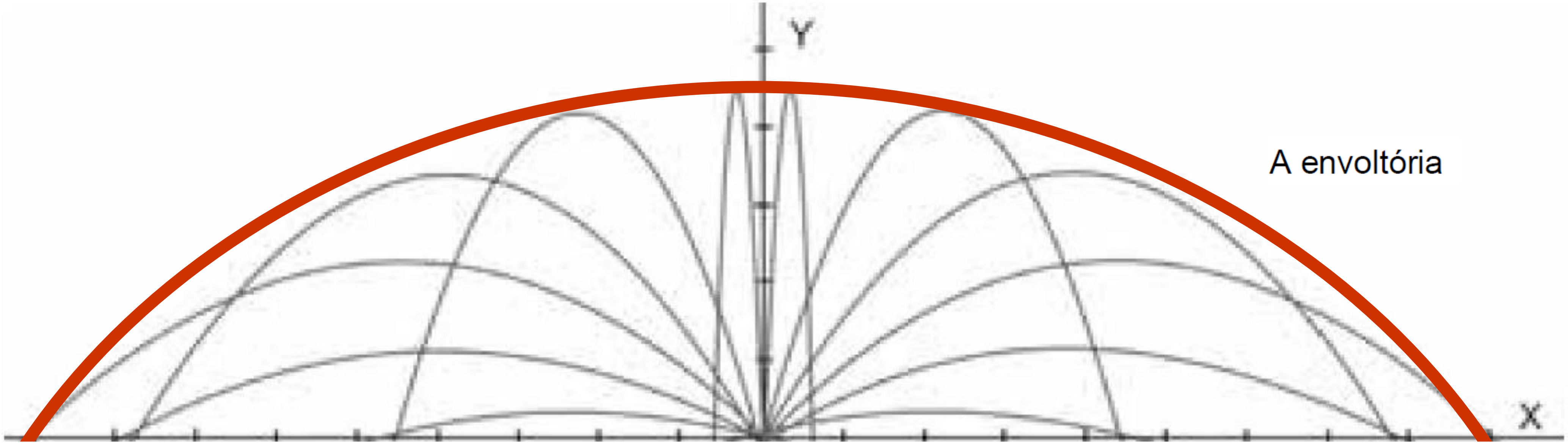
Parábola de segurança

ULISSES CAMACHO

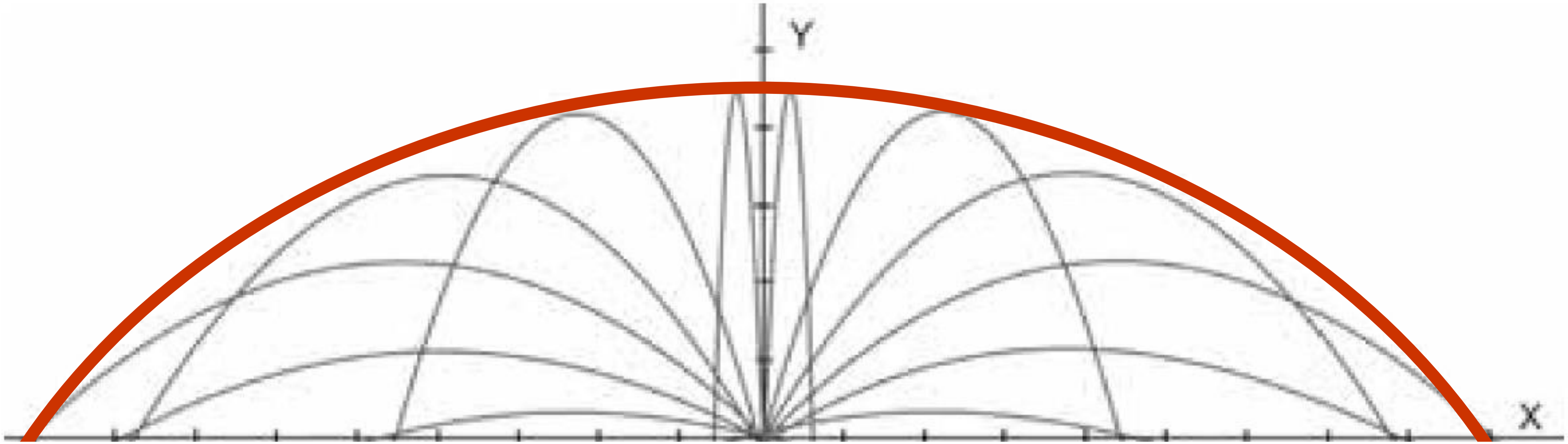


Família de trajetórias

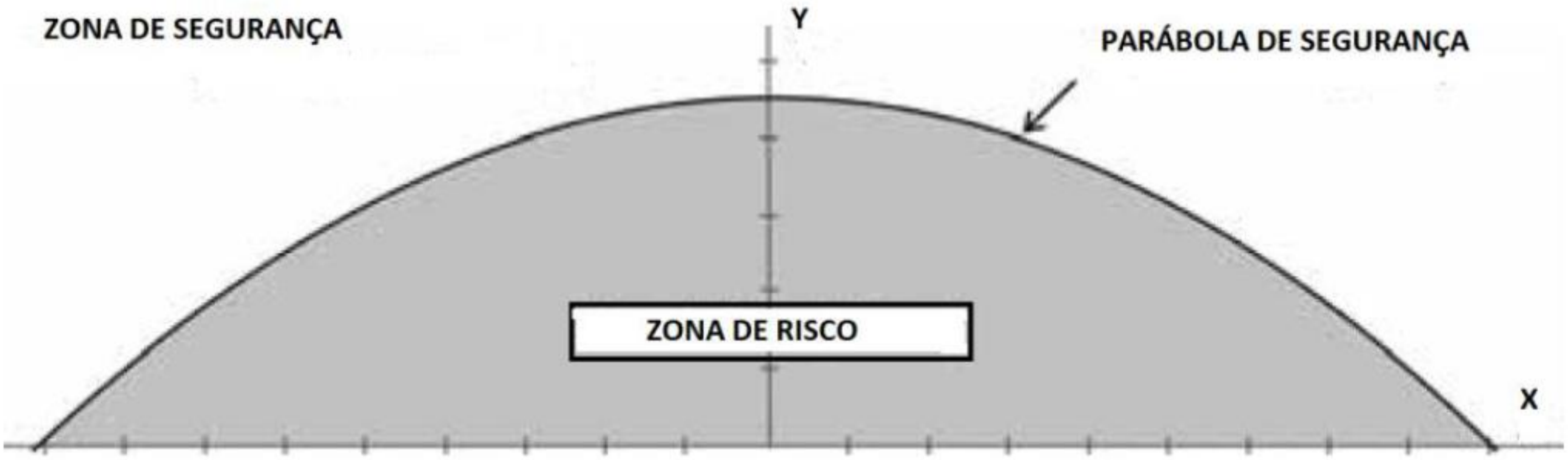


$$0° < \varphi < 180°$$

Todas as trajetórias parabólicas de projéteis disparados com mesma velocidade inicial v_0, mas sob ângulos de disparos variados, tangenciam internamente uma parábola envolvente, denominada parábola de segurança ou envoltória.



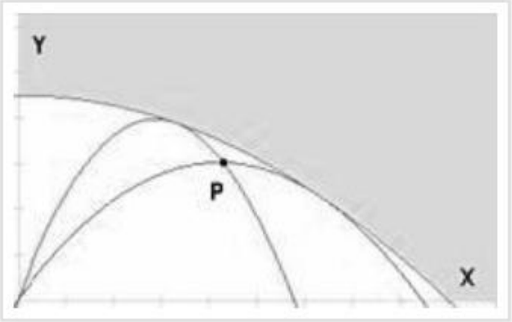
A PS define o lugar geométrico dos pontos do plano XY os quais jamais serão atingidos pelo lançador, ao efetuar disparos com aquela velocidade v_0 característica daquela parábola de segurança. O conjunto de todos os pontos externos a essa parábola de segurança constituem a chamada zona de segurança



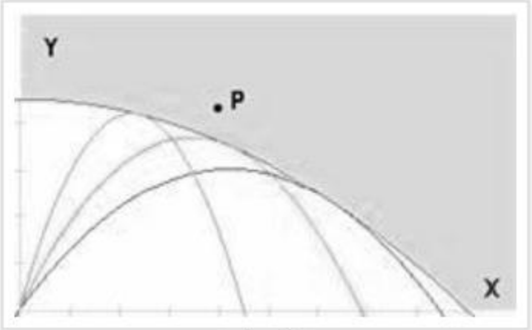
Determinação da PS

Considere um lançador, situado na origem $(0,0)$ do plano cartesiano, lançando projéteis com velocidade de módulo v_0 constante, porém, sob ângulos que variam.

Dado um ponto P qualquer, do plano cartesiano, localizado nas coordenadas (X_p, Y_p), com qual ângulo a o lançador deverá efetuar o disparo a fim de atingir aquele ponto?



Δ>0



Δ<0

Δ=0

$$X = X_p \quad \text{e} \quad Y = Y_p$$

$$Y_p = tg\varphi . X_p - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\varphi} . x_p^2$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = \sec^2\varphi = 1 + tg^2\varphi$$

$$Y_p = tg\varphi . xp - \frac{g . x_p^2}{2V_0^2} . (1 + tg^2\varphi)$$

$$tg\varphi^2 - \left(\frac{2V_0^2}{gx_p}\right) tg\varphi + \left(1 + \frac{2V_0^2 Y_p}{gx_p}\right) = 0$$

$\Delta > 0$ → **Interno à PS (Zona de risco)**

$\Delta < 0$ → **Externo à PS (Zona de segurança)**

$\Delta = 0$ → **Pertencente à PS**

$$b^2 - 4 . a . c = 0$$

$$\left(\frac{2V_0^2}{gx_p}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{2V_0^2 Y_p}{gx_p}\right) = 0 \longrightarrow \boxed{y_p = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} . x_p^2}$$

1. Um garoto deseja chutar sua bola no travessão de um gol que dista 20m dele e tem 5m de altura. Sendo g=10m/s², qual a velocidade mínima que o menino deve chutar a bola para que ela atinja o travessão?

$$y = \frac{V^2}{2g} - \frac{g}{2.V^2}.x^2$$

$$5 = \frac{V^2}{20} - \frac{10}{2.V^2}.20^2$$

$$5 = \frac{V^2}{20} - \frac{2000}{V^2}$$

$$100V^2 = V^4 - 40000$$

$$V^4 - 100V^2 - 40000 = 0$$

$$\Delta = 100^2 - 4.40000 = 170000$$

$$\sqrt{\Delta} \cong 412{,}31$$

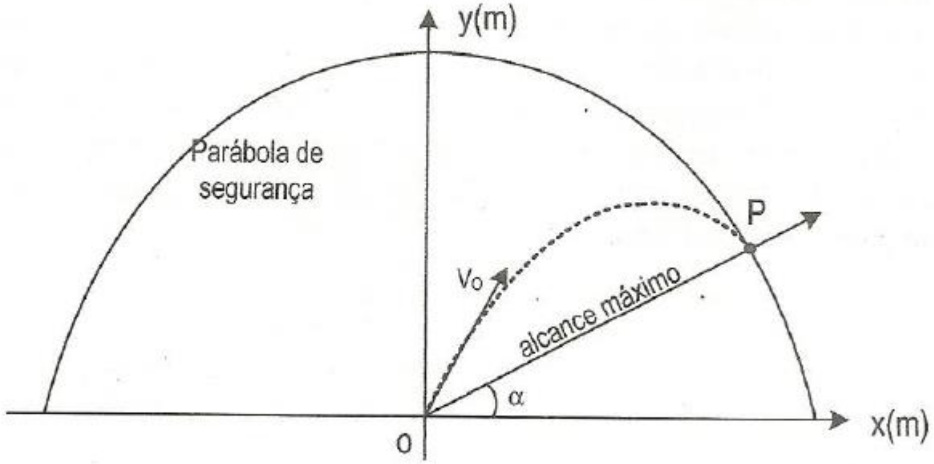
$$V^2 = \frac{-(-100) + 412{,}31}{2}$$

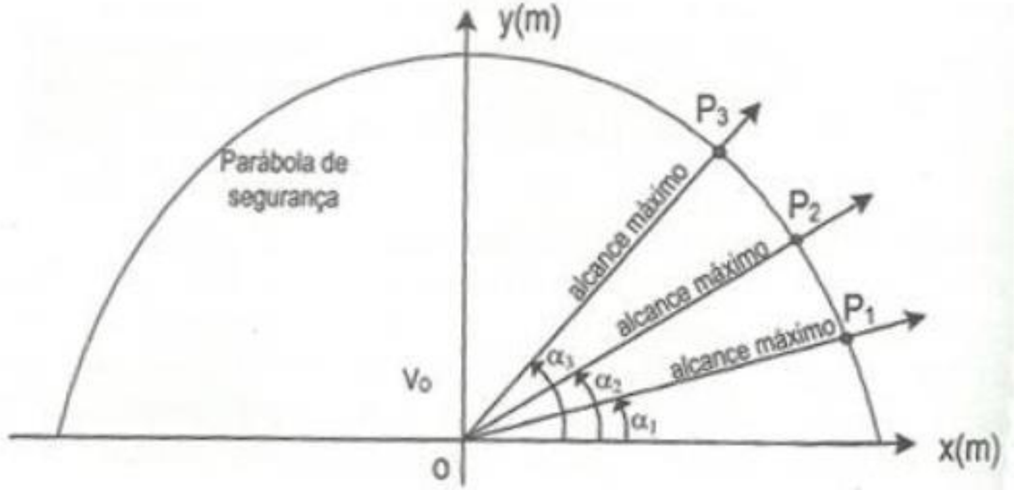
$$V^2 = 256{,}15$$

$$V \cong 16m/s$$

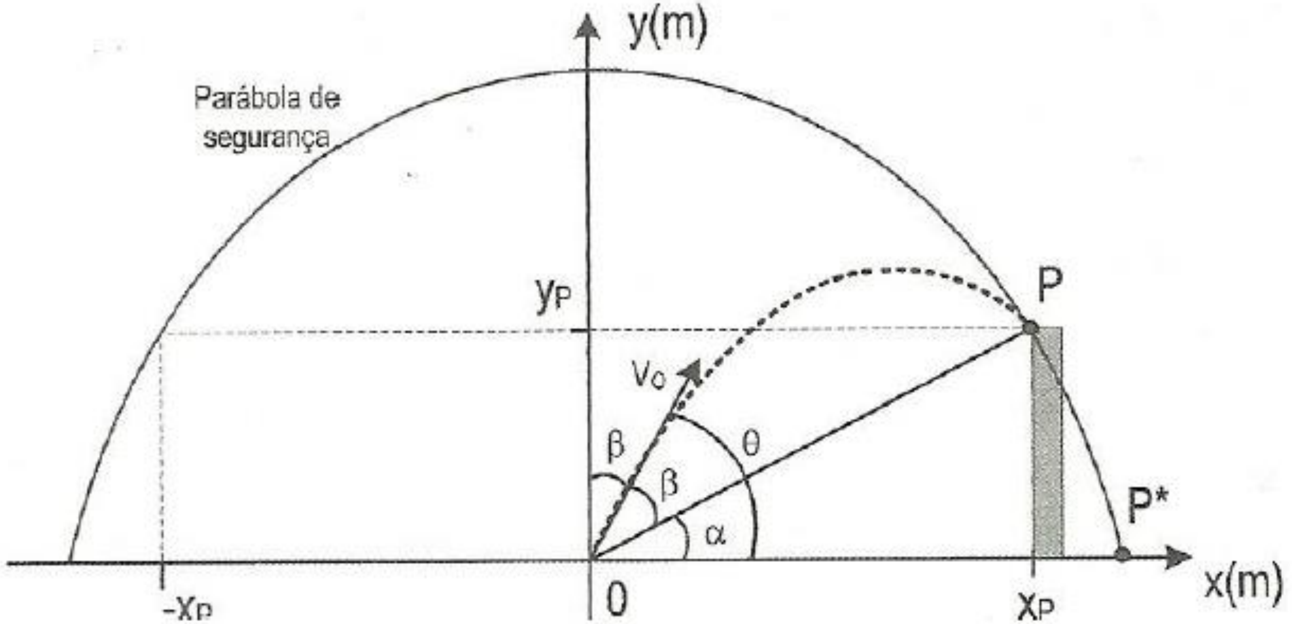
Propriedade

A parábola de segurança de um lançador é o lugar geométrico dos pontos $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_N$ de máximo alcance ao longo de quaisquer rampas de inclinação $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_N$ que passem pela origem do sistema cartesiano.



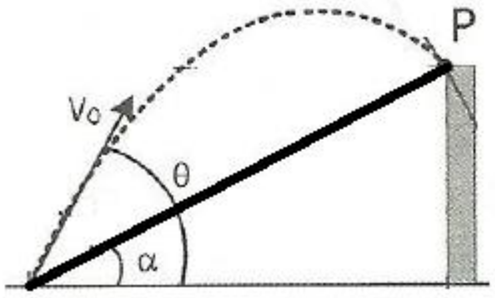


2. Qual deve ser o ângulo θ de lançamento da origem de uma rampa inclinada de α, em relação à horizontal, para que o alcance na rampa seja o máximo possível ?



$$\alpha + 2\beta = 90^\circ$$

$$\beta = \frac{90^\circ - \alpha}{2} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$$



$$\theta = \alpha + \beta$$

$$\theta = \frac{\alpha}{2} + 45$$

3. As provas de um detonador de uma granada efetuam-se no centro do fundo de um poço cilíndrico de profundidade H. Os estilhaços da granada, produzidos pela explosão e cujas velocidades não ultrapassam v_0, não devem cair na superfície da terra. Qual deverá ser o diâmetro D do poço ?

$$(x, y) = (R, H)$$

$$Y_P = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot x_p^2$$

$$H = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} \cdot R^2$$

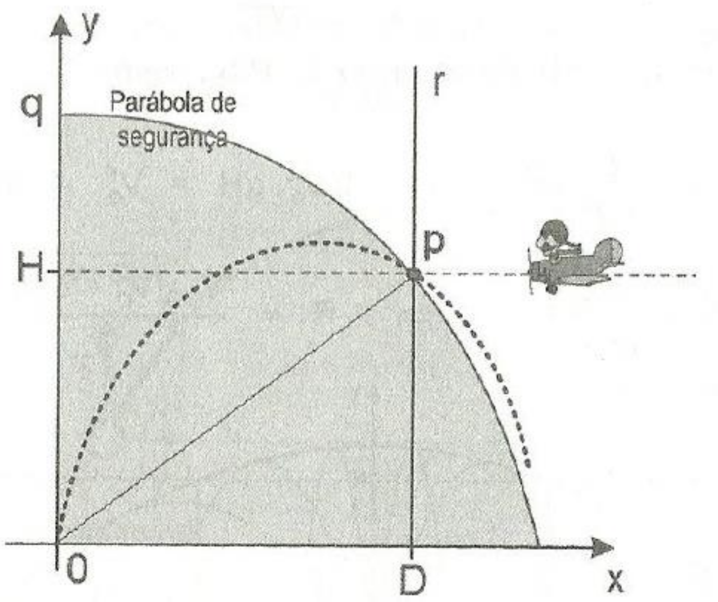
$$2V_0^2 \cdot g \cdot H = V_0^4 - g^2R^2$$

$$R^2 = \frac{V_0^4 - 2V_0^2 \cdot g \cdot H}{g^2}$$

$$D = 2 \cdot R$$

$$D = \frac{2v_0\sqrt{V_0^2 - 2 \cdot g \cdot H}}{g}$$

4. Considere um avião voando a uma altura constante H aproxima-se de um canhão antiaéreo no solo que dispara projéteis com velocidade U num local onde a gravidade vale g. Sabendo que a trajetória seguida pelo avião e o canhão estão contidos no mesmo plano vertical, pede-se que se determine a maior distância horizontal entre o canhão e o avião abaixo da qual o canhão já é capaz de abater o avião.

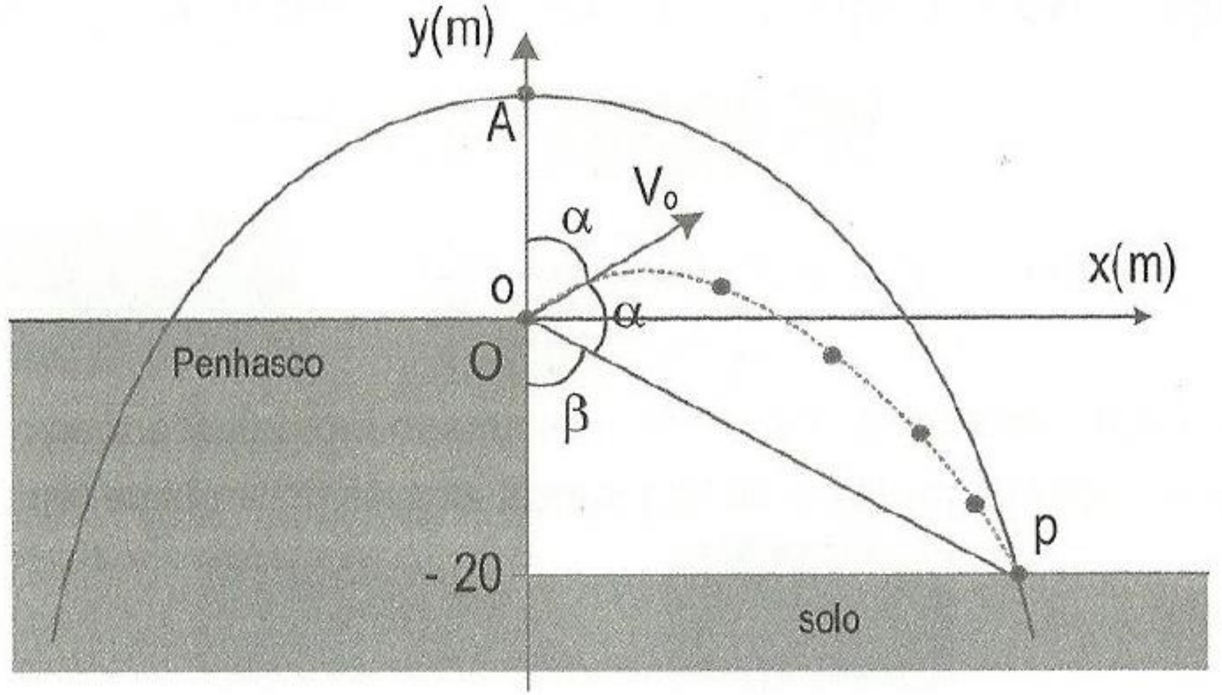


$$Y_P = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}.x_p^2$$

$$H = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2}.D^2$$

$$D = \frac{U}{g}\sqrt{U^2 - 2.g.H}$$

5. Determinemos sob qual ângulo com a vertical é necessário lançar uma pedra, da extremidade de um penhasco vertical de 20 metros de altura, afim de que ela caia a uma distância maior possível do paredão. A velocidade inicial da pedra é $v_0 = 14 m/s$ e a gravidade local vale $g = 10 m/s^2$



$$Y_P = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{g}{2V_0^2} . x_p^2$$

$$-20 = \frac{14^2}{20} - \frac{g}{2V_0^2} . x_p^2$$

$$x_p \approx 34{,}1 m$$

$$\tan\beta \cong 1{,}71$$

$$\beta = 60^\circ$$

$$2\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$