Sesión 4

jueves, 19 de junio de 2025 11:51 a. m.

- Separadores

***Separadores.*** Una técnica usualmente útil en combinatoria es la de usar separadores. Veamos un ejemplo:

*Ejemplo:* ¿De cuántas formas posibles se pueden acomodar 20 pelotas en 5 cajas distintas?

*Solución:* Supongamos que las cinco cajas están representadas como $C1$, $C2$, $C3$, $C4$ y $C5$. Notemos que cada acomodo de las 20 pelotas puede representarse por una sucesión formada por 20 símbolos $-$ y 4 símbolos $|$. Por ejemplo, si se ponen 3 pelotas en $C1$, 1 pelota en $C2$, 11 pelotas en $C3$, 3 pelotas en $C4$ y 2 pelotas en $C5$, su elección se representa como:

$$---|-|-----------|---|--$$

Los símbolos $|$ son a los que llamamos "separadores" y quedan determinados por el acomodo que hagamos. De forma recíproca, es claro que una sucesión de ese estilo también determina un acomodo y que el lugar dónde están colocados los separadores determina de forma única el acomodo. De esta forma, el contar los posibles acomodos se traduce en determinar de cuántas formas posibles podemos acomodar los separadores en los 24 "lugares" que se tienen. El número 24 viene del hecho de que cada pelota y cada separador ocupan un lugar, entonces como tenemos 20 paletas y 4 separadores, en total tenemos 24 lugares. Podemos concluir entonces que la cantidad de formas en las que podemos acomodar 20 pelotas en 5 cajas es $\binom{24}{4}$.■

$\binom{n+r-1}{r-1}$

1. ¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4=10$?

Solución: $\binom{13}{3}$ soluciones enteras positivas

$\underbrace{0\ 0}_{x_1}\ \underbrace{0\ 0\ 0}_{x_2}\ \underbrace{0\ 0\ 0}_{x_3}\ \underbrace{0\ 0}_{x_4}$

$\underbrace{0}_{x_1}\ \underbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 0}_{x_2}\ \underbrace{0\ 0\ 0\ 0}_{x_3}\ x_4$ ✗ $\binom{13}{3}$ ✗

$\underbrace{0}_{x_1}\ \underbrace{}_{x_2}\ \underbrace{}_{x_3}\ \underbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}_{x_4}$ ✗

$0\ 0\ |\ 0\ 0\ |\ 0\ 0\ |$

$x_1$ 0
$x_2$ 0
$x_3$ 0
$x_4$ 0

$y_1+y_2+y_3+y_4=6$

$\underbrace{0\ 0}_{x_1}\ \underbrace{0\ 0}_{x_2}\ \underbrace{0\ 0}_{x_3}\ \underbrace{}_{x_4}$

$(9$

$x_3$ 0

$x_4$ 0

$x_1$ $x_2$ $x_3$ $x_4$

$$\binom{9}{3}$$

$$3 + 3 + 3 + 1 = 10$$

$$| \_ \_ \_ \_ | \_ \_ \_ \_ |$$

$x_1 = 1$ $x_2 = 4$ $x_3 = 4$ $x_4 = 1$

$$\_ \_ | \_ | \_ | \_ \_$$

2.- ¿De cuántas formas posibles se pueden acomodar 20 pelotas en 5 cajas distintas de tal forma que en cada caja haya al menos una pelota?

Solución:

Dado que nos piden que haya al menos una pelota en cada caja, lo que haremos es poner una pelota en cada caja y contar las formas en las que podemos acomodar las restantes 15 pelotas en las 5 cajas. Para esto usamos nuevamente los separadores. De esta forma, hay $\binom{19}{4}$ formas posibles.

3. ¿Cuántas soluciones enteras positivas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$?

Solución:

Dado que queremos soluciones positivas $x_i > 0$, $\forall i = 1, 2, 3, 4$. Entonces lo que haremos es proceder como en el problema anterior y la cantidad de soluciones enteras positivas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ es exactamente la misma que la cantidad de soluciones de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$ que es $\binom{9}{3}$.

- Inclusión-Exclusión

***Principio de inclusión-exclusión.*** Sean $A_1, \dots A_n$ conjuntos. Entonces

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_n|.$$

$\boxed{n = 2}$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$\boxed{n=3}$ $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$
$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$

4. Sofía va a llenar con cubitos una caja que tiene base cuadrada de $100 \times 100$ y altura 1. La dimensión de cada cubito es $1 \times 1 \times 1$. Si Sofía ya puso 3,333 cubos. ¿Cuántos les faltan por poner?

Solución:

$$10,000 - 3,333 = 6,667$$

Ejemplo:
¿Cuántos números menores que 10,000 no son divisibles ni por 2, ni por 3?

(4) Cristopher 1,300 ✗ 2,000
(3) Zoe 2,500
(4) Otra respuesta

1 ~~3~~ 5 7 ~~9~~ 11 13 ~~15~~ 17 19 ~~21~~ ...

A = { números menores que 10 000, que son divisibles por 2 }
#A = 5,000

B = { números menores que 10 000, que son divisibles por 3 }
#B = 3,333

$$3 \overline{)10,000} = 3\,333$$
10
10
10

$A \cap B$ = { números menores que 10 000, divisibles por 2 ~~y~~ 3 }
= { números menores que 10,000, divisibles por 6 }

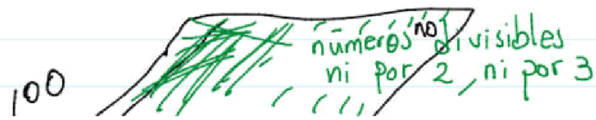
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
19 20 21 22 23 24 25 26 27 ...

$$6 \overline{)10000} = 1666$$
40
40
40
4

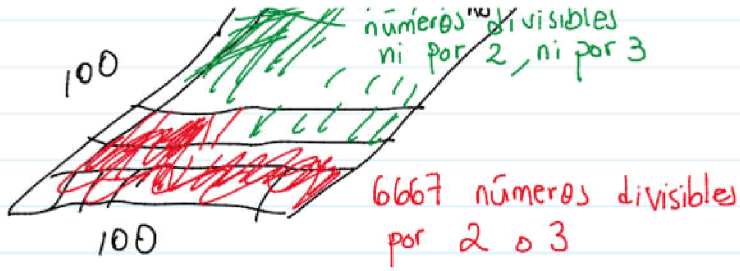
#($A \cap B$) = 1 666

$A \cup B$ = { números menores que 10,000, divisibles por 2 o 3 }

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$
$$= 5000 + 3333 - 1666$$
$$= 6667$$




$$= 6667$$




$$\begin{array}{r} 10000 \\ -\ 6667 \\ \hline 3333 \end{array}$$

R.- Hay 3333 números que no son divisibles ni por 2, ni por 3

### 📌 Ejemplo con 3 conjuntos

**Problema:** En un grupo de 100 personas:

- 40 hablan inglés,
- 30 hablan francés,
- 20 hablan alemán,
- 10 hablan inglés y francés,
- 5 hablan inglés y alemán,
- 8 hablan francés y alemán,
- 3 hablan los tres idiomas.

¿Cuántas personas hablan al menos uno?

**Paso 1: Aplicamos la fórmula**

$$|A \cup B \cup C| = 40 + 30 + 20 - 10 - 5 - 8 + 3 = 90 - 23 + 3 = \boxed{70}$$

➡️ **70 personas** hablan al menos un idioma.

*El principio de inclusión y exclusión.* Consideremos un conjunto $S$ tal que $|S| = N$ y las condiciones $c_i$, $1 \le i \le t$ satisfechas por algunos de los elementos de $S$. El número de elementos de $S$ que no satisfacen *ninguna* de las condiciones $c_i$, $1 \le i \le t$, se denota con $\overline{N} = N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3 \ldots \overline{c}_t)$, donde

$$\begin{aligned}\overline{N} = N &- [N(c_1) + N(c_2) + N(c_3) + \cdots + N(c_t)] \\ &+ [N(c_1 c_2) + N(c_1 c_3) + \cdots + N(c_1 c_t) + N(c_2 c_3) + \cdots + N(c_{t-1} c_t)] \\ &- [N(c_1 c_2 c_3) + N(c_1 c_2 c_4) + \cdots + N(c_1 c_2 c_t) + N(c_1 c_3 c_4) + \cdots \\ &+ N(c_1 c_3 c_t) + \cdots + N(c_{t-2} c_{t-1} c_t)] + \cdots + (-1)^t N(c_1 c_2 c_3 \ldots c_t), \qquad (1)\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}\overline{N} = N - \sum_{1 \le i \le t} N(c_i) + \sum_{1 \le i < j \le t} N(c_i c_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le t} N(c_i c_j c_k) + \cdots \\ + (-1)^t N(c_1 c_2 c_3 \ldots c_t). \qquad (2)\end{aligned}$$

**COROLARIO 8.1** Según las hipótesis del teorema 8.1, el número de elementos de $S$ que satisfacen al menos una de las condiciones $c_i$, donde $1 \le i \le t$, está dado por $N(c_1 \text{ o } c_2 \text{ o } \ldots \text{ o } c_t) = N - \overline{N}$.

**Ejemplo 8.2** En el capítulo 1 encontramos el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$. Responderemos ahora la misma pregunta con la restricción adicional $x_i \le 7$, para todo $1 \le i \le 4$.

$S$ es el conjunto de soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, con $0 \le x_i$ para todo $1 \le i \le 4$. Así, $|S| = N = \binom{4+18-1}{18} = \binom{21}{18}$.



Decimos que una solución $x_1, x_2, x_3, x_4$ satisface la condición $c_i$, donde $1 \le i \le 4$, si $x_i > 7$ (o $x_i \ge 8$). La respuesta al problema es entonces $N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\overline{c}_4)$.

Por simetría, $N(c_1) = N(c_2) = N(c_3) = N(c_4)$. Para calcular $N(c_1)$, consideramos las soluciones enteras de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, donde cada $x_i \ge 0$ para toda $1 \le i \le 4$. Entonces sumamos 8 al valor de $x_1$ y obtenemos las soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ que satisfacen la condición $c_1$. Por lo tanto, $N(c_i) = \binom{4+10-1}{10} = \binom{13}{10}$, para todo $1 \le i \le 4$, y $S_1 = \binom{4}{1}\binom{13}{10}$.

Del mismo modo, $N(c_1 c_2)$ es el número de soluciones enteras de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, donde $x_i \ge 0$, para todo $1 \le i \le 4$. Así, $N(c_1 c_2) = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2}$ y $S_2 = \binom{4}{2}\binom{5}{2}$.

Como $N(c_i c_j c_k) = 0$ para cualquier selección de las tres condiciones y $N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 0$,

Como $N(c_i c_j c_k) = 0$ para cualquier selección de las tres condiciones y $N(c_1 c_2 c_3 c_4) = 0$, tenemos que

$$N(\overline{c}_1\overline{c}_2\overline{c}_3\overline{c}_4) = N - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = \binom{21}{18} - \binom{4}{1}\binom{13}{10} + \binom{4}{2}\binom{5}{2} - 0 + 0 = 246.$$

Así, de las 1330 soluciones enteras no negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, sólo 246 de ellas satisfacen $x_i \le 7$ para todo $1 \le i \le 4$.