Entrenamiento de olimpiada de Matemáticas 2025

D ACB-UJAT

Álgebra

Principio de inducción fuerte El conjunto de proposiciones $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n), \ldots$ son todas ciertas si:

1. La afirmación $P(1)$ es verdadera.

Observaciones 3.1.10.

Principio de inducción fuerte El conjunto de proposiciones $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n), \ldots$ son todas ciertas si:

1. La afirmación $P(1)$ es verdadera.
2. La afirmación "$P(1), \ldots, P(n) \Rightarrow P(n+1)$" es verdadera.

Observaciones 3.1.10.

Principio de inducción fuerte El conjunto de proposiciones $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n), \ldots$ son todas ciertas si:

1. La afirmación $P(1)$ es verdadera.
2. La afirmación "$P(1), \ldots, P(n) \Rightarrow P(n+1)$" es verdadera.

Observaciones 3.1.10.

(a) En el principio de inducción fuerte el paso inductivo es válido si cada vez que $P(k)$ es válida para toda $k \leq n$, entonces, a partir de esta hipótesis, se demuestra que $P(n+1)$ es válida.

Principio de inducción fuerte El conjunto de proposiciones $P(1), P(2), P(3), \ldots, P(n), \ldots$ son todas ciertas si:

1. La afirmación $P(1)$ es verdadera.
2. La afirmación "$P(1), \ldots, P(n) \Rightarrow P(n+1)$" es verdadera.

Observaciones 3.1.10.

(a) En el principio de inducción fuerte el paso inductivo es válido si cada vez que $P(k)$ es válida para toda $k \leq n$, entonces, a partir de esta hipótesis, se demuestra que $P(n+1)$ es válida.

(b) Es claro que el principio de inducción fuerte implica el simple. Pero en realidad ambos son equivalentes, ya que la inducción fuerte es consecuencia de la inducción simple.

Para verlo basta considerar la conjunción lógica $Q(n)$ de las proposiciones $P(1), \ldots, P(n)$. Si $P(1)$ es verdadera también lo es $Q(1)$ (pues son idénticas). Si $Q(n)$ es verdadera entonces también lo son $P(1), P(2), \ldots, P(n)$, y por la hipótesis inductiva fuerte también lo es $P(n+1)$, lo que implica que $Q(n+1)$ es verdadera. Entonces, por inducción simple $Q(n)$ es verdadera para todo natural n y lo mismo ocurre con $P(n)$.

Aunque la inducción fuerte y la inducción simple son lógicamente equivalentes, en algunos casos es más cómodo usar una que la otra. La inducción fuerte está implícita en la definición de sucesiones mediante relaciones de recurrencia.

Ejemplo: Si a es un número real, tal que $\dfrac{a+1}{a}$ es un número entero, entonces
$$\frac{a^n+1}{a^n}$$
es un número entero para toda $n \geq 1$.

Para $n=1$, la afirmación es cierta por la hipótesis de que $\dfrac{a+1}{a}$ es un número entero.
Veamos cómo resolver para $n=2$, muchas veces este caso da idea de cómo justificar el paso inductivo.
Notemos que
$$\left(\frac{a+1}{a}\right)^2 = \frac{a^2+1}{a^2} + 2,$$
luego,
$$\frac{a^2+1}{a^2} = \left(\frac{a+1}{a}\right)^2 - 2,$$
es un número entero y entonces tenemos la validez de la afirmación para $n=2$.

Revisemos de nuevo,

$$\left(\frac{a+1}{a}\right)^2 = \left(\frac{a+1}{a}\right)\left(\frac{a+1}{a}\right) = \frac{a^2+1}{a^2}+a\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\cdot a = \frac{a^2+1}{a^2}+a^0+\frac{1}{a^0}$$

lo que nos lleva a que

$$\frac{a^2+1}{a^2} = \left(\frac{a+1}{a}\right)\left(\frac{a+1}{a}\right) - \left(a^0+\frac{1}{a^0}\right).$$

Ahora hay otra idea: la afirmación para $n = 2$ depende de la afirmación para $n = 1$ y para $n = 0$ (que por cierto también es válida).
Para obtener la afirmación para $n = 3$, trabajemos siguiendo la idea anterior:

$$\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)\left(\frac{a+1}{a}\right) = \frac{a^3+1}{a^3} + \frac{a+1}{a}.$$

Despejando, obtenemos

$$\frac{a^3+1}{a^3} = \left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)\left(\frac{a+1}{a}\right) - \left(\frac{a+1}{a}\right).$$

El lado derecho es un número entero si tanto $\frac{a+1}{a}$ como $\frac{a^2+1}{a^2}$ son números enteros, lo cual ya sabemos.

Ahora es claro cómo funciona el paso inductivo. Supongamos que la afirmación es válida para enteros menores o iguales a n, entonces de la identidad

$$\frac{a^{n+1}+1}{a^{n+1}} = \left(\frac{a^n+1}{a^n}\right)\left(\frac{a+1}{a}\right) - \left(\frac{a^{n-1}+1}{a^{n-1}}\right), \tag{3.3}$$

se sigue que la afirmación también es válida para $n+1$.

Las proposiciones $P(1), P(2), \ldots, P(n), \ldots$ son todas ciertas si:

1. La afirmación $P(2)$ es verdadera.

Observación 3.1.12. Veamos que el principio de inducción a la Cauchy implica el principio de inducción matemática. Primero notemos que, por 1. y 2., $P(1)$ es verdadera. Ahora, como 3. es cierta tenemos que cuando $P(n)$ es verdadera, hay garantía de que $P(2n)$ es verdadera.
Por 2., aplicada $n-1$ veces, se tendrá que
$P(2n-1), P(2n-2), \ldots, P(n+1)$ son todas verdaderas. En particular, $P(n+1)$ es verdadera. Luego, se está en la hipótesis del principio de inducción simple. Por lo tanto, todas las $P(n)$ son verdaderas.

Las proposiciones $P(1), P(2), \ldots, P(n), \ldots$ son todas ciertas si:

1. La afirmación $P(2)$ es verdadera.
2. La afirmación "$P(n) \Rightarrow P(n-1)$" es verdadera.

Observación 3.1.12. Veamos que el principio de inducción a la Cauchy implica el principio de inducción matemática. Primero notemos que, por 1. y 2., $P(1)$ es verdadera. Ahora, como 3. es cierta tenemos que cuando $P(n)$ es verdadera, hay garantía de que $P(2n)$ es verdadera.
Por 2., aplicada $n-1$ veces, se tendrá que $P(2n-1), P(2n-2), \ldots, P(n+1)$ son todas verdaderas. En particular, $P(n+1)$ es verdadera. Luego, se está en la hipótesis del principio de inducción simple. Por lo tanto, todas las $P(n)$ son verdaderas.

Las proposiciones $P(1), P(2), \ldots, P(n), \ldots$ son todas ciertas si:

1. La afirmación $P(2)$ es verdadera.
2. La afirmación "$P(n) \Rightarrow P(n-1)$" es verdadera.
3. La afirmación "$P(n) \Rightarrow P(2n)$" es verdadera.

Observación 3.1.12. Veamos que el principio de inducción a la Cauchy implica el principio de inducción matemática. Primero notemos que, por 1. y 2., $P(1)$ es verdadera. Ahora, como 3. es cierta tenemos que cuando $P(n)$ es verdadera, hay garantía de que $P(2n)$ es verdadera.
Por 2., aplicada $n-1$ veces, se tendrá que $P(2n-1), P(2n-2), \ldots, P(n+1)$ son todas verdaderas. En particular, $P(n+1)$ es verdadera. Luego, se está en la hipótesis del principio de inducción simple. Por lo tanto, todas las $P(n)$ son verdaderas.

Ejemplo:
Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_m$ números naturales.
Supongamos que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m < mn.$$

Entonces es posible eliminar algunos términos (pero no todos) de ambos lados de la igualdad anterior, pero siempre conservando una igualdad.
Usamos inducción sobre $k = m + n$.
Como

$$n \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n < mn,$$

entonces $m > 1$ y análogamente $n > 1$, luego $m, n \geq 2$ y $k \geq 4$.
Para $m + n = 4$ tenemos que $m = n = 2$ y los únicos casos posibles son

$$1 + 1 = 1 + 1, \quad 1 + 2 = 1 + 2 \quad \text{(tal vez en otro orden)},$$

y el resultado es inmediato.

Supongamos que $k = m + n > 4$ y consideremos

$$s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_m < mn.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que x_1 es el mayor de los términos x_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$, y y_1 es el mayor de los y_j, con $j = 1, 2, \ldots, m$.
Podemos también suponer que $x_1 > y_1$, ya que si $x_1 = y_1$ el problema está resuelto.
Tenemos entonces

$$(x_1 - y_1) + x_2 + \cdots + x_n = y_2 + \cdots + y_m,$$

donde hay $n + (m - 1) = k - 1$ términos.
Debemos mostrar que la suma

$$s' = y_2 + \cdots + y_m$$

cumple la condición requerida, es decir, $s' < n(m - 1)$.

Como $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_m$, se sigue que $y_1 \geq \frac{s}{m}$, luego

$$s' = s - y_1 \leq s - \frac{s}{m} = \frac{s}{m} \cdot (m-1) < \frac{mn}{m} \cdot (m-1) = n(m-1).$$

Con esto podemos aplicar el principio de inducción matemática para concluir.

Problemas para practicar

Encuentra los valores de a_n, si $a_1 = 1$ y para cada $n \geq 2$

$$\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \cdots + \sqrt{a_n} = \frac{n\sqrt{a_{n+1}}}{2}$$

Demuestra que la única sucesión infinita $\{a_n\}$ de números positivos, tal que, para cada número entero positivo n, se cumple la igualdad

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \cdots a_n)^2$$

es la sucesión dada por $a_n = n$, para $n = 1, 2, \ldots$