Segundo entrenamiento de Combinatoria
OMET 2025

Saúl David Candelero Jiménez
Jair Remigio Juárez

Permutaciones con repetición. Si tenemos n objetos con n_1 objetos de un primer tipo, n_2 de un segundo tipo,$\ldots$, y n_r de un $r-$ésimo tipo, donde $n = n_1 + \cdots + n_r$, entonces existen

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

arreglos de los n objetos dados, considerando que los objetos del mismo tipo son indistinguibles entre sí.

Separadores. Una técnica usualmente útil en combinatoria es la de usar separadores. Veamos un ejemplo:

Ejemplo: ¿De cuántas formas posibles se pueden acomodar 20 pelotas en 5 cajas distintas?

Solución: Supongamos que las cinco cajas están representadas como $C1$, $C2$, $C3$, $C4$ y $C5$. Notemos que cada acomodo de las 20 pelotas puede representarse por una sucesión formada por 20 símbolos $-$ y 4 símbolos $|$. Por ejemplo, si se ponen 3 pelotas en $C1$, 1 pelota en $C2$, 11 pelotas en $C3$, 3 pelotas en $C4$ y 2 pelotas en $C5$, su elección se representa como:

$$---|-|-----------|---|--$$

Los símbolos $|$ son a los que llamamos "separadores" y quedan determinados por el acomodo que hagamos. De forma recíproca, es claro que una sucesión de ese estilo también determina un acomodo y que el lugar dónde están colocados los separadores determina de forma única el acomodo. De esta forma, el contar los posibles acomodos se traduce en determinar de cuántas formas posibles podemos acomodar los separadores en los 24 "lugares" que se tienen. El número 24 viene del hecho de que cada pelota y cada separador ocupan un lugar, entonces como tenemos 20 paletas y 4 separadores, en total tenemos 24 lugares. Podemos concluir entonces que la cantidad de formas en las que podemos acomodar 20 pelotas en 5 cajas es $\binom{24}{4}$.$\blacksquare$

Principio de inclusión-exclusión. Sean $A_1, \ldots A_n$ conjuntos. Entonces

$$|\cup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{1\leq i\leq n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_n|.$$

Ejercicios:

1. Encuentra el total de ternas ordenadas de enteros positivos (x, y, z) tales que $x+y+z = 2020$.

2. ¿Cuántos términos tiene la expansión de $(a + b + c)^5$.

3. Demuestra que el número de formas de escoger k objetos de un total de n objetos, en donde el orden no importa pero se pueden repetir objetos, es igual a $\binom{n+k-1}{k}$.

4. Encuentra la cantidad de números naturales menores que 1000 cuyas cifras sumen 9.

5. ¿De cuántas formas se puede dividir un collar circular hecho con 30 perlas idénticas, en 8 pedazos, si sólo se permite cortar entre las perlas?

6. Encuentra el total de ternas ordenadas de enteros positivos (x, y, z) tales que $x+y+z \leq 19$.

7. ¿Cuántos números menores que un millón tienen al menos dos $1'$s seguidos?

8. En una oficina hay 10 empleados. Cada uno es especialista en una labor distinta a la de los demás. Para no aburrirse, les gusta intercambiar sus puestos; sin embargo, el buen funcionamiento de la oficina exige que en cada momento haya exactamente 4 empleados trabajando en su especialidad. ¿Cuántas distribuciones de los puestos se pueden hacer bajo estas condiciones?

9. Un número se llama *rumboso* si todas sus cifras están ordenadas de menor a mayor, de izquierda a derecha. Por ejemplo, el número 247 es rumboso, y el número 231 no lo es. ¿Cuántos números rumbosos de cuatro cifras podemos construir?

10. ¿De cuántas formas se pueden colocar tres a, tres b y tres c de modo que no aparezca la misma letra tres veces consecutivas?

11. Un encuadernador debe encuadernar 12 libros diferentes en colores rojo, verde o azul. ¿De cuántos modos puede hacerlo, si por lo menos un libro debe estar encuadernado en cada color?

12. ¿De cuántos modos se pueden permutar las letras de la palabra "tictac", si dos letras iguales no pueden ir una a continuación de la otra?

13. Encuentra el número de permutaciones de los números 1,2,3,4,5,6,7 de manera que queden exactamente tres números fijos.

14. En un grupo de 16 olímpicos, cada uno de ellos es amigo de al menos 11 de los otros. Muestre que hay un grupo de 4 olímpicos donde cada par de ellos son amigos.

15. Sea n un entero positivo. Diremos que una permutación $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ de $(1, 2, \ldots, 2n)$ tiene la propiedad P sí y sólo sí existe un número i en $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ tal que $|x_i - x_{i+1}| = n$. Muestre que hay más permutaciones con la propiedad P que permutaciones sin la propiedad P.

16. Sea $S = \{1, 2, \ldots, 280\}$. Encuentre el menor número natural n tal que para cualquier subconjunto de S con n elementos, el subconjunto contiene 5 números que son primos relativos por pares.

17. Sea n un entero positivo. Encuentre el número de permutaciones de $(1, 2, \ldots, n)$ tal que ninguno de los números permanezca en su lugar original.