Desigualdades Numéricas

Ingrid Quilantán Ortega, Aroldo Pérez Pérez
ingrid.quilantan@ujat.mx, aroldopz2@gmail.com

División Académica de Ciencias Básicas
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Olimpiada de Matemáticas del Estado de Tabasco

Julio de 2025

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

Definición

El **valor absoluto** *de $x \in \mathbb{R}$ se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y \; que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y \; que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Definición

El **valor absoluto** *de $x \in \mathbb{R}$ se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y \; que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$. Notemos que

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y \; que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$. *Notemos que*

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $|x| =$

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y\ que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$. *Notemos que*

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $|x| = x$

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$*,*

$$|x| \geq 0, \quad y \; que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$*. Notemos que*

i) *Si* $x > 0$*, entonces* $|x| = x > 0$*.*

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y \; que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$. *Notemos que*

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $|x| = x > 0$.

ii) *Si* $x < 0$, *entonces* $|x| =$

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y \; que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$. *Notemos que*

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $|x| = x > 0$.

ii) *Si* $x < 0$, *entonces* $|x| = \; - x$

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y \text{ que} \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$. *Notemos que*

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $|x| = x > 0$.

ii) *Si* $x < 0$, *entonces* $|x| = -x > 0$.

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y \; que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$. *Notemos que*

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $|x| = x > 0$.

ii) *Si* $x < 0$, *entonces* $|x| = \; -x > 0$.

iii) *Si* $x = 0$, *entonces* $|x| = |0| =$

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y \; que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$. *Notemos que*

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $|x| = x > 0$.

ii) *Si* $x < 0$, *entonces* $|x| = -x > 0$.

iii) *Si* $x = 0$, *entonces* $|x| = |0| = 0$.

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y \; que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$. *Notemos que*

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $|x| = x > 0$.
ii) *Si* $x < 0$, *entonces* $|x| = -x > 0$.
iii) *Si* $x = 0$, *entonces* $|x| = |0| = 0$.
iv) *Si* $x \neq 0$, *entonces*

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y \; que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$. *Notemos que*

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $|x| = x > 0$.
ii) *Si* $x < 0$, *entonces* $|x| = -x > 0$.
iii) *Si* $x = 0$, *entonces* $|x| = |0| = 0$.
iv) *Si* $x \neq 0$, *entonces* $x > 0$ *ó* $x < 0$.

Definición

El **valor absoluto** *de* $x \in \mathbb{R}$ *se define como*

$$|x| = \begin{cases} x, & si \;\; x \geq 0 \\ -x, & si \;\; x \leq 0. \end{cases}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \geq 0, \quad y \; que \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Demostración

Sea $x \in \mathbb{R}$. *Notemos que*

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $|x| = x > 0$.

ii) *Si* $x < 0$, *entonces* $|x| = -x > 0$.

iii) *Si* $x = 0$, *entonces* $|x| = |0| = 0$.

iv) *Si* $x \neq 0$, *entonces* $x > 0$ *ó* $x < 0$. *Luego por i) y ii),* $|x| > 0$.

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$;

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; *y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$*; y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Ejercicio

Dado $x \in \mathbb{R}$*, demostrar que* $|-x| = |x|$.

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$; *y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Ejercicio

Dado $x \in \mathbb{R}$, *demostrar que* $|-x| = |x|$.

Demostración

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$*; y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Ejercicio

Dado $x \in \mathbb{R}$*, demostrar que* $|-x| = |x|$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow$$

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$*; y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Ejercicio

Dado $x \in \mathbb{R}$*, demostrar que* $|-x| = |x|$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow \ -x$$

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; *y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Ejercicio

Dado $x \in \mathbb{R}$, *demostrar que* $|-x| = |x|$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow$$

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; *y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Ejercicio

Dado $x \in \mathbb{R}$, *demostrar que* $|-x| = |x|$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow |-x| =$$

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$; *y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Ejercicio

Dado $x \in \mathbb{R}$, *demostrar que* $|-x| = |x|$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow |-x| = -(-x) =$$

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; *y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Ejercicio

Dado $x \in \mathbb{R}$, *demostrar que* $|-x| = |x|$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow |-x| = -(-x) = x =$$

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$*; y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Ejercicio

Dado $x \in \mathbb{R}$*, demostrar que* $|-x| = |x|$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow |-x| = -(-x) = x = |x|.$$

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$; *y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Ejercicio

Dado $x \in \mathbb{R}$, *demostrar que* $|-x| = |x|$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow |-x| = -(-x) = x = |x|.$$

$$x \leq 0 \Rightarrow$$

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$*; y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Ejercicio

Dado $x \in \mathbb{R}$*, demostrar que* $|-x| = |x|$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow |-x| = -(-x) = x = |x|.$$

$$x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow$$

Demostración

De i), ii) y iii) se tiene que $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$*; y de iii) y iv) se sigue que* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $\square$

Ejercicio

Dado $x \in \mathbb{R}$*, demostrar que* $|-x| = |x|$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow |-x| = -(-x) = x = |x|.$$

$$x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow |-x| = -x = |x|.$$

$\square$

Ejercicio

Demostrar que $|x|^2 = x^2$.

Ejercicio

Demostrar que $|x|^2 = x^2$.

Demostración

Ejercicio

Demostrar que $|x|^2 = x^2$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que $|x|^2 = x^2$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow |x|^2 =$$

Ejercicio

Demostrar que $|x|^2 = x^2$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow |x|^2 = x^2.$$

Ejercicio

Demostrar que $|x|^2 = x^2$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow |x|^2 = x^2.$$

$$x \leq 0 \Rightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que $|x|^2 = x^2$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow |x|^2 = x^2.$$

$$x \leq 0 \Rightarrow |x|^2 =$$

Ejercicio

Demostrar que $|x|^2 = x^2$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow |x|^2 = x^2.$$

$$x \leq 0 \Rightarrow |x|^2 = (-x)^2 =$$

Ejercicio

Demostrar que $|x|^2 = x^2$.

Demostración

$$x \geq 0 \Rightarrow |x|^2 = x^2.$$

$$x \leq 0 \Rightarrow |x|^2 = (-x)^2 = x^2.$$

□

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b \geq 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| =$

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab =$

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| =$

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab =$

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = (-a)(-b) =$

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

$a \geq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

$a \geq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \leq 0$.

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

$a \geq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \leq 0$.
Por lo tanto $|ab| =$

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

$a \geq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \leq 0$.
Por lo tanto $|ab| = -(ab) =$

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ y $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

$a \geq 0$ y $b \leq 0 \Rightarrow ab \leq 0$.
Por lo tanto $|ab| = -(ab) = a(-b) =$

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

$a \geq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \leq 0$.
Por lo tanto $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$.

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

$a \geq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \leq 0$.
Por lo tanto $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$.

Similarmente, si $a \leq 0$ *y* $b \geq 0$*, entonces*

Ejercicio

Demostrar que $|ab| = |a||b|$.

Demostración

$a \geq 0$ *y* $b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = |a||b|$.

$a \leq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \geq 0$.
Por lo tanto $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|$.

$a \geq 0$ *y* $b \leq 0 \Rightarrow ab \leq 0$.
Por lo tanto $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$.

Similarmente, si $a \leq 0$ *y* $b \geq 0$*, entonces* $|ab| = |a||b|$. $\square$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b}$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| =$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} =$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$*. Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$*. Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$*. Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b}$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| =$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$*. Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} =$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$*. Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} =$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b}$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| =$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$*. Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$$a \geq 0 \text{ y } b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}.$$

$$a \geq 0 \text{ y } b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}.$$

$$a \leq 0 \text{ y } b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} =$$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} =$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$. Demostrar que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b < 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b}$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| =$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$. Demostrar que $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} =$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$. *Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} =$

Ejercicio

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $b \neq 0$*. Demostrar que* $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Demostración

$a \geq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \geq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \leq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{|a|}{|b|}$.

$a \leq 0$ y $b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = \frac{|a|}{|b|}$. $\square$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \ \Rightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \ \Rightarrow \ -b \leq x \leq b.$$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \;\Rightarrow\; -b \leq x \leq b.$$

$\Leftarrow$)

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \ \Rightarrow \ -b \leq x \leq b.$$

$\Leftarrow$) $x \geq 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \;\Rightarrow\; -b \leq x \leq b.$$

$\Leftarrow$) $x \geq 0 \Rightarrow |x| =$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \;\Rightarrow\; -b \leq x \leq b.$$

$\Leftarrow$) $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \;\Rightarrow\; -b \leq x \leq b.$$

$\Leftarrow$) $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \leq b;$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \;\Rightarrow\; -b \leq x \leq b.$$

$\Leftarrow$) $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \leq b;$

$x < 0 \Rightarrow$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow)$ *Notemos que*

$$x \leq |x| \quad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \;\Rightarrow\; -b \leq x \leq b.$$

$\Leftarrow)$ $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \leq b;$

$x < 0 \Rightarrow |x| =$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \;\Rightarrow\; -b \leq x \leq b.$$

$\Leftarrow$) $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \leq b;$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x.$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \le b \Leftrightarrow -b \le x \le b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \le |x| \qquad y \quad -x \le |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \le b \Rightarrow x \le b \quad y \quad -x \le b \Rightarrow x \le b \quad y \quad x \ge -b \;\Rightarrow\; -b \le x \le b.$$

$\Leftarrow$) $x \ge 0 \Rightarrow |x| = x \le b;$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x.$ *Como* $-b \le x \Rightarrow$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \;\Rightarrow\; -b \leq x \leq b.$$

$\Leftarrow$) $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \leq b;$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x.$ *Como* $-b \leq x \Rightarrow b \geq -x$, *y así,*

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \ \Rightarrow \ -b \leq x \leq b.$$

$\Leftarrow$) $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \leq b;$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x.$ *Como* $-b \leq x \Rightarrow b \geq -x$, *y así,* $|x| = -x \leq b.$

Ejercicio

Demostrar que

$$|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b.$$

Demostración

$\Rightarrow$) *Notemos que*

$$x \leq |x| \qquad y \quad -x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$|x| \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad -x \leq b \Rightarrow x \leq b \quad y \quad x \geq -b \;\Rightarrow\; -b \leq x \leq b.$$

$\Leftarrow$) $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \leq b;$

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$. *Como* $-b \leq x \Rightarrow b \geq -x$, *y así,* $|x| = -x \leq b$.

Así, en cualquier caso, $|x| \leq b$. $\square$

Observación

$$|x|^2 = x^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{|x|^2} = \sqrt{x^2}.$$

Observación

$|x|^2 = x^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{|x|^2} = \sqrt{x^2}.$

Proposición

*(**Desigualdad del triángulo**) Para* $a, b \in \mathbb{R}$ *se cumple*

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Además la igualdad ocurre solamente cuando $ab \geq 0$.

Demostración

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a|+|b| \geq 0$, *basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$:

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a|+|b| \geq 0$, *basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$:

$$|a+b|^2 \quad =$$

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a|+|b| \geq 0$, *basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$*:*

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 =$$

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a|+|b| \geq 0$*, basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$*:*

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 =$$

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a|+|b| \geq 0$*, basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$*:*

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2$$

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a|+|b| \geq 0$, *basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$*:*

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \ \ (\textit{ya que} \ \ ab \leq |ab|) \end{aligned}$$

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a|+|b| \geq 0$*, basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$*:*

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \;\; (\textit{ya que} \;\; ab \leq |ab|) \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = \end{aligned}$$

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a|+|b| \geq 0$*, basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$*:*

$$\begin{aligned}
|a+b|^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\
&\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \quad (\textit{ya que} \;\; ab \leq |ab|) \\
&= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2 .
\end{aligned}$$

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a|+|b| \geq 0$*, basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$*:*

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \ \ (\textit{ya que} \ \ ab \leq |ab|) \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2 . \end{aligned}$$

Notemos que cuando $ab \geq 0$ *se tiene que* $ab = |ab| = |a||b|$. $\square$

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a|+|b| \geq 0$*, basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$*:*

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \ \ (\text{ya que } \ ab \leq |ab|) \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2 . \end{aligned}$$

Notemos que cuando $ab \geq 0$ *se tiene que* $ab = |ab| = |a||b|$. □

Observación

$|a+b+c| =$

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a| + |b| \geq 0$, *basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$:

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \ \ (\textit{ya que } \ ab \leq |ab|) \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2 . \end{aligned}$$

Notemos que cuando $ab \geq 0$ *se tiene que* $ab = |ab| = |a||b|$. □

Observación

$|a+b+c| = |(a+b)+c| \leq$

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a|+|b| \geq 0$, *basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$:

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \ \ (\textit{ya que} \ \ ab \leq |ab|) \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2 . \end{aligned}$$

Notemos que cuando $ab \geq 0$ *se tiene que* $ab = |ab| = |a||b|$. □

Observación

$|a+b+c| = |(a+b)+c| \leq |a+b| + |c| \leq$

Demostración

Notemos que como $|a+b| \geq 0$ *y* $|a|+|b| \geq 0$*, basta verificar que* $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$*:*

$$\begin{aligned} |a+b|^2 &= (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\ &\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \ \ (\textit{ya que} \ \ ab \leq |ab|) \\ &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2 . \end{aligned}$$

Notemos que cuando $ab \geq 0$ *se tiene que* $ab = |ab| = |a||b|$. □

Observación

$|a+b+c| = |(a+b)+c| \leq |a+b| + |c| \leq |a| + |b| + |c|$.

Forma general de la desigualdad del triángulo:

Forma general de la desigualdad del triángulo:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, .$$

Forma general de la desigualdad del triángulo:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| .$$

La igualdad se tiene cuando todos los x_k's tienen el mismo signo.

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

$$|a| =$$

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

$$|a| = |a - b + b| \leq$$

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

De donde

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

De donde

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \tag{1}$$

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

De donde

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \tag{1}$$

También

$$|b| =$$

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

De donde

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \tag{1}$$

También

$$|b| = |b - a + a| \leq$$

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

De donde

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \tag{1}$$

También

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|.$$

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

De donde

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \tag{1}$$

También

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|.$$

De donde

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

De donde

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \tag{1}$$

También

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|.$$

De donde

$$-|a - b| \leq |a| - |b|. \tag{2}$$

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

De donde

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \tag{1}$$

También

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|.$$

De donde

$$-|a - b| \leq |a| - |b|. \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos

Ejercicio

Demostrar que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Demostración

Notemos que

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

De donde

$$|a| - |b| \leq |a - b|. \tag{1}$$

También

$$|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|.$$

De donde

$$-|a - b| \leq |a| - |b|. \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Demostración

Luego,

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

$\square$

Ejercicio

Sea $a \geq 0$. *Demostrar que*

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a.$$

Ejercicio

Sea $a \geq 0$. *Demostrar que*

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a.$$

Demostración

Ejercicio

Sea $a \geq 0$. *Demostrar que*

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a.$$

Demostración

Supongamos que $|x| \geq a$.

Ejercicio

Sea $a \geq 0$. *Demostrar que*

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a.$$

Demostración

Supongamos que $|x| \geq a$.
Si $x \geq 0$, *entonces*

Ejercicio

Sea $a \geq 0$. *Demostrar que*

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a.$$

Demostración

Supongamos que $|x| \geq a$.
Si $x \geq 0$, *entonces* $x = |x| \geq a$; *y*

Ejercicio

Sea $a \geq 0$. Demostrar que

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a.$$

Demostración

Supongamos que $|x| \geq a$.
Si $x \geq 0$, entonces $x = |x| \geq a$; y
si $x < 0$, entonces

Ejercicio

Sea $a \geq 0$. *Demostrar que*

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a.$$

Demostración

Supongamos que $|x| \geq a$.
Si $x \geq 0$, *entonces* $x = |x| \geq a$; *y*
si $x < 0$, *entonces* $-x = |x| \geq a$, *de manera que*

Ejercicio

Sea $a \geq 0$. *Demostrar que*

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a.$$

Demostración

Supongamos que $|x| \geq a$.
Si $x \geq 0$, *entonces* $x = |x| \geq a$; *y*
si $x < 0$, *entonces* $-x = |x| \geq a$, *de manera que* $x \leq -a$.

Ejercicio

Sea $a \geq 0$*. Demostrar que*

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a.$$

Demostración

Supongamos que $|x| \geq a$*.*
Si $x \geq 0$*, entonces* $x = |x| \geq a$*; y*
si $x < 0$*, entonces* $-x = |x| \geq a$*, de manera que* $x \leq -a$*.*

Recíprocamente, si $x \geq a$*, entonces ya que* $a \geq 0$*,*

Ejercicio

Sea $a \geq 0$. *Demostrar que*

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a.$$

Demostración

Supongamos que $|x| \geq a$.
Si $x \geq 0$, *entonces* $x = |x| \geq a$; *y*
si $x < 0$, *entonces* $-x = |x| \geq a$, *de manera que* $x \leq -a$.

Recíprocamente, si $x \geq a$, *entonces ya que* $a \geq 0$, $|x| = x \geq a$; *y*

Ejercicio

Sea $a \geq 0$. *Demostrar que*

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a.$$

Demostración

Supongamos que $|x| \geq a$.
Si $x \geq 0$, *entonces* $x = |x| \geq a$; *y*
si $x < 0$, *entonces* $-x = |x| \geq a$, *de manera que* $x \leq -a$.

Recíprocamente, si $x \geq a$, *entonces ya que* $a \geq 0$, $|x| = x \geq a$; *y*
si $x \leq -a$, *entonces* $-x \geq a$, *y así, debido a que* $a \geq 0$,

Ejercicio

Sea $a \geq 0$. *Demostrar que*

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \quad o \quad x \geq a.$$

Demostración

Supongamos que $|x| \geq a$.
Si $x \geq 0$, *entonces* $x = |x| \geq a$; *y*
si $x < 0$, *entonces* $-x = |x| \geq a$, *de manera que* $x \leq -a$.

Recíprocamente, si $x \geq a$, *entonces ya que* $a \geq 0$, $|x| = x \geq a$; *y*
si $x \leq -a$, *entonces* $-x \geq a$, *y así, debido a que* $a \geq 0$, $|x| = -x \geq a$. $\square$

Ejercicio

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ *demostrar que*

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| - |b+c| - |c+a| + |a+b+c| \geq 0.$$

Ejercicio

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ *demostrar que*

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| - |b+c| - |c+a| + |a+b+c| \geq 0.$$

Demostración

Ejercicio

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ demostrar que

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| - |b+c| - |c+a| + |a+b+c| \geq 0.$$

Demostración

Si a, b o c es cero, se tiene la igualdad.

Ejercicio

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ *demostrar que*

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| - |b+c| - |c+a| + |a+b+c| \geq 0.$$

Demostración

Si a, b *o* c *es cero, se tiene la igualdad. Entonces, podemos suponer que*

Ejercicio

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ *demostrar que*

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| - |b+c| - |c+a| + |a+b+c| \geq 0.$$

Demostración

Si a, b *o* c *es cero, se tiene la igualdad. Entonces, podemos suponer que* $|a| \geq |b| \geq |c| > 0$ *ya que la desigualdad es simétrica en* a, b, c.

Ejercicio

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ *demostrar que*

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| - |b+c| - |c+a| + |a+b+c| \geq 0.$$

Demostración

Si a, b *o* c *es cero, se tiene la igualdad. Entonces, podemos suponer que* $|a| \geq |b| \geq |c| > 0$ *ya que la desigualdad es simétrica en* a, b, c. *Dividiendo entre* $|a|$, *la desigualdad es equivalente a*

Ejercicio

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ *demostrar que*

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| - |b+c| - |c+a| + |a+b+c| \geq 0.$$

Demostración

Si a, b *o* c *es cero, se tiene la igualdad. Entonces, podemos suponer que* $|a| \geq |b| \geq |c| > 0$ *ya que la desigualdad es simétrica en* a, b, c. *Dividiendo entre* $|a|$, *la desigualdad es equivalente a*

$$1 + \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| - \left|1 + \frac{b}{a}\right| - \left|\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| - \left|1 + \frac{c}{a}\right| + \left|1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| \geq 0.$$

Ejercicio

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ *demostrar que*

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| - |b+c| - |c+a| + |a+b+c| \geq 0.$$

Demostración

Si a, b *o* c *es cero, se tiene la igualdad. Entonces, podemos suponer que* $|a| \geq |b| \geq |c| > 0$ *ya que la desigualdad es simétrica en* a, b, c. *Dividiendo entre* $|a|$, *la desigualdad es equivalente a*

$$1 + \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| - \left|1 + \frac{b}{a}\right| - \left|\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| - \left|1 + \frac{c}{a}\right| + \left|1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| \geq 0.$$

Como $\left|\frac{b}{a}\right| \leq 1$ *y* $\left|\frac{c}{a}\right| \leq 1$, *se tiene que*

Ejercicio

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ *demostrar que*

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| - |b+c| - |c+a| + |a+b+c| \geq 0.$$

Demostración

Si a, b o c es cero, se tiene la igualdad. Entonces, podemos suponer que $|a| \geq |b| \geq |c| > 0$ *ya que la desigualdad es simétrica en a, b, c. Dividiendo entre* $|a|$*, la desigualdad es equivalente a*

$$1 + \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| - \left|1 + \frac{b}{a}\right| - \left|\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| - \left|1 + \frac{c}{a}\right| + \left|1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| \geq 0.$$

Como $\left|\frac{b}{a}\right| \leq 1$ *y* $\left|\frac{c}{a}\right| \leq 1$*, se tiene que*

$$\left|1 + \frac{b}{a}\right| =$$

Ejercicio

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ *demostrar que*

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| - |b+c| - |c+a| + |a+b+c| \geq 0.$$

Demostración

Si a, b *o* c *es cero, se tiene la igualdad. Entonces, podemos suponer que* $|a| \geq |b| \geq |c| > 0$ *ya que la desigualdad es simétrica en* a, b, c. *Dividiendo entre* $|a|$, *la desigualdad es equivalente a*

$$1 + \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| - \left|1 + \frac{b}{a}\right| - \left|\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| - \left|1 + \frac{c}{a}\right| + \left|1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| \geq 0.$$

Como $\left|\frac{b}{a}\right| \leq 1$ *y* $\left|\frac{c}{a}\right| \leq 1$, *se tiene que*

$$\left|1 + \frac{b}{a}\right| = 1 + \frac{b}{a} \quad y \quad \left|1 + \frac{c}{a}\right| =$$

Ejercicio

Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ *demostrar que*

$$|a| + |b| + |c| - |a+b| - |b+c| - |c+a| + |a+b+c| \geq 0.$$

Demostración

Si a, b *o* c *es cero, se tiene la igualdad. Entonces, podemos suponer que* $|a| \geq |b| \geq |c| > 0$ *ya que la desigualdad es simétrica en* a, b, c. *Dividiendo entre* $|a|$, *la desigualdad es equivalente a*

$$1 + \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| - \left|1 + \frac{b}{a}\right| - \left|\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| - \left|1 + \frac{c}{a}\right| + \left|1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right| \geq 0.$$

Como $\left|\frac{b}{a}\right| \leq 1$ *y* $\left|\frac{c}{a}\right| \leq 1$, *se tiene que*

$$\left|1 + \frac{b}{a}\right| = 1 + \frac{b}{a} \quad y \quad \left|1 + \frac{c}{a}\right| = 1 + \frac{c}{a}.$$

Demostración

Luego, solo es necesario demostrar que

$$\left[\left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| - \left|\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right|\right] + \left[-\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) + \left|1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right|\right] \geq 0,$$

Demostración

Luego, solo es necesario demostrar que

$$\left[\left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{a}\right| - \left|\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right|\right] + \left[-\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) + \left|1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right|\right] \geq 0,$$

lo cual se sigue de la desigualdad del triángulo y el hecho de que $x \leq |x| \ \forall x \in \mathbb{R}$.
□

Definición

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$.

a) *La* **media aritmética** *de estos n números es*

Definición

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$.

a) *La* **media aritmética** *de estos n números es*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \equiv m_1.$$

Definición

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$.

a) *La* **media aritmética** *de estos n números es*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \equiv m_1.$$

b) *La* **media cuadrática** *es*

Definición

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$.

a) *La* **media aritmética** *de estos n números es*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \equiv m_1.$$

b) *La* **media cuadrática** *es*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \equiv m_2.$$

Definición

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$.

a) *La* **media aritmética** *de estos* n *números es*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \equiv m_1.$$

b) *La* **media cuadrática** *es*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \equiv m_2.$$

c) *La* **media geométrica** *es*

Definición

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$.

a) *La* **media aritmética** *de estos n números es*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \equiv m_1.$$

b) *La* **media cuadrática** *es*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \equiv m_2.$$

c) *La* **media geométrica** *es*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \equiv m_0.$$

Definición

d) *Si* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, *la* **media armónica** *es*

Definición

d) *Si* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, *la* **media armónica** *es*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \equiv m_{-1}.$$

Cada uno de estos conceptos se usa para obtener **un solo valor** que **represente** los datos que nos han dado. Por ejemplo, si en dos exámenes se obtuvo 8 y 10,

Cada uno de estos conceptos se usa para obtener **un solo valor** que **represente** los datos que nos han dado. Por ejemplo, si en dos exámenes se obtuvo 8 y 10,

$$m_1 = \frac{8+10}{2} = 9,$$

Cada uno de estos conceptos se usa para obtener **un solo valor** que **represente** los datos que nos han dado. Por ejemplo, si en dos exámenes se obtuvo 8 y 10,

$$m_1 = \frac{8+10}{2} = 9,$$

y entonces es como si se hubiera sacado un 9 en los dos exámenes, pues se puede pasar un punto del 10 al 8.

Cada uno de estos conceptos se usa para obtener **un solo valor** que **represente** los datos que nos han dado. Por ejemplo, si en dos exámenes se obtuvo 8 y 10,

$$m_1 = \frac{8+10}{2} = 9,$$

y entonces es como si se hubiera sacado un 9 en los dos exámenes, pues se puede pasar un punto del 10 al 8. Notemos también que

Cada uno de estos conceptos se usa para obtener **un solo valor** que **represente** los datos que nos han dado. Por ejemplo, si en dos exámenes se obtuvo 8 y 10,

$$m_1 = \frac{8+10}{2} = 9,$$

y entonces es como si se hubiera sacado un 9 en los dos exámenes, pues se puede pasar un punto del 10 al 8. Notemos también que

$$m_2 \quad = \quad \sqrt{\frac{8^2+10^2}{2}} = \sqrt{82} \simeq 9.06,$$

Cada uno de estos conceptos se usa para obtener **un solo valor** que **represente** los datos que nos han dado. Por ejemplo, si en dos exámenes se obtuvo 8 y 10,

$$m_1 = \frac{8+10}{2} = 9,$$

y entonces es como si se hubiera sacado un 9 en los dos exámenes, pues se puede pasar un punto del 10 al 8. Notemos también que

$$\begin{aligned} m_2 &= \sqrt{\frac{8^2+10^2}{2}} = \sqrt{82} \simeq 9.06, \\ m_0 &= \sqrt{(8)(10)} = \sqrt{80} \simeq 8.94, \end{aligned}$$

Cada uno de estos conceptos se usa para obtener **un solo valor** que **represente** los datos que nos han dado. Por ejemplo, si en dos exámenes se obtuvo 8 y 10,

$$m_1 = \frac{8+10}{2} = 9,$$

y entonces es como si se hubiera sacado un 9 en los dos exámenes, pues se puede pasar un punto del 10 al 8. Notemos también que

$$\begin{aligned} m_2 &= \sqrt{\frac{8^2+10^2}{2}} = \sqrt{82} \simeq 9.06, \\ m_0 &= \sqrt{(8)(10)} = \sqrt{80} \simeq 8.94, \\ m_{-1} &= \frac{2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}} = \frac{2}{\frac{9}{40}} = \frac{80}{9} \simeq 8.89. \end{aligned}$$

Cada uno de estos conceptos se usa para obtener **un solo valor** que **represente** los datos que nos han dado. Por ejemplo, si en dos exámenes se obtuvo 8 y 10,

$$m_1 = \frac{8+10}{2} = 9,$$

y entonces es como si se hubiera sacado un 9 en los dos exámenes, pues se puede pasar un punto del 10 al 8. Notemos también que

$$\begin{aligned} m_2 &= \sqrt{\frac{8^2+10^2}{2}} = \sqrt{82} \simeq 9.06, \\ m_0 &= \sqrt{(8)(10)} = \sqrt{80} \simeq 8.94, \\ m_{-1} &= \frac{2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}} = \frac{2}{\frac{9}{40}} = \frac{80}{9} \simeq 8.89. \end{aligned}$$

Obviamente, si los resultados en ambos exámenes es 9,

Cada uno de estos conceptos se usa para obtener **un solo valor** que **represente** los datos que nos han dado. Por ejemplo, si en dos exámenes se obtuvo 8 y 10,

$$m_1 = \frac{8+10}{2} = 9,$$

y entonces es como si se hubiera sacado un 9 en los dos exámenes, pues se puede pasar un punto del 10 al 8. Notemos también que

$$\begin{aligned} m_2 &= \sqrt{\frac{8^2+10^2}{2}} = \sqrt{82} \simeq 9.06, \\ m_0 &= \sqrt{(8)(10)} = \sqrt{80} \simeq 8.94, \\ m_{-1} &= \frac{2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{10}} = \frac{2}{\frac{9}{40}} = \frac{80}{9} \simeq 8.89. \end{aligned}$$

Obviamente, si los resultados en ambos exámenes es 9,

$$m_{-1} = m_0 = m_1 = m_2 = 9.$$

Notemos que la media aritmética le da el mismo valor a sacar 8, 10 que 9, 9.

Notemos que la media aritmética le da el mismo valor a sacar 8, 10 que 9, 9. Pero la media cuadrática le da más valor a sacar 8, 10 que 9, 9, de esta manera un profesor puede usarla para valorar que sacar un 10 es más difícil que sacar un 9.

Notemos que la media aritmética le da el mismo valor a sacar 8, 10 que 9, 9. Pero la media cuadrática le da más valor a sacar 8, 10 que 9, 9, de esta manera un profesor puede usarla para valorar que sacar un 10 es más difícil que sacar un 9.

En general, la media cuadrática le da más peso a las notas altas. Sin embargo, las medias geométricas y armónicas le dan más peso a las notas bajas. Por lo que estos dos últimos tipos de medias pueden usarse para valorar la constancia.

Notemos que la media aritmética le da el mismo valor a sacar 8, 10 que 9, 9. Pero la media cuadrática le da más valor a sacar 8, 10 que 9, 9, de esta manera un profesor puede usarla para valorar que sacar un 10 es más difícil que sacar un 9.

En general, la media cuadrática le da más peso a las notas altas. Sin embargo, las medias geométricas y armónicas le dan más peso a las notas bajas. Por lo que estos dos últimos tipos de medias pueden usarse para valorar la constancia.

En particular, en este ejemplo observamos que

Notemos que la media aritmética le da el mismo valor a sacar 8, 10 que 9, 9. Pero la media cuadrática le da más valor a sacar 8, 10 que 9, 9, de esta manera un profesor puede usarla para valorar que sacar un 10 es más difícil que sacar un 9.

En general, la media cuadrática le da más peso a las notas altas. Sin embargo, las medias geométricas y armónicas le dan más peso a las notas bajas. Por lo que estos dos últimos tipos de medias pueden usarse para valorar la constancia.

En particular, en este ejemplo observamos que

$$m_{-1} \leq m_0 \leq m_1 \leq m_2.$$

Notemos que la media aritmética le da el mismo valor a sacar 8, 10 que 9, 9. Pero la media cuadrática le da más valor a sacar 8, 10 que 9, 9, de esta manera un profesor puede usarla para valorar que sacar un 10 es más difícil que sacar un 9.

En general, la media cuadrática le da más peso a las notas altas. Sin embargo, las medias geométricas y armónicas le dan más peso a las notas bajas. Por lo que estos dos últimos tipos de medias pueden usarse para valorar la constancia.

En particular, en este ejemplo observamos que

$$m_{-1} \leq m_0 \leq m_1 \leq m_2.$$

Veremos después que estas desigualdades son válidas en general, y que las igualdades se dan si y solo si

Notemos que la media aritmética le da el mismo valor a sacar 8, 10 que 9, 9. Pero la media cuadrática le da más valor a sacar 8, 10 que 9, 9, de esta manera un profesor puede usarla para valorar que sacar un 10 es más difícil que sacar un 9.

En general, la media cuadrática le da más peso a las notas altas. Sin embargo, las medias geométricas y armónicas le dan más peso a las notas bajas. Por lo que estos dos últimos tipos de medias pueden usarse para valorar la constancia.

En particular, en este ejemplo observamos que

$$m_{-1} \leq m_0 \leq m_1 \leq m_2.$$

Veremos después que estas desigualdades son válidas en general, y que las igualdades se dan si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Ejercicio

Sea $x \geq 0$. *Demostrar que*

$$x + 1 \geq 2\sqrt{x}.$$

Ejercicio

Sea $x \geq 0$*. Demostrar que*

$$x + 1 \geq 2\sqrt{x}.$$

Demostración

Ejercicio

Sea $x \geq 0$*. Demostrar que*

$$x + 1 \geq 2\sqrt{x}.$$

Demostración

Tenemos por la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética que

Ejercicio

Sea $x \geq 0$. *Demostrar que*

$$x + 1 \geq 2\sqrt{x}.$$

Demostración

Tenemos por la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética que

$$\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{(x)(1)}$$

Ejercicio

Sea $x \geq 0$. *Demostrar que*

$$x + 1 \geq 2\sqrt{x}.$$

Demostración

Tenemos por la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética que

$$\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{(x)(1)} \Leftrightarrow x + 1 \geq 2\sqrt{x}.$$

$\square$

Ejercicio

Sean $x, y > 0$*. Demostrar que*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. *Demostrar que*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Demostración

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. *Demostrar que*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Demostración

Tenemos por la desigualdad entre la media armónica y la media aritmética que

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. *Demostrar que*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Demostración

Tenemos por la desigualdad entre la media armónica y la media aritmética que

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2}$$

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. *Demostrar que*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Demostración

Tenemos por la desigualdad entre la media armónica y la media aritmética que

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2} \geq \frac{2}{x+y}$$

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. *Demostrar que*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

Demostración

Tenemos por la desigualdad entre la media armónica y la media aritmética que

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2} \geq \frac{2}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}.$$

$\square$

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $a, b, c > 0$*, se cumple que*

$$\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq 9a^2b^2c^2.$$

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $a, b, c > 0$*, se cumple que*

$$\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq 9a^2b^2c^2.$$

Demostración

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $a, b, c > 0$, *se cumple que*

$$\left(a^2 b + b^2 c + c^2 a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq 9a^2 b^2 c^2.$$

Demostración

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica nos dice que

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $a, b, c > 0$, se cumple que

$$\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq 9a^2b^2c^2.$$

Demostración

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica nos dice que

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} \Rightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $a, b, c > 0$, *se cumple que*

$$\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq 9a^2b^2c^2.$$

Demostración

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica nos dice que

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} \Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc,$$

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $a, b, c > 0$, *se cumple que*

$$\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq 9a^2b^2c^2.$$

Demostración

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica nos dice que

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} \Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc,$$

$$\frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} \Rightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $a, b, c > 0$, se cumple que

$$\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq 9a^2b^2c^2.$$

Demostración

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica nos dice que

$$\frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} \Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc,$$

$$\frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} \Rightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 3abc,$$

luego

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $a, b, c > 0$, se cumple que

$$\left(a^2 b + b^2 c + c^2 a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq 9a^2 b^2 c^2.$$

Demostración

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica nos dice que

$$\frac{a^2 b + b^2 c + c^2 a}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} \Rightarrow a^2 b + b^2 c + c^2 a \geq 3abc,$$

$$\frac{ab^2 + bc^2 + ca^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} \Rightarrow ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 3abc,$$

luego

$$\left(a^2 b + b^2 c + c^2 a\right)\left(ab^2 + bc^2 + ca^2\right) \geq (3abc)(3abc) = 9a^2 b^2 c^2.$$

□

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Demostración

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media armónica y la media geométrica,

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media armónica y la media geométrica,

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \quad \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$*,*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media armónica y la media geométrica,

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media armónica y la media geométrica,

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}$$

$$\frac{2}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \sqrt{yz} \quad \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media armónica y la media geométrica,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \\ \frac{2}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \sqrt{yz} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{yz}} \end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media armónica y la media geométrica,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \\
\frac{2}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \sqrt{yz} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{yz}} \\
\frac{2}{\frac{1}{z} + \frac{1}{x}} \leq \sqrt{zx} \quad &\Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media armónica y la media geométrica,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}\\
\frac{2}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \leq \sqrt{yz} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{2}{\sqrt{yz}}\\
\frac{2}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}} \leq \sqrt{zx} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x} \geq \frac{2}{\sqrt{zx}}.
\end{aligned}$$

Luego, sumando obtenemos

Demostración

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\geq\frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{2}{\sqrt{yz}}+\frac{2}{\sqrt{zx}}$$

$\Leftrightarrow$

Demostración

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{2}{\sqrt{yz}}+\frac{2}{\sqrt{zx}}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 2\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

Demostración

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\geq \frac{2}{\sqrt{xy}}+\frac{2}{\sqrt{yz}}+\frac{2}{\sqrt{zx}}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 2\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq \frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}.$$

□

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z \geq 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z \geq 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Demostración

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z \geq 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z \geq 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\frac{x^2 + \left(y^2 + z^2\right)}{2} \quad \geq \quad \sqrt{x^2\left(y^2 + z^2\right)} =$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z \geq 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\frac{x^2 + \left(y^2 + z^2\right)}{2} \quad \geq \quad \sqrt{x^2\left(y^2 + z^2\right)} = x\sqrt{y^2 + z^2}$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z \geq 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + \left(y^2 + z^2\right)}{2} &\geq \sqrt{x^2\left(y^2 + z^2\right)} = x\sqrt{y^2 + z^2} \\ \frac{y^2 + \left(x^2 + z^2\right)}{2} &\geq \sqrt{y^2\left(x^2 + z^2\right)} = \end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z \geq 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + \left(y^2 + z^2\right)}{2} &\geq \sqrt{x^2\left(y^2 + z^2\right)} = x\sqrt{y^2 + z^2} \\ \frac{y^2 + \left(x^2 + z^2\right)}{2} &\geq \sqrt{y^2\left(x^2 + z^2\right)} = y\sqrt{x^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z \geq 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + \left(y^2 + z^2\right)}{2} &\geq \sqrt{x^2\left(y^2 + z^2\right)} = x\sqrt{y^2 + z^2} \\ \frac{y^2 + \left(x^2 + z^2\right)}{2} &\geq \sqrt{y^2\left(x^2 + z^2\right)} = y\sqrt{x^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Luego, sumando obtenemos

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z \geq 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + \left(y^2 + z^2\right)}{2} &\geq \sqrt{x^2\left(y^2 + z^2\right)} = x\sqrt{y^2 + z^2} \\ \frac{y^2 + \left(x^2 + z^2\right)}{2} &\geq \sqrt{y^2\left(x^2 + z^2\right)} = y\sqrt{x^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Luego, sumando obtenemos

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}.$$

□

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Demostración

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} \quad \geq \quad \sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{yz}{x}\right)} \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{yz}{x}\right)} \Leftrightarrow \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2y,$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{yz}{x}\right)} \Leftrightarrow \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2y, \\ \frac{\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{zx}{y}\right)} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{yz}{x}\right)} \Leftrightarrow \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2y, \\
\frac{\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{zx}{y}\right)} \Leftrightarrow \frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} \geq 2x,
\end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{yz}{x}\right)} \Leftrightarrow \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2y, \\
\frac{\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{zx}{y}\right)} \Leftrightarrow \frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} \geq 2x, \\
\frac{\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{zx}{y}\right)} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{yz}{x}\right)} \Leftrightarrow \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2y, \\
\frac{\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{zx}{y}\right)} \Leftrightarrow \frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} \geq 2x, \\
\frac{\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{zx}{y}\right)} \Leftrightarrow \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 2z.
\end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que para $x, y, z > 0$,

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

Demostración

Por la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética tenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{yz}{x}\right)} \Leftrightarrow \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2y, \\
\frac{\frac{xy}{z} + \frac{zx}{y}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{xy}{z}\right)\left(\frac{zx}{y}\right)} \Leftrightarrow \frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} \geq 2x, \\
\frac{\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}}{2} &\geq \sqrt{\left(\frac{yz}{x}\right)\left(\frac{zx}{y}\right)} \Leftrightarrow \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 2z.
\end{aligned}$$

Sumando obtenemos

Demostración

$$2\frac{xy}{z} + 2\frac{yz}{x} + 2\frac{zx}{y} \geq 2x + 2y + 2z \Leftrightarrow$$

Demostración

$$2\frac{xy}{z} + 2\frac{yz}{x} + 2\frac{zx}{y} \geq 2x + 2y + 2z \Leftrightarrow \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x + y + z.$$

$\square$

Ejercicio

Encontrar el valor máximo de $x\left(1-x^3\right)$ *para* $0 \leq x \leq 1$.

Ejercicio

Encontrar el valor máximo de $x\left(1-x^3\right)$ *para* $0 \leq x \leq 1$.

Demostración

Ejercicio

Encontrar el valor máximo de $x\left(1-x^3\right)$ *para* $0 \leq x \leq 1$.

Demostración

Si $y = x\left(1-x^3\right)$, *entonces*

Ejercicio

Encontrar el valor máximo de $x\left(1-x^3\right)$ *para* $0 \leq x \leq 1$.

Demostración

Si $y = x\left(1-x^3\right)$, *entonces*

$$y^3 = x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right) \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Encontrar el valor máximo de $x\left(1-x^3\right)$ *para* $0 \leq x \leq 1$.

Demostración

Si $y = x\left(1-x^3\right)$, *entonces*

$$y^3 = x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right) \Leftrightarrow 3y^3 = 3x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right),$$

donde

Ejercicio

Encontrar el valor máximo de $x\left(1-x^3\right)$ *para* $0 \leq x \leq 1$.

Demostración

Si $y = x\left(1-x^3\right)$, *entonces*

$$y^3 = x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right) \Leftrightarrow 3y^3 = 3x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right),$$

donde

$$3x^3 + \left(1-x^3\right) + \left(1-x^3\right) + \left(1-x^3\right) =$$

Ejercicio

Encontrar el valor máximo de $x\left(1-x^3\right)$ *para* $0 \leq x \leq 1$.

Demostración

Si $y = x\left(1-x^3\right)$, *entonces*

$$y^3 = x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right) \Leftrightarrow 3y^3 = 3x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right),$$

donde

$$3x^3 + \left(1-x^3\right) + \left(1-x^3\right) + \left(1-x^3\right) = 3.$$

Ejercicio

Encontrar el valor máximo de $x\left(1-x^3\right)$ *para* $0 \le x \le 1$.

Demostración

Si $y = x\left(1-x^3\right)$, *entonces*

$$y^3 = x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right) \Leftrightarrow 3y^3 = 3x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right),$$

donde

$$3x^3 + \left(1-x^3\right) + \left(1-x^3\right) + \left(1-x^3\right) = 3.$$

Luego por la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética,

Ejercicio

Encontrar el valor máximo de $x\left(1-x^3\right)$ *para* $0 \leq x \leq 1$.

Demostración

Si $y = x\left(1-x^3\right)$, *entonces*

$$y^3 = x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right) \Leftrightarrow 3y^3 = 3x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right),$$

donde

$$3x^3 + \left(1-x^3\right) + \left(1-x^3\right) + \left(1-x^3\right) = 3.$$

Luego por la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética,

$$\sqrt[4]{3y^3} = \sqrt[4]{3x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)} \leq \frac{3x^3 + 3\left(1-x^3\right)}{4} =$$

Ejercicio

Encontrar el valor máximo de $x\left(1-x^3\right)$ *para* $0 \leq x \leq 1$.

Demostración

Si $y = x\left(1-x^3\right)$, *entonces*

$$y^3 = x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right) \Leftrightarrow 3y^3 = 3x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right),$$

donde

$$3x^3 + \left(1-x^3\right) + \left(1-x^3\right) + \left(1-x^3\right) = 3.$$

Luego por la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética,

$$\sqrt[4]{3y^3} = \sqrt[4]{3x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^3\right)} \leq \frac{3x^3 + 3\left(1-x^3\right)}{4} = \frac{3}{4}.$$

De donde

Demostración

$$3y^3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow$$

Demostración

$$3y^3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow y^3 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4 =$$

Demostración

$$3y^3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow y^3 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4} \Leftrightarrow$$

Demostración

$$3y^3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow y^3 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4} \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4^4}} =$$

Demostración

$$3y^3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow y^3 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4} \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4^4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4\left(4^3\right)}} =$$

Demostración

$$3y^3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow y^3 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4} \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4^4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4\left(4^3\right)}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}.$$

Además, el valor máximo se alcanza cuando

Demostración

$$3y^3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow y^3 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4} \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4^4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4\left(4^3\right)}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}.$$

Además, el valor máximo se alcanza cuando

$$3x^3 = 1 - x^3 \Leftrightarrow$$

Demostración

$$3y^3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow y^3 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4} \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4^4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4\left(4^3\right)}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}.$$

Además, el valor máximo se alcanza cuando

$$3x^3 = 1 - x^3 \Leftrightarrow 4x^3 = 1 \Leftrightarrow$$

Demostración

$$3y^3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow y^3 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4} \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4^4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4\left(4^3\right)}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}.$$

Además, el valor máximo se alcanza cuando

$$3x^3 = 1 - x^3 \Leftrightarrow 4x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

Demostración

$$3y^3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow y^3 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3^3}{4^4} \Leftrightarrow y \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4^4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4\left(4^3\right)}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}.$$

Además, el valor máximo se alcanza cuando

$$3x^3 = 1 - x^3 \Leftrightarrow 4x^3 = 1 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

$\square$

Ejercicio

Sean p y q dos números reales positivos tales que $p+q=1$. Demostrar que

$$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2\geq\frac{25}{2}.$$

¿Cuándo se obtiene la igualdad?

Ejercicio

Sean p y q dos números reales positivos tales que $p+q=1$. Demostrar que

$$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

¿Cuándo se obtiene la igualdad?

Demostración

Ejercicio

Sean p y q dos números reales positivos tales que $p+q=1$. Demostrar que

$$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2\geq\frac{25}{2}.$$

¿Cuándo se obtiene la igualdad?

Demostración

Usando la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática, tenemos que

Ejercicio

Sean p y q dos números reales positivos tales que $p+q=1$. Demostrar que

$$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

¿Cuándo se obtiene la igualdad?

Demostración

Usando la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática, tenemos que

$$\frac{p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}}{2} \leq \sqrt{\frac{\left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2}{2}}$$

o equivalentemente

Ejercicio

Sean p y q dos números reales positivos tales que $p+q=1$. Demostrar que

$$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

¿Cuándo se obtiene la igualdad?

Demostración

Usando la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática, tenemos que

$$\frac{p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}}{2} \leq \sqrt{\frac{\left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2}{2}}$$

o equivalentemente

$$\frac{\left(p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}\right)^2}{4} \leq \frac{\left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2}{2},$$

Demostración

esto es

$$\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2.$$

Demostración

esto es

$$\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2.$$

Usando ahora que $p+q=1$, *se obtiene*

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2. \tag{3}$$

Demostración

esto es

$$\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2.$$

Usando ahora que $p+q=1$, *se obtiene*

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2. \tag{3}$$

Utilizando ahora la desigualdad entre la media aritmética y la media armónica (junto con el hecho de que $p+q=1$*) tenemos que*

Demostración

esto es

$$\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2.$$

Usando ahora que $p+q=1$, *se obtiene*

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2. \tag{3}$$

Utilizando ahora la desigualdad entre la media aritmética y la media armónica (junto con el hecho de que $p+q=1$*) tenemos que*

$$\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \frac{p+q}{2} \Rightarrow$$

Demostración

esto es

$$\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2.$$

Usando ahora que $p+q=1$, se obtiene

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2. \tag{3}$$

Utilizando ahora la desigualdad entre la media aritmética y la media armónica (junto con el hecho de que $p+q=1$) tenemos que

$$\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \frac{p+q}{2} \Rightarrow \frac{2}{p+q} \leq \frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{2} \Rightarrow$$

Demostración

esto es

$$\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2.$$

Usando ahora que $p+q=1$, se obtiene

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2. \tag{3}$$

Utilizando ahora la desigualdad entre la media aritmética y la media armónica (junto con el hecho de que $p+q=1$) tenemos que

$$\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \frac{p+q}{2} \Rightarrow \frac{2}{p+q} \leq \frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{2} \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq \frac{4}{p+q}=4.$$

Demostración

esto es

$$\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2.$$

Usando ahora que $p+q=1$, se obtiene

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2. \tag{3}$$

Utilizando ahora la desigualdad entre la media aritmética y la media armónica (junto con el hecho de que $p+q=1$) tenemos que

$$\frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \frac{p+q}{2} \Rightarrow \frac{2}{p+q} \leq \frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{2} \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq \frac{4}{p+q}=4.$$

Sustituyendo esta información en (3) se obtiene

Demostración

$$\frac{25}{2} = \frac{1}{2}(1+4)^2 \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2 + \left(q+\frac{1}{q}\right)^2,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Demostración

$$\frac{25}{2} = \frac{1}{2}(1+4)^2 \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^2 \leq \left(p+\frac{1}{p}\right)^2 + \left(q+\frac{1}{q}\right)^2,$$

que es lo que queríamos demostrar. Para que se alcance la igualdad debe cumplirse que $p = q = \frac{1}{2}$ *(por la igualdad en la desigualdad entre la media aritmética y la media armónica).* $\square$

Teorema

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \qquad y \qquad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n.$$

Para cada permutación $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*, se tiene que*

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\geq a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n && (4)\\ &\geq a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n. && (5) \end{aligned}$$

Teorema

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \qquad y \qquad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n.$$

Para cada permutación $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*, se tiene que*

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\geq a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n && (4) \\ &\geq a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n. && (5) \end{aligned}$$

La igualdad en (4) es cierta si y sólo si

Teorema

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \qquad y \qquad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n.$$

Para cada permutación $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *se tiene que*

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\geq a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n && (4)\\ &\geq a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n. && (5)\end{aligned}$$

La igualdad en (4) es cierta si y sólo si $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y la igualdad en (5) es cierta si y sólo si*

Teorema

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \qquad y \qquad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n.$$

Para cada permutación $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *se tiene que*

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\geq a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n &(4)\\ &\geq a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n. &(5)\end{aligned}$$

La igualdad en (4) es cierta si y sólo si $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y la igualdad en (5) es cierta si y sólo si* $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$.

Teorema

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \qquad y \qquad b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n.$$

Para cada permutación $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *se tiene que*

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\geq a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n && (4) \\ &\geq a_n b_1 + a_{n-1} b_2 + \cdots + a_1 b_n. && (5) \end{aligned}$$

La igualdad en (4) es cierta si y sólo si $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *y la igualdad en (5) es cierta si y sólo si* $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)$.

A la desigualdad (4) se le llama la **desigualdad del reacomodo**.

Demostración

Demostración

Supongamos que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

Demostración

Supongamos que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

Sean

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r + \cdots + a_s b_s + \cdots + a_n b_n$$

y

$$S' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_s b_r + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_n b_n.$$

Notemos que

Demostración

Supongamos que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

Sean

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r + \cdots + a_s b_s + \cdots + a_n b_n$$

y

$$S' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_s b_r + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_n b_n.$$

Notemos que

$$S - S' = a_r b_r + a_s b_s - a_s b_r - a_r b_s =$$

Demostración

Supongamos que $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$.

Sean

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r + \cdots + a_s b_s + \cdots + a_n b_n$$

y

$$S' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_s b_r + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_n b_n.$$

Notemos que

$$S - S' = a_r b_r + a_s b_s - a_s b_r - a_r b_s = (b_s - b_r)(a_s - a_r).$$

Demostración

Supongamos que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

Sean

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r + \cdots + a_s b_s + \cdots + a_n b_n$$

y

$$S' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_s b_r + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_n b_n.$$

Notemos que

$$S - S' = a_r b_r + a_s b_s - a_s b_r - a_r b_s = (b_s - b_r)(a_s - a_r).$$

Como $s > r$, $b_s - b_r \geq 0$ *y así*

Demostración

Supongamos que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

Sean

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r + \cdots + a_s b_s + \cdots + a_n b_n$$

y

$$S' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_s b_r + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_n b_n.$$

Notemos que

$$S - S' = a_r b_r + a_s b_s - a_s b_r - a_r b_s = (b_s - b_r)(a_s - a_r).$$

Como $s > r$, $b_s - b_r \geq 0$ *y así* $S - S' \geq 0$ *si y sólo si*

Demostración

Supongamos que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

Sean

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r + \cdots + a_s b_s + \cdots + a_n b_n$$

y

$$S' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_s b_r + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_n b_n.$$

Notemos que

$$S - S' = a_r b_r + a_s b_s - a_s b_r - a_r b_s = (b_s - b_r)(a_s - a_r).$$

Como $s > r$, $b_s - b_r \geq 0$ *y así* $S - S' \geq 0$ *si y sólo si* $a_s - a_r \geq 0$, *o equivalentemente,*

Demostración

Supongamos que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

Sean

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r + \cdots + a_s b_s + \cdots + a_n b_n$$

y

$$S' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_s b_r + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_n b_n.$$

Notemos que

$$S - S' = a_r b_r + a_s b_s - a_s b_r - a_r b_s = (b_s - b_r)(a_s - a_r).$$

Como $s > r$, $b_s - b_r \geq 0$ *y así* $S - S' \geq 0$ *si y sólo si* $a_s - a_r \geq 0$, *o equivalentemente,* $S \geq S'$ *si y sólo si*

Demostración

Supongamos que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

Sean

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r + \cdots + a_s b_s + \cdots + a_n b_n$$

y

$$S' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_s b_r + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_n b_n.$$

Notemos que

$$S - S' = a_r b_r + a_s b_s - a_s b_r - a_r b_s = (b_s - b_r)(a_s - a_r).$$

Como $s > r$, $b_s - b_r \geq 0$ *y así* $S - S' \geq 0$ *si y sólo si* $a_s - a_r \geq 0$, *o equivalentemente,* $S \geq S'$ *si y sólo si* $a_s \geq a_r$.

Demostración

Supongamos que $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$.

Sean

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_r b_r + \cdots + a_s b_s + \cdots + a_n b_n$$

y

$$S' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_s b_r + \cdots + a_r b_s + \cdots + a_n b_n.$$

Notemos que

$$S - S' = a_r b_r + a_s b_s - a_s b_r - a_r b_s = (b_s - b_r)(a_s - a_r).$$

Como $s > r$, $b_s - b_r \geq 0$ *y así* $S - S' \geq 0$ *si y sólo si* $a_s - a_r \geq 0$, *o equivalentemente,* $S \geq S'$ *si y sólo si* $a_s \geq a_r$. *Repitiendo este proceso tenemos que la suma* S *es la mayor cuando* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. $\square$

Corolario

Para cada permutación $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*, se tiene que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \cdots + a_n a'_n.$$

Corolario

Para cada permutación $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *se tiene que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \cdots + a_n a'_n.$$

Demostración

Se sigue de (4) tomando $b_i = a_i$, $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Corolario

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. *Para cada permutación* $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *se tiene que*

$$\frac{a_1'}{a_1} + \frac{a_2'}{a_2} + \cdots + \frac{a_n'}{a_n} \geq n.$$

Corolario

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. *Para cada permutación* $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *se tiene que*

$$\frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2} + \cdots + \frac{a'_n}{a_n} \geq n.$$

Demostración

No existe pérdida de generalidad en suponer que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. *Entonces*

Corolario

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. *Para cada permutación* $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *se tiene que*

$$\frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2} + \cdots + \frac{a'_n}{a_n} \geq n.$$

Demostración

No existe pérdida de generalidad en suponer que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. *Entonces*

$$\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_{n-1}} \leq \cdots \leq \frac{1}{a_1}.$$

Luego de (5),

Corolario

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$*. Para cada permutación* $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$*, se tiene que*

$$\frac{a_1'}{a_1} + \frac{a_2'}{a_2} + \cdots + \frac{a_n'}{a_n} \geq n.$$

Demostración

No existe pérdida de generalidad en suponer que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$*. Entonces*

$$\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_{n-1}} \leq \cdots \leq \frac{1}{a_1}.$$

Luego de (5),

$$n = \left(\frac{1}{a_1}\right) a_1 + \left(\frac{1}{a_2}\right) a_2 + \cdots + \left(\frac{1}{a_n}\right) a_n \leq$$

Corolario

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. *Para cada permutación* $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *se tiene que*

$$\frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2} + \cdots + \frac{a'_n}{a_n} \geq n.$$

Demostración

No existe pérdida de generalidad en suponer que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. *Entonces*

$$\frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{a_{n-1}} \leq \cdots \leq \frac{1}{a_1}.$$

Luego de (5),

$$n = \left(\frac{1}{a_1}\right) a_1 + \left(\frac{1}{a_2}\right) a_2 + \cdots + \left(\frac{1}{a_n}\right) a_n \leq \frac{a'_1}{a_1} + \frac{a'_2}{a_2} + \cdots + \frac{a'_n}{a_n}.$$

□

Media armónica, geométrica y aritmética

Teorema

Si $x_1, \ldots, x_n > 0$*, entonces*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

y las igualdades se dan si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demostración

Se demostró ya (usando la desigualdad del reacomodo) que si $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ *es una permutación de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *donde* $a_i > 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$, *entonces*

$$\frac{a_1}{a_1'} + \frac{a_2}{a_2'} + \cdots + \frac{a_n}{a_n'} \geq n. \tag{6}$$

Demostración

Se demostró ya (usando la desigualdad del reacomodo) que si $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *es una permutación de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *donde* $a_i > 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$*, entonces*

$$\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} + \cdots + \frac{a_n}{a'_n} \geq n. \tag{6}$$

Sea $m_0 = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ *y consideremos* $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{x_1}{m_0}, \frac{x_1 x_2}{m_0^2}, \ldots, \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{m_0^n}\right)$.
Por (6) tenemos que

Demostración

Se demostró ya (usando la desigualdad del reacomodo) que si $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *es una permutación de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *donde* $a_i > 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$, *entonces*

$$\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} + \cdots + \frac{a_n}{a'_n} \geq n. \tag{6}$$

Sea $m_0 = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ *y consideremos* $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{x_1}{m_0}, \frac{x_1 x_2}{m_0^2}, \ldots, \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{m_0^n}\right)$. *Por (6) tenemos que*

$$n \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} = \frac{m_0}{x_2} + \frac{m_0}{x_3} + \cdots + \frac{m_0}{x_n} + \frac{m_0}{x_1},$$

luego

Demostración

Se demostró ya (usando la desigualdad del reacomodo) que si $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *es una permutación de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *donde* $a_i > 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$, *entonces*

$$\frac{a_1}{a'_1} + \frac{a_2}{a'_2} + \cdots + \frac{a_n}{a'_n} \geq n. \tag{6}$$

Sea $m_0 = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ *y consideremos* $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{x_1}{m_0}, \frac{x_1 x_2}{m_0^2}, \ldots, \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{m_0^n}\right)$. *Por (6) tenemos que*

$$n \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} = \frac{m_0}{x_2} + \frac{m_0}{x_3} + \cdots + \frac{m_0}{x_n} + \frac{m_0}{x_1},$$

luego

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq m_0.$$

Demostración

De nuevo por (6),

$$n \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x_1}{m_0} + \frac{x_2}{m_0} + \cdots + \frac{x_n}{m_0},$$

luego

Demostración

De nuevo por (6),

$$n \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x_1}{m_0} + \frac{x_2}{m_0} + \cdots + \frac{x_n}{m_0},$$

luego

$$m_0 \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Demostración

De nuevo por (6),

$$n \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x_1}{m_0} + \frac{x_2}{m_0} + \cdots + \frac{x_n}{m_0},$$

luego

$$m_0 \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Las igualdades ocurren si y sólo si

Demostración

De nuevo por (6),

$$n \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x_1}{m_0} + \frac{x_2}{m_0} + \cdots + \frac{x_n}{m_0},$$

luego

$$m_0 \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Las igualdades ocurren si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$*, es decir, si y sólo si*

Demostración

De nuevo por (6),

$$n \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x_1}{m_0} + \frac{x_2}{m_0} + \cdots + \frac{x_n}{m_0},$$

luego

$$m_0 \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Las igualdades ocurren si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, *es decir, si y sólo si*

$$\frac{x_1}{m_0} = \frac{x_1 x_2}{m_0^2} = \cdots = 1 \left(= \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{m_0^n} \right)$$

si y sólo si

Demostración

De nuevo por (6),

$$n \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x_1}{m_0} + \frac{x_2}{m_0} + \cdots + \frac{x_n}{m_0},$$

luego

$$m_0 \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Las igualdades ocurren si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$*, es decir, si y sólo si*

$$\frac{x_1}{m_0} = \frac{x_1 x_2}{m_0^2} = \cdots = 1 \left(= \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{m_0^n} \right)$$

si y sólo si $m_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. $\square$

Desigualdad de Tchebyshev

Teorema

Si $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ *y* $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, *entonces*

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}.$$

Demostración

Aplicando varias veces la desigualdad del reacomodo obtenemos

Demostración

Aplicando varias veces la desigualdad del reacomodo obtenemos

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1},
\end{aligned}$$

al sumar todas las expresiones, obtenemos

Demostración

Aplicando varias veces la desigualdad del reacomodo obtenemos

$$\begin{aligned}
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_1 \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\geq a_1 b_3 + a_2 b_4 + \cdots + a_n b_2 \\
\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n &\geq a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1},
\end{aligned}$$

al sumar todas las expresiones, obtenemos

$$n\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n\right) \geq \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right),$$

Demostración

Aplicando varias veces la desigualdad del reacomodo obtenemos

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1},
\end{aligned}$$

al sumar todas las expresiones, obtenemos

$$n\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n\right) \geq \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right)\left(b_1 + b_2 + \cdots + b_n\right),$$

de lo cual, la desigualdad de Tchebyshev se sigue multiplicando por $\frac{1}{n^2}$. $\square$

Desigualdad media cuadrática-media aritmética

Corolario

Si $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, *entonces*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Desigualdad media cuadrática-media aritmética

Corolario

Si $x_1, \ldots, x_n \geq 0$*, entonces*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Demostración

Desigualdad media cuadrática-media aritmética

Corolario

Si $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, *entonces*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Demostración

Por la desigualdad de Tchebyshev con $a_i = b_i = x_i$, $i = 1 \ldots, n$, *tenemos que*

Desigualdad media cuadrática-media aritmética

Corolario

Si $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, *entonces*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Demostración

Por la desigualdad de Tchebyshev con $a_i = b_i = x_i$, $i = 1 \ldots, n$, *tenemos que*

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^2.$$

Desigualdad media cuadrática-media aritmética

Corolario

Si $x_1, \ldots, x_n \geq 0$*, entonces*

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Demostración

Por la desigualdad de Tchebyshev con $a_i = b_i = x_i$, $i = 1 \ldots, n$, *tenemos que*

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^2.$$

Luego, tomando raíz cuadrada, se sigue que

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

□

Ejercicio

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \qquad y \qquad y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n.$$

Si $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *es una permutación de* $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$*, demostrar que*

$$(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + \cdots + (x_n - z_n)^2 .$$

Demostración

Desarrollando los binomios, tenemos que la desigualdad anterior es equivalente a

Demostración

Desarrollando los binomios, tenemos que la desigualdad anterior es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2,$$

Demostración

Desarrollando los binomios, tenemos que la desigualdad anterior es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2,$$

pero como $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$*, la desigualdad que tenemos que demostrar es equivalente a probar que*

Demostración

Desarrollando los binomios, tenemos que la desigualdad anterior es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2,$$

pero como $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$*, la desigualdad que tenemos que demostrar es equivalente a probar que*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

Demostración

Desarrollando los binomios, tenemos que la desigualdad anterior es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} z_i^2,$$

pero como $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2$, *la desigualdad que tenemos que demostrar es equivalente a probar que*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

la cual es la desigualdad del reacomodo. □

Ejercicio

Sean $a, b, c \geq 0$. *Demostrar que* $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.

Ejercicio

Sean $a, b, c \geq 0$. *Demostrar que* $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

Demostración

Ejercicio

Sean $a, b, c \geq 0$. *Demostrar que* $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

Demostración

Como la expresión es simétrica en a, b *y* c *podemos suponer sin perder generalidad que* $a \leq b \leq c$. *Entonces, debido a que* $a, b, c \geq 0$, *se tiene que*

Ejercicio

Sean $a, b, c \geq 0$. *Demostrar que* $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.

Demostración

Como la expresión es simétrica en a, b *y* c *podemos suponer sin perder generalidad que* $a \leq b \leq c$. *Entonces, debido a que* $a, b, c \geq 0$, *se tiene que* $a^2 \leq b^2 \leq c^2$. *Luego, por la desigualdad del reacomodo*

Ejercicio

Sean $a, b, c \geq 0$. *Demostrar que* $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.

Demostración

Como la expresión es simétrica en a, b *y* c *podemos suponer sin perder generalidad que* $a \leq b \leq c$. *Entonces, debido a que* $a, b, c \geq 0$, *se tiene que* $a^2 \leq b^2 \leq c^2$. *Luego, por la desigualdad del reacomodo*

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2(a) + b^2(b) + c^2(c) \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

□

Ejercicio

Sean $a, b, c > 0$ *con* $abc = 1$. *Demostrar que*

$$a^3 + b^3 + c^3 + (ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 \geq 2\left(a^2 b + b^2 c + c^2 a\right).$$

Demostración

Podemos suponer que $c \leq b \leq a$. *Por el ejercicio anterior tenemos*

Demostración

Podemos suponer que $c \leq b \leq a$. *Por el ejercicio anterior tenemos*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a. \tag{7}$$

Como $c \leq b \leq a$, *entonces*

Demostración

Podemos suponer que $c \leq b \leq a$. *Por el ejercicio anterior tenemos*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a. \tag{7}$$

Como $c \leq b \leq a$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$ *y debido a que* $a, b, c > 0$,

Demostración

Podemos suponer que $c \leq b \leq a$. *Por el ejercicio anterior tenemos*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a. \tag{7}$$

Como $c \leq b \leq a$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$ *y debido a que* $a, b, c > 0$, $\frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{c^2}$.

También, debido a que $abc = 1$, *se cumple que*

Demostración

Podemos suponer que $c \leq b \leq a$*. Por el ejercicio anterior tenemos*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a. \tag{7}$$

Como $c \leq b \leq a$*, entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$ *y debido a que* $a, b, c > 0$*,* $\frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{c^2}$*.*

También, debido a que $abc = 1$*, se cumple que* $bc = \frac{1}{a}$*,* $ca = \frac{1}{b}$ *y* $ab = \frac{1}{c}$*. Luego, usando la desigualdad del reacomodo, se obtiene*

Demostración

Podemos suponer que $c \leq b \leq a$. Por el ejercicio anterior tenemos

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a. \tag{7}$$

Como $c \leq b \leq a$, entonces $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$ y debido a que $a, b, c > 0$, $\frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{c^2}$.

También, debido a que $abc = 1$, se cumple que $bc = \frac{1}{a}$, $ca = \frac{1}{b}$ y $ab = \frac{1}{c}$. Luego, usando la desigualdad del reacomodo, se obtiene

$$\begin{aligned}(ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 &= \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq \frac{1}{a^2}\frac{1}{c} + \frac{1}{b^2}\frac{1}{a} + \frac{1}{c^2}\frac{1}{b} \\ &= a^2 b + b^2 c + c^2 a. \end{aligned} \tag{8}$$

Sumando las desigualdades (7) y (8) se obtiene,

Demostración

Podemos suponer que $c \leq b \leq a$. *Por el ejercicio anterior tenemos*

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a. \tag{7}$$

Como $c \leq b \leq a$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$ *y debido a que* $a, b, c > 0$, $\frac{1}{a^2} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{c^2}$.

También, debido a que $abc = 1$, *se cumple que* $bc = \frac{1}{a}$, $ca = \frac{1}{b}$ *y* $ab = \frac{1}{c}$. *Luego, usando la desigualdad del reacomodo, se obtiene*

$$\begin{aligned}(ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 &= \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq \frac{1}{a^2}\frac{1}{c} + \frac{1}{b^2}\frac{1}{a} + \frac{1}{c^2}\frac{1}{b} \\ &= a^2 b + b^2 c + c^2 a. \end{aligned} \tag{8}$$

Sumando las desigualdades (7) y (8) se obtiene,

$$a^3 + b^3 + c^3 + (ab)^3 + (bc)^3 + (ca)^3 \geq 2\left(a^2 b + b^2 c + c^2 a\right).$$

□

Ejercicio

Sean $a, b, c > 0$. *Demostrar que*

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Ejercicio

Sean $a, b, c > 0$. *Demostrar que*

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Demostración

Ejercicio

Sean $a, b, c > 0$. *Demostrar que*

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Demostración

Podemos suponer, sin perder generalidad que $c \leq b \leq a$. *Entonces*

Ejercicio

Sean $a, b, c > 0$. Demostrar que

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Demostración

Podemos suponer, sin perder generalidad que $c \leq b \leq a$. Entonces

$$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}.$$

Ejercicio

Sean $a, b, c > 0$. *Demostrar que*

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Demostración

Podemos suponer, sin perder generalidad que $c \leq b \leq a$. *Entonces*

$$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}.$$

Luego, usando la desigualdad del reacomodo con
$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ *y* $(a_1', a_2', a_3') = \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}\right)$, *tenemos*

Ejercicio

Sean $a, b, c > 0$. *Demostrar que*

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Demostración

Podemos suponer, sin perder generalidad que $c \leq b \leq a$. *Entonces*

$$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}.$$

Luego, usando la desigualdad del reacomodo con
$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ *y* $(a_1', a_2', a_3') = \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}\right)$, *tenemos*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} =$$

Ejercicio

Sean $a, b, c > 0$. *Demostrar que*

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Demostración

Podemos suponer, sin perder generalidad que $c \leq b \leq a$. *Entonces*

$$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}.$$

Luego, usando la desigualdad del reacomodo con
$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ *y* $(a'_1, a'_2, a'_3) = \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}\right)$, *tenemos*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{a+b+c}{abc}.$$

□

Ejercicio

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc. \tag{9}$$

Ejercicio

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc. \tag{9}$$

Demostración

Ejercicio

Sean a, b, c *las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que*

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc. \tag{9}$$

Demostración

Como a, b *y* c *son las longitudes de los lados de un triángulo, tenemos que*

Ejercicio

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc. \tag{9}$$

Demostración

Como a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, tenemos que

$$a+b-c\geq 0, \quad a+c-b\geq 0 \quad y \quad b+c-a\geq 0.$$

Ejercicio

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)\leq 3abc. \tag{9}$$

Demostración

Como a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, tenemos que

$$a+b-c\geq 0, \quad a+c-b\geq 0 \quad y \quad b+c-a\geq 0.$$

Notando ahora que la expresión (9) es simétrica en a, b y c, podemos suponer sin perder generalidad que $c\leq b\leq a$. Veremos que en este caso,

Ejercicio

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc. \tag{9}$$

Demostración

Como a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, tenemos que

$$a+b-c \geq 0, \quad a+c-b \geq 0 \quad y \quad b+c-a \geq 0.$$

Notando ahora que la expresión (9) es simétrica en a, b y c, podemos suponer sin perder generalidad que $c \leq b \leq a$. Veremos que en este caso,

$$a(b+c-a) \leq b(a+c-b) \leq c(a+b-c).$$

Ejercicio

Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Demostrar que

$$a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc. \tag{9}$$

Demostración

Como a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, tenemos que

$$a+b-c \geq 0, \quad a+c-b \geq 0 \quad y \quad b+c-a \geq 0.$$

Notando ahora que la expresión (9) es simétrica en a, b y c, podemos suponer sin perder generalidad que $c \leq b \leq a$. Veremos que en este caso,

$$a(b+c-a) \leq b(a+c-b) \leq c(a+b-c).$$

En efecto, la primera desigualdad se sigue de lo siguiente

Demostración

$$
\begin{aligned}
a(b+c-a) \leq b(a+c-b) \quad &\Leftrightarrow \quad ab+ac-a^2 \leq ab+bc-b^2 \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
a(b+c-a) \leq b(a+c-b) \quad &\Leftrightarrow \quad ab+ac-a^2 \leq ab+bc-b^2 \\
&\Leftrightarrow \quad ac-bc \leq a^2-b^2 \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
a(b+c-a) \leq b(a+c-b) &\Leftrightarrow ab+ac-a^2 \leq ab+bc-b^2 \\
&\Leftrightarrow ac-bc \leq a^2-b^2 \\
&\Leftrightarrow (a-b)c \leq (a+b)(a-b) \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

Demostración

$$\begin{aligned}
a(b+c-a) \leq b(a+c-b) &\Leftrightarrow ab+ac-a^2 \leq ab+bc-b^2 \\
&\Leftrightarrow ac-bc \leq a^2-b^2 \\
&\Leftrightarrow (a-b)c \leq (a+b)(a-b) \\
&\Leftrightarrow (a+b)(a-b)-(a-b)c \geq 0 \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
a(b+c-a) \leq b(a+c-b) \quad &\Leftrightarrow \quad ab+ac-a^2 \leq ab+bc-b^2 \\
&\Leftrightarrow \quad ac-bc \leq a^2-b^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (a-b)c \leq (a+b)(a-b) \\
&\Leftrightarrow \quad (a+b)(a-b)-(a-b)c \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{(a-b)}_{\geq 0}\underbrace{(a+b-c)}_{\geq 0} \geq 0.
\end{aligned}
$$

Demostración

$$\begin{aligned}
a(b+c-a) \leq b(a+c-b) \quad &\Leftrightarrow \quad ab+ac-a^2 \leq ab+bc-b^2 \\
&\Leftrightarrow \quad ac-bc \leq a^2-b^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (a-b)c \leq (a+b)(a-b) \\
&\Leftrightarrow \quad (a+b)(a-b)-(a-b)c \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{(a-b)}_{\geq 0}\underbrace{(a+b-c)}_{\geq 0} \geq 0.
\end{aligned}$$

La segunda desigualdad se demuestra en forma análoga.

Demostración

Usando ahora la desigualdad (5), tenemos

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq ba(b+c-a)+cb(c+a-b)+ac(a+b-c)$$

y

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq ca(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c).$$

Por lo tanto

Demostración

Usando ahora la desigualdad (5), tenemos

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq ba(b+c-a)+cb(c+a-b)+ac(a+b-c)$$

y

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq ca(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c).$$

Por lo tanto

$$2\left[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\right] \leq 6abc$$

o equivalentemente

Demostración

Usando ahora la desigualdad (5), tenemos

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq ba(b+c-a)+cb(c+a-b)+ac(a+b-c)$$

y

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq ca(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c).$$

Por lo tanto

$$2\left[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\right] \leq 6abc$$

o equivalentemente

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

□

Desigualdad de Nesbitt

Ejercicio

Dados $a, b, c > 0$, *demostrar que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

y que la igualdad se alcanza si y solo si $a = b = c$.

Desigualdad de Nesbitt

Ejercicio

Dados $a, b, c > 0$, *demostrar que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

y que la igualdad se alcanza si y solo si $a = b = c$.

Demostración

Desigualdad de Nesbitt

Ejercicio

Dados $a, b, c > 0$, *demostrar que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

y que la igualdad se alcanza si y solo si $a = b = c$.

Demostración

Como la expresión es simétrica en a, b *y* c, *podemos suponer sin perder generalidad que* $a \leq b \leq c$. *Luego*

Desigualdad de Nesbitt

Ejercicio

Dados $a, b, c > 0$, *demostrar que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

y que la igualdad se alcanza si y solo si $a = b = c$.

Demostración

Como la expresión es simétrica en a, b *y* c, *podemos suponer sin perder generalidad que* $a \leq b \leq c$. *Luego*

$$a + b \leq a + c \leq b + c$$

Desigualdad de Nesbitt

Ejercicio

Dados $a, b, c > 0$, *demostrar que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

y que la igualdad se alcanza si y solo si $a = b = c$.

Demostración

Como la expresión es simétrica en a, b *y* c, *podemos suponer sin perder generalidad que* $a \leq b \leq c$. *Luego*

$$a + b \leq a + c \leq b + c \quad y$$

Desigualdad de Nesbitt

Ejercicio

Dados $a, b, c > 0$, *demostrar que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

y que la igualdad se alcanza si y solo si $a = b = c$.

Demostración

Como la expresión es simétrica en a, b *y* c, *podemos suponer sin perder generalidad que* $a \leq b \leq c$. *Luego*

$$a+b \leq a+c \leq b+c \quad y \quad \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{a+b}.$$

Desigualdad de Nesbitt

Ejercicio

Dados $a, b, c > 0$, *demostrar que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

y que la igualdad se alcanza si y solo si $a = b = c$.

Demostración

Como la expresión es simétrica en a, b *y* c, *podemos suponer sin perder generalidad que* $a \leq b \leq c$. *Luego*

$$a+b \leq a+c \leq b+c \quad y \quad \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{a+b}.$$

Usando la desigualdad del reacomodo dos veces, obtenemos

Demostración

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b} \tag{10}$$

y

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}. \tag{11}$$

Demostración

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b} \tag{10}$$

y

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}. \tag{11}$$

Sumando, obtenemos

Demostración

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b} \tag{10}$$

y

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}. \tag{11}$$

Sumando, obtenemos

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right) \geq \left(\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{a+b}{a+b}\right)=3,$$

Demostración

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b} \tag{10}$$

y

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}. \tag{11}$$

Sumando, obtenemos

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right) \geq \left(\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{a+b}{a+b}\right)=3,$$

o equivalentemente

Demostración

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b} \tag{10}$$

y

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}. \tag{11}$$

Sumando, obtenemos

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq\left(\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{a+b}{a+b}\right)=3,$$

o equivalentemente

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

Demostración

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b} \tag{10}$$

y

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c}+\frac{a}{a+c}+\frac{b}{a+b}. \tag{11}$$

Sumando, obtenemos

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right) \geq \left(\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{a+b}{a+b}\right)=3,$$

o equivalentemente

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Notemos que se dan las igualdades en (10) y (11) si y solo si $a=b=c$. $\square$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Teorema

Dados $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, *se cumple*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Si algún $x_i \neq 0$, *la igualdad se alcanza si y solo si existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $y_i = \lambda x_i \ \forall$ $i = 1, \dots, n$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Teorema

Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, *se cumple*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Si algún $x_i \neq 0$, *la igualdad se alcanza si y solo si existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $y_i = \lambda x_i \ \forall \ i = 1, \ldots, n$.

Demostración

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Teorema

Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, *se cumple*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Si algún $x_i \neq 0$, *la igualdad se alcanza si y solo si existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $y_i = \lambda x_i \ \forall \ i = 1, \ldots, n$.

Demostración

Si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ *o bien* $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ *el resultado es claro.*

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Teorema

Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, *se cumple*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Si algún $x_i \neq 0$, *la igualdad se alcanza si y solo si existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $y_i = \lambda x_i \ \forall \ i = 1, \ldots, n$.

Demostración

Si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ *o bien* $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ *el resultado es claro. En caso contrario, sean* $S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ *y* $T = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$; *entonces, claramente*

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Teorema

Dados $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, *se cumple*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Si algún $x_i \neq 0$, *la igualdad se alcanza si y solo si existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tal que* $y_i = \lambda x_i \ \forall$ $i = 1, \ldots, n$.

Demostración

Si $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ *o bien* $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$ *el resultado es claro. En caso contrario, sean* $S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ *y* $T = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$; *entonces, claramente* $S > 0$ *y* $T > 0$.

Demostración

Recordemos que para cualquier permutación $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *se tiene que*

Demostración

Recordemos que para cualquier permutación $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *se tiene que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a_1' + a_2 a_2' + \cdots + a_n a_n'.$$

Demostración

Recordemos que para cualquier permutación $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *se tiene que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \cdots + a_n a'_n.$$

Luego, tomando $a_i = \frac{|x_i|}{S}$ *y* $a_{n+i} = \frac{|y_i|}{T}$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$, *tenemos*

Demostración

Recordemos que para cualquier permutación $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *se tiene que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \cdots + a_n a'_n.$$

Luego, tomando $a_i = \frac{|x_i|}{S}$ *y* $a_{n+i} = \frac{|y_i|}{T}$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$, *tenemos*

$$2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{S^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{T^2} =$$

Demostración

Recordemos que para cualquier permutación $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *se tiene que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a_1' + a_2 a_2' + \cdots + a_n a_n'.$$

Luego, tomando $a_i = \frac{|x_i|}{S}$ *y* $a_{n+i} = \frac{|y_i|}{T}$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$*, tenemos*

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{S^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{T^2} = \sum_{i=1}^{2n} a_i^2 \\ &\geq \end{aligned}$$

Demostración

Recordemos que para cualquier permutación $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *se tiene que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \cdots + a_n a'_n.$$

Luego, tomando $a_i = \frac{|x_i|}{S}$ *y* $a_{n+i} = \frac{|y_i|}{T}$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$*, tenemos*

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{S^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{T^2} = \sum_{i=1}^{2n} a_i^2 \\ &\geq a_1 a_{n+1} + a_2 a_{n+2} + \cdots + a_n a_{2n} + a_{n+1} a_1 + \cdots + a_{2n} a_n \\ &= \end{aligned}$$

Demostración

Recordemos que para cualquier permutación $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *se tiene que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a_1' + a_2 a_2' + \cdots + a_n a_n'.$$

Luego, tomando $a_i = \frac{|x_i|}{S}$ *y* $a_{n+i} = \frac{|y_i|}{T}$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$, *tenemos*

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{S^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{T^2} = \sum_{i=1}^{2n} a_i^2 \\ &\geq a_1 a_{n+1} + a_2 a_{n+2} + \cdots + a_n a_{2n} + a_{n+1} a_1 + \cdots + a_{2n} a_n \\ &= 2\frac{|x_1 y_1| + |x_2 y_2| + \cdots + |x_n y_n|}{ST}, \end{aligned}$$

Demostración

Recordemos que para cualquier permutación $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *se tiene que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a_1' + a_2 a_2' + \cdots + a_n a_n'.$$

Luego, tomando $a_i = \frac{|x_i|}{S}$ *y* $a_{n+i} = \frac{|y_i|}{T}$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$*, tenemos*

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{S^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{T^2} = \sum_{i=1}^{2n} a_i^2 \\ &\geq a_1 a_{n+1} + a_2 a_{n+2} + \cdots + a_n a_{2n} + a_{n+1} a_1 + \cdots + a_{2n} a_n \\ &= 2\frac{|x_1 y_1| + |x_2 y_2| + \cdots + |x_n y_n|}{ST}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

Demostración

Recordemos que para cualquier permutación $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *se tiene que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \cdots + a_n a'_n.$$

Luego, tomando $a_i = \frac{|x_i|}{S}$ *y* $a_{n+i} = \frac{|y_i|}{T}$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$*, tenemos*

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{S^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{T^2} = \sum_{i=1}^{2n} a_i^2 \\ &\geq a_1 a_{n+1} + a_2 a_{n+2} + \cdots + a_n a_{2n} + a_{n+1} a_1 + \cdots + a_{2n} a_n \\ &= 2\frac{|x_1 y_1| + |x_2 y_2| + \cdots + |x_n y_n|}{ST}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = ST \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \geq$$

Demostración

Recordemos que para cualquier permutación $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ *de* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *se tiene que*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq a_1 a_1' + a_2 a_2' + \cdots + a_n a_n'.$$

Luego, tomando $a_i = \frac{|x_i|}{S}$ *y* $a_{n+i} = \frac{|y_i|}{T}$ *para* $i = 1, 2, \ldots, n$, *tenemos*

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{S^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{T^2} = \sum_{i=1}^{2n} a_i^2 \\ &\geq a_1 a_{n+1} + a_2 a_{n+2} + \cdots + a_n a_{2n} + a_{n+1} a_1 + \cdots + a_{2n} a_n \\ &= 2\frac{|x_1 y_1| + |x_2 y_2| + \cdots + |x_n y_n|}{ST}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} = ST \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \geq \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|.$$

Demostración

De aquí, el resultado se sigue elevando al cuadrado.

Demostración

De aquí, el resultado se sigue elevando al cuadrado.

Tomemos ahora $a_i = \frac{x_i}{S}$ *y* $a_{n+i} = \frac{y_i}{T}$ *para* $i = 1, \ldots, n$. *Entonces*

Demostración

De aquí, el resultado se sigue elevando al cuadrado.

Tomemos ahora $a_i = \frac{x_i}{S}$ *y* $a_{n+i} = \frac{y_i}{T}$ *para* $i = 1, \ldots, n$. *Entonces*

$$ST = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \Leftrightarrow$$

Demostración

De aquí, el resultado se sigue elevando al cuadrado.

Tomemos ahora $a_i = \frac{x_i}{S}$ *y* $a_{n+i} = \frac{y_i}{T}$ *para* $i = 1, \ldots, n$. *Entonces*

$$ST = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{S} = \frac{y_1}{T}, \ \frac{x_2}{S} = \frac{y_2}{T}, \ \ldots, \frac{x_n}{S} = \frac{y_n}{T}$$

$$\Leftrightarrow$$

Demostración

De aquí, el resultado se sigue elevando al cuadrado.

Tomemos ahora $a_i = \frac{x_i}{S}$ *y* $a_{n+i} = \frac{y_i}{T}$ *para* $i = 1, \ldots, n$. *Entonces*

$$ST = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{S} = \frac{y_1}{T}, \ \frac{x_2}{S} = \frac{y_2}{T}, \ \ldots, \frac{x_n}{S} = \frac{y_n}{T}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_i = \frac{T}{S} x_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

$\square$

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

Demostración

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

Demostración

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *del enunciado y a los números* $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$ *obtenemos*

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

Demostración

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *del enunciado y a los números* $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$ *obtenemos*

$$(x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + \cdots + x_n \cdot 1)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2\right),$$

o equivalentemente

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

Demostración

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *del enunciado y a los números* $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 1$ *obtenemos*

$$(x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + \cdots + x_n \cdot 1)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2\right),$$

o equivalentemente

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right).$$

□

Recordemos que

$$1 + 2 + \cdots + n =$$

Recordemos que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{12}$$

Recordemos que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{12}$$

y

Recordemos que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{12}$$

y

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 =$$

Recordemos que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{12}$$

y

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{13}$$

Recordemos que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{12}$$

y

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{13}$$

Ejercicio

Demostrar que para cualquier número natural $n \geq 2$, se cumple que

$$1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n} < \frac{n(n+1)}{6}\sqrt{6n+3}.$$

Demostración

Demostración

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los números

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_n = n \qquad y \qquad y_1 = 1,\ y_2 = \sqrt{2},\ \ldots,\ y_n = \sqrt{n}$$

obtenemos

Demostración

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los números

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_n = n \qquad y \qquad y_1 = 1,\ y_2 = \sqrt{2},\ \ldots,\ y_n = \sqrt{n}$$

obtenemos

$$\left(1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n}\right)^2 \leq \left(1 + 2^2 + \cdots + n^2\right)\left(1 + 2 + \cdots + n\right).$$

Demostración

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los números

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_n = n \qquad y \qquad y_1 = 1,\ y_2 = \sqrt{2},\ \ldots,\ y_n = \sqrt{n}$$

obtenemos

$$\left(1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n}\right)^2 \leq \left(1 + 2^2 + \cdots + n^2\right)\left(1 + 2 + \cdots + n\right).$$

Usando las fórmulas (12) y (13) tenemos

Demostración

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los números

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots,\ x_n = n \qquad y \qquad y_1 = 1,\ y_2 = \sqrt{2},\ \ldots,\ y_n = \sqrt{n}$$

obtenemos

$$\left(1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n}\right)^2 \leq \left(1 + 2^2 + \cdots + n^2\right)\left(1 + 2 + \cdots + n\right).$$

Usando las fórmulas (12) y (13) tenemos

$$\left(1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n}\right)^2 \leq \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{2(6)}$$

o equivalentemente

Demostración

$$\left(1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n}\right)^2 \quad \leq \quad \frac{n^2(n+1)^2}{6^2}\,\frac{6(2n+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow$$

Demostración

$$\begin{aligned}\left(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n}\right)^2 &\leq \frac{n^2(n+1)^2}{6^2}\frac{6(2n+1)}{2}\\ \Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n} &\leq \frac{n(n+1)}{6}\sqrt{6n+3}.\end{aligned}$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
\left(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n}\right)^2 &\leq \frac{n^2(n+1)^2}{6^2}\,\frac{6(2n+1)}{2}\\
\Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n} &\leq \frac{n(n+1)}{6}\sqrt{6n+3}.
\end{aligned}
$$

Falta solo ver que no puede darse la igualdad, para lo que usaremos que $n \geq 2$.

Demostración

$$\begin{aligned}\left(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n}\right)^2 &\leq \frac{n^2(n+1)^2}{6^2}\frac{6(2n+1)}{2}\\ \Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n} &\leq \frac{n(n+1)}{6}\sqrt{6n+3}.\end{aligned}$$

Falta solo ver que no puede darse la igualdad, para lo que usaremos que $n \geq 2$*. Observemos que si esta se alcanzara, entonces existiría* λ *tal que*

Demostración

$$\begin{aligned}\left(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n}\right)^2 &\leq \frac{n^2(n+1)^2}{6^2}\frac{6(2n+1)}{2}\\ \Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n} &\leq \frac{n(n+1)}{6}\sqrt{6n+3}.\end{aligned}$$

Falta solo ver que no puede darse la igualdad, para lo que usaremos que $n \geq 2$*. Observemos que si esta se alcanzara, entonces existiría* λ *tal que* $1 = \lambda \cdot 1$ *y* $2 = \lambda\sqrt{2}$,

Demostración

$$\begin{aligned}\left(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n}\right)^2 &\leq \frac{n^2(n+1)^2}{6^2}\frac{6(2n+1)}{2}\\ \Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n} &\leq \frac{n(n+1)}{6}\sqrt{6n+3}.\end{aligned}$$

Falta solo ver que no puede darse la igualdad, para lo que usaremos que $n \geq 2$*. Observemos que si esta se alcanzara, entonces existiría* λ *tal que* $1 = \lambda \cdot 1$ *y* $2 = \lambda\sqrt{2}$*, pero de la primera igualdad deducimos que*

Demostración

$$\begin{aligned}\left(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n}\right)^2 &\leq \frac{n^2(n+1)^2}{6^2}\frac{6(2n+1)}{2}\\ \Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n} &\leq \frac{n(n+1)}{6}\sqrt{6n+3}.\end{aligned}$$

Falta solo ver que no puede darse la igualdad, para lo que usaremos que $n \geq 2$*. Observemos que si esta se alcanzara, entonces existiría* λ *tal que* $1 = \lambda \cdot 1$ *y* $2 = \lambda\sqrt{2}$*, pero de la primera igualdad deducimos que* $\lambda = 1$ *y de la segunda que*

Demostración

$$\begin{aligned}\left(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n}\right)^2 &\leq \frac{n^2(n+1)^2}{6^2}\frac{6(2n+1)}{2}\\ \Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n} &\leq \frac{n(n+1)}{6}\sqrt{6n+3}.\end{aligned}$$

Falta solo ver que no puede darse la igualdad, para lo que usaremos que $n \geq 2$*. Observemos que si esta se alcanzara, entonces existiría* λ *tal que* $1=\lambda\cdot 1$ *y* $2=\lambda\sqrt{2}$*, pero de la primera igualdad deducimos que* $\lambda=1$ *y de la segunda que* $\lambda=\sqrt{2}$*,*

Demostración

$$\begin{aligned}\left(1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n}\right)^2 &\leq \frac{n^2(n+1)^2}{6^2}\frac{6(2n+1)}{2}\\ \Leftrightarrow 1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\cdots+n\sqrt{n} &\leq \frac{n(n+1)}{6}\sqrt{6n+3}.\end{aligned}$$

Falta solo ver que no puede darse la igualdad, para lo que usaremos que $n \geq 2$*. Observemos que si esta se alcanzara, entonces existiría* λ *tal que* $1 = \lambda \cdot 1$ *y* $2 = \lambda\sqrt{2}$*, pero de la primera igualdad deducimos que* $\lambda = 1$ *y de la segunda que* $\lambda = \sqrt{2}$*, lo cual es una contradicción.* $\square$