Desigualdades Numéricas

Ingrid Quilantán Ortega, Aroldo Pérez Pérez
ingrid.quilantan@ujat.mx, aroldopz2@gmail.com

División Académica de Ciencias Básicas
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco

Olimpiada de Matemáticas del Estado de Tabasco

Mayo de 2025

Definición

Sea $a, b \in \mathbb{R}$.

Definición

Sea $a, b \in \mathbb{R}$.

i) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0.$

Definición

Sea $a, b \in \mathbb{R}$.

i) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

ii) $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

Definición

Sea $a, b \in \mathbb{R}$.

i) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0.$

ii) $a < b \Leftrightarrow a - b < 0.$

iii) $a \leq b \Leftrightarrow a < b \quad ó \quad a = b.$

Definición

Sea $a, b \in \mathbb{R}$.

i) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

ii) $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

iii) $a \leq b \Leftrightarrow a < b \quad ó \quad a = b$.

Ley de tricotomía: Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple una y sólo una de las relaciones

Definición

Sea $a, b \in \mathbb{R}$.

i) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0.$

ii) $a < b \Leftrightarrow a - b < 0.$

iii) $a \leq b \Leftrightarrow a < b \quad ó \quad a = b.$

Ley de tricotomía: Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple una y sólo una de las relaciones

$$a < b, \qquad a = b \qquad ó \qquad a > b.$$

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$.

i) *Si* $a > 0$ *se dice que* a *es*

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$.

i) *Si* $a > 0$ *se dice que* a *es* **positivo**.

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$.

i) *Si* $a > 0$ *se dice que* a *es* **positivo**.

ii) *Si* $a < 0$ *se dice que* a *es*

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$.

i) *Si* $a > 0$ *se dice que* a *es* **positivo**.

ii) *Si* $a < 0$ *se dice que* a *es* **negativo**.

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$.

i) *Si $a > 0$ se dice que a es* **positivo**.

ii) *Si $a < 0$ se dice que a es* **negativo**.

iii) *Si $a \geq 0$ se dice que a es*

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$.

i) *Si* $a > 0$ *se dice que* a *es* **positivo**.

ii) *Si* $a < 0$ *se dice que* a *es* **negativo**.

iii) *Si* $a \geq 0$ *se dice que* a *es* **no negativo**.

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$.

i) *Si* $a > 0$ *se dice que* a *es* **positivo**.

ii) *Si* $a < 0$ *se dice que* a *es* **negativo**.

iii) *Si* $a \geq 0$ *se dice que* a *es* **no negativo**.

iv) *Si* $a \leq 0$ *se dice que* a *es*

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$.

i) *Si* $a > 0$ *se dice que* a *es* **positivo**.
ii) *Si* $a < 0$ *se dice que* a *es* **negativo**.
iii) *Si* $a \geq 0$ *se dice que* a *es* **no negativo**.
iv) *Si* $a \leq 0$ *se dice que* a *es* **no positivo**.

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$.

i) *Si $a > 0$ se dice que a es* **positivo**.

ii) *Si $a < 0$ se dice que a es* **negativo**.

iii) *Si $a \geq 0$ se dice que a es* **no negativo**.

iv) *Si $a \leq 0$ se dice que a es* **no positivo**.

Asumiremos también lo siguiente: si $a > 0$ y $b > 0$, entonces

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$.

i) *Si $a > 0$ se dice que a es* **positivo**.
ii) *Si $a < 0$ se dice que a es* **negativo**.
iii) *Si $a \geq 0$ se dice que a es* **no negativo**.
iv) *Si $a \leq 0$ se dice que a es* **no positivo**.

Asumiremos también lo siguiente: si $a > 0$ y $b > 0$, entonces

i) $a + b > 0$.

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$.

i) *Si* $a > 0$ *se dice que* a *es* **positivo**.
ii) *Si* $a < 0$ *se dice que* a *es* **negativo**.
iii) *Si* $a \geq 0$ *se dice que* a *es* **no negativo**.
iv) *Si* $a \leq 0$ *se dice que* a *es* **no positivo**.

Asumiremos también lo siguiente: si $a > 0$ y $b > 0$, entonces

i) $a + b > 0$.
ii) $ab > 0$.

Ejercicio

$a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow$

Ejercicio

$a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow ab > 0.$

Ejercicio

$a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow ab > 0$.

Demostración

Ejercicio

$a < 0$ *y* $b < 0 \Rightarrow ab > 0.$

Demostración

$a < 0 \Rightarrow -a > 0$ *(por la ley de tricotomía)*

Ejercicio

$a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow ab > 0$.

Demostración

$a < 0 \Rightarrow -a > 0$ (por la ley de tricotomía)
$b < 0 \Rightarrow -b > 0$ (por la ley de tricotomía)

Ejercicio

$a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow ab > 0$.

Demostración

$a < 0 \Rightarrow -a > 0$ (por la ley de tricotomía)
$b < 0 \Rightarrow -b > 0$ (por la ley de tricotomía)
Luego por el axioma ii)

Ejercicio

$a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow ab > 0.$

Demostración

$a < 0 \Rightarrow -a > 0$ (por la ley de tricotomía)
$b < 0 \Rightarrow -b > 0$ (por la ley de tricotomía)
Luego por el axioma ii)
$(-a)(-b) > 0.$

Ejercicio

$a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow ab > 0$.

Demostración

$a < 0 \Rightarrow -a > 0$ (por la ley de tricotomía)
$b < 0 \Rightarrow -b > 0$ (por la ley de tricotomía)
Luego por el axioma ii)
$(-a)(-b) > 0$.
Pero

Ejercicio

$a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow ab > 0$.

Demostración

$a < 0 \Rightarrow -a > 0$ (por la ley de tricotomía)
$b < 0 \Rightarrow -b > 0$ (por la ley de tricotomía)
Luego por el axioma ii)
$(-a)(-b) > 0$.
Pero
$(-a)(-b) = ab$.

Ejercicio

$a < 0$ y $b < 0 \Rightarrow ab > 0$.

Demostración

$a < 0 \Rightarrow -a > 0$ (por la ley de tricotomía)
$b < 0 \Rightarrow -b > 0$ (por la ley de tricotomía)
Luego por el axioma ii)
$(-a)(-b) > 0$.
Pero
$(-a)(-b) = ab$.
Por lo tanto $ab > 0$. $\square$

Ejercicio

Si no se cumple $a \leq b$, *entonces*

Ejercicio

Si no se cumple $a \leq b$, *entonces* $a > b$.

Ejercicio

Si no se cumple $a \leq b$, entonces $a > b$.

Demostración

Ejercicio

Si no se cumple $a \leq b$*, entonces* $a > b$*.*

Demostración

Si no se cumple que $a \leq b$*, entonces no se cumple que*

Ejercicio

Si no se cumple $a \leq b$*, entonces* $a > b$*.*

Demostración

Si no se cumple que $a \leq b$*, entonces no se cumple que* $a < b$ *ó* $a = b$*.*

Ejercicio

Si no se cumple $a \leq b$, entonces $a > b$.

Demostración

Si no se cumple que $a \leq b$, entonces no se cumple que $a < b$ ó $a = b$.
Luego, por la ley de tricotomía se cumple que $a > b$. $\square$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$, *entonces*

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces* $a = b$.

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$, *entonces* $a = b$.

Demostración

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces* $a = b$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces*

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces* $a = b$*.*

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces*

$(a < b \ \ \text{ó} \ \ a = b) \quad y \quad (b < a \ \ \text{ó} \ \ b = a)$.

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces* $a = b$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces*
$(a < b \quad ó \quad a = b) \qquad y \qquad (b < a \quad ó \quad b = a).$
Tenemos así las siguientes posibilidades

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$, *entonces* $a = b$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$, *entonces*
$(a < b \;\; ó \;\; a = b) \quad y \quad (b < a \;\; ó \;\; b = a)$.
Tenemos así las siguientes posibilidades
$(a < b \;\; y \;\; b < a) \quad o$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces* $a = b$*.*

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces*
$(a < b \quad ó \quad a = b) \quad y \quad (b < a \quad ó \quad b = a)$.
Tenemos así las siguientes posibilidades
$(a < b \quad y \quad b < a) \quad o \quad (a < b \quad y \quad b = a) \quad o$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces* $a = b$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces*
$(a < b \;\; ó \;\; a = b) \quad y \quad (b < a \;\; ó \;\; b = a)$.
Tenemos así las siguientes posibilidades
$(a < b \;\; y \;\; b < a) \quad o \quad (a < b \;\; y \;\; b = a) \quad o$
$(a = b \;\; y \;\; b < a) \quad o$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$, *entonces* $a = b$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$, *entonces*

$(a < b \ \text{ ó } \ a = b) \quad y \quad (b < a \ \text{ ó } \ b = a)$.

Tenemos así las siguientes posibilidades

$(a < b \ \ y \ \ b < a) \quad o \quad (a < b \ \ y \ \ b = a) \quad o$

$(a = b \ \ y \ \ b < a) \quad o \quad (a = b \ \ y \ \ b = a)$.

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces* $a = b$*.*

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq a$*, entonces*
$(a < b \;\; ó \;\; a = b) \quad y \quad (b < a \;\; ó \;\; b = a).$
Tenemos así las siguientes posibilidades
$(a < b \;\; y \;\; b < a) \quad o \quad (a < b \;\; y \;\; b = a) \quad o$
$(a = b \;\; y \;\; b < a) \quad o \quad (a = b \;\; y \;\; b = a).$
Por la ley de tricotomía, las tres primeras son imposibles, por lo tanto

Ejercicio

Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

Demostración

Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces
$(a < b \;\; ó \;\; a = b) \quad y \quad (b < a \;\; ó \;\; b = a).$
Tenemos así las siguientes posibilidades
$(a < b \;\; y \;\; b < a) \quad o \quad (a < b \;\; y \;\; b = a) \quad o$
$(a = b \;\; y \;\; b < a) \quad o \quad (a = b \;\; y \;\; b = a).$
Por la ley de tricotomía, las tres primeras son imposibles, por lo tanto $a = b$. $\square$

Ejercicio

Si $a > 0$ *y* $b \geq 0$, *entonces*

Ejercicio

Si $a > 0$ *y* $b \geq 0$*, entonces* $a + b > 0$.

Ejercicio

Si $a > 0$ *y* $b \geq 0$*, entonces* $a + b > 0$*.*

Demostración

Ejercicio

Si $a > 0$ *y* $b \geq 0$, *entonces* $a + b > 0$.

Demostración

Si $b \geq 0$, *entonces*

Ejercicio

Si $a > 0$ *y* $b \geq 0$, *entonces* $a + b > 0$.

Demostración

Si $b \geq 0$, *entonces i)* $b > 0$ *ó ii)* $b = 0$.

Ejercicio

Si $a > 0$ *y* $b \geq 0$, *entonces* $a + b > 0$.

Demostración

Si $b \geq 0$, *entonces i)* $b > 0$ *ó ii)* $b = 0$.
Si i) ocurre, tenemos que

Ejercicio

Si $a > 0$ *y* $b \geq 0$, *entonces* $a + b > 0$.

Demostración

Si $b \geq 0$, *entonces i)* $b > 0$ *ó ii)* $b = 0$.
Si i) ocurre, tenemos que $a + b > 0$.

Ejercicio

Si $a > 0$ *y* $b \geq 0$, *entonces* $a + b > 0$.

Demostración

Si $b \geq 0$, *entonces i)* $b > 0$ *ó ii)* $b = 0$.
Si i) ocurre, tenemos que $a + b > 0$.
Si ii) ocurre, tenemos que

Ejercicio

Si $a > 0$ *y* $b \geq 0$*, entonces* $a + b > 0$.

Demostración

Si $b \geq 0$*, entonces i)* $b > 0$ *ó ii)* $b = 0$.
Si i) ocurre, tenemos que $a + b > 0$.
Si ii) ocurre, tenemos que $a + b = a + 0 = a > 0$.

Ejercicio

Si $a > 0$ *y* $b \geq 0$, *entonces* $a + b > 0$.

Demostración

Si $b \geq 0$, *entonces i)* $b > 0$ *ó ii)* $b = 0$.
Si i) ocurre, tenemos que $a + b > 0$.
Si ii) ocurre, tenemos que $a + b = a + 0 = a > 0$.
Como tanto para el caso i) como para el caso ii) $a + b > 0$, *la demostración está terminada.* □

Ejercicio

Si $a \geq 0$ *y* $b > 0$, *entonces*

Ejercicio

Si $a \geq 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $ab \geq 0$.

Ejercicio

Si $a \geq 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $ab \geq 0$.

Demostración

Ejercicio

Si $a \geq 0$ *y* $b > 0$*, entonces* $ab \geq 0$.

Demostración

Si $a \geq 0$*, entonces*

Ejercicio

Si $a \geq 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $ab \geq 0$.

Demostración

Si $a \geq 0$, *entonces i)* $a > 0$ *ó ii)* $a = 0$.

Ejercicio

Si $a \geq 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $ab \geq 0$.

Demostración

Si $a \geq 0$, *entonces i)* $a > 0$ *ó ii)* $a = 0$.
Si i) ocurre, tenemos que

Ejercicio

Si $a \geq 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $ab \geq 0$.

Demostración

Si $a \geq 0$, *entonces i)* $a > 0$ *ó ii)* $a = 0$.
Si i) ocurre, tenemos que $ab > 0$ *y por lo tanto*

Ejercicio

Si $a \geq 0$ *y* $b > 0$*, entonces* $ab \geq 0$.

Demostración

Si $a \geq 0$*, entonces i)* $a > 0$ *ó ii)* $a = 0$.
Si i) ocurre, tenemos que $ab > 0$ *y por lo tanto* $ab \geq 0$.

Ejercicio

Si $a \geq 0$ *y* $b > 0$*, entonces* $ab \geq 0$.

Demostración

Si $a \geq 0$*, entonces i)* $a > 0$ *ó ii)* $a = 0$.
Si i) ocurre, tenemos que $ab > 0$ *y por lo tanto* $ab \geq 0$.
Si ii) ocurre, tenemos que

Ejercicio

Si $a \geq 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $ab \geq 0$.

Demostración

Si $a \geq 0$, *entonces i)* $a > 0$ *ó ii)* $a = 0$.
Si i) ocurre, tenemos que $ab > 0$ *y por lo tanto* $ab \geq 0$.
Si ii) ocurre, tenemos que $ab = 0b = 0$ *y por lo tanto*

Ejercicio

Si $a \geq 0$ *y* $b > 0$*, entonces* $ab \geq 0$.

Demostración

Si $a \geq 0$*, entonces i)* $a > 0$ *ó ii)* $a = 0$.
Si i) ocurre, tenemos que $ab > 0$ *y por lo tanto* $ab \geq 0$.
Si ii) ocurre, tenemos que $ab = 0b = 0$ *y por lo tanto* $ab \geq 0$.

Ejercicio

Si $a \geq 0$ *y* $b > 0$*, entonces* $ab \geq 0$.

Demostración

Si $a \geq 0$*, entonces i)* $a > 0$ *ó ii)* $a = 0$.
Si i) ocurre, tenemos que $ab > 0$ *y por lo tanto* $ab \geq 0$.
Si ii) ocurre, tenemos que $ab = 0b = 0$ *y por lo tanto* $ab \geq 0$.
Como tanto para el caso i) como para el caso ii) $ab \geq 0$*, la demostración está terminada.* $\square$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces*

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces* $a \leq c$.

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces* $a \leq c$.

Demostración

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces* $a \leq c$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces*

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $a \leq c$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $b - a \geq 0$ *y* $c - b \geq 0$.

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces* $a \leq c$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces* $b - a \geq 0$ *y* $c - b \geq 0$.
Luego

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $a \leq c$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $b - a \geq 0$ *y* $c - b \geq 0$.
Luego

$$0 \leq (b - a) + (c - b)$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces* $a \leq c$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces* $b - a \geq 0$ *y* $c - b \geq 0$.
Luego

$$0 \leq (b - a) + (c - b) = (c - a) + (b - b)$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces* $a \leq c$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$, *entonces* $b - a \geq 0$ *y* $c - b \geq 0$.
Luego

$$0 \leq (b-a) + (c-b) = (c-a) + (b-b) = (c-a) + 0$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $a \leq c$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $b - a \geq 0$ *y* $c - b \geq 0$.
Luego

$$0 \leq (b - a) + (c - b) = (c - a) + (b - b) = (c - a) + 0 = c - a.$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $a \leq c$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $b - a \geq 0$ *y* $c - b \geq 0$.
Luego

$$0 \leq (b - a) + (c - b) = (c - a) + (b - b) = (c - a) + 0 = c - a.$$

Por lo tanto

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $a \leq c$.

Demostración

Si $a \leq b$ *y* $b \leq c$*, entonces* $b - a \geq 0$ *y* $c - b \geq 0$.
Luego

$$0 \leq (b - a) + (c - b) = (c - a) + (b - b) = (c - a) + 0 = c - a.$$

Por lo tanto $a \leq c$. $\square$

Ejercicio

Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a + c \leq b + d$ y la igualdad se alcanza si y solo si $a = b$ y $c = d$.

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $a + c \leq b + d$ *y la igualdad se alcanza si y solo si* $a = b$ *y* $c = d$*.*

Demostración

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$, *entonces* $a + c \leq b + d$ *y la igualdad se alcanza si y solo si* $a = b$ *y* $c = d$.

Demostración

Si $a < b$ *y* $c \leq d$, *entonces*

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$, *entonces* $a + c \leq b + d$ *y la igualdad se alcanza si y solo si* $a = b$ *y* $c = d$.

Demostración

Si $a < b$ *y* $c \leq d$, *entonces* $b - a > 0$ *y* $d - c \geq 0$.

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $a + c \leq b + d$ *y la igualdad se alcanza si y solo si* $a = b$ *y* $c = d$*.*

Demostración

Si $a < b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $b - a > 0$ *y* $d - c \geq 0$*.*
Luego

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $a + c \leq b + d$ *y la igualdad se alcanza si y solo si* $a = b$ *y* $c = d$*.*

Demostración

Si $a < b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $b - a > 0$ *y* $d - c \geq 0$*.*
Luego

$$0 < (b - a) + (d - c)$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $a + c \leq b + d$ *y la igualdad se alcanza si y solo si* $a = b$ *y* $c = d$*.*

Demostración

Si $a < b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $b - a > 0$ *y* $d - c \geq 0$*.*
Luego

$$0 < (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $a + c \leq b + d$ *y la igualdad se alcanza si y solo si* $a = b$ *y* $c = d$*.*

Demostración

Si $a < b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $b - a > 0$ *y* $d - c \geq 0$*.*
Luego

$$0 < (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Por lo tanto

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $a + c \leq b + d$ *y la igualdad se alcanza si y solo si* $a = b$ *y* $c = d$*.*

Demostración

Si $a < b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $b - a > 0$ *y* $d - c \geq 0$*.*
Luego

$$0 < (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Por lo tanto $a + c < b + d$*.*

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $a + c \leq b + d$ *y la igualdad se alcanza si y solo si* $a = b$ *y* $c = d$*.*

Demostración

Si $a < b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $b - a > 0$ *y* $d - c \geq 0$*.*
Luego

$$0 < (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Por lo tanto $a + c < b + d$*.*
De manera similar, si $a \leq b$ *y* $c < d$*, entonces* $a + c < b + d$*.*

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$, *entonces* $a + c \leq b + d$ *y la igualdad se alcanza si y solo si* $a = b$ *y* $c = d$.

Demostración

Si $a < b$ *y* $c \leq d$, *entonces* $b - a > 0$ *y* $d - c \geq 0$.
Luego

$$0 < (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Por lo tanto $a + c < b + d$.
De manera similar, si $a \leq b$ *y* $c < d$, *entonces* $a + c < b + d$.
Por último, si $a = b$ *y* $c = d$, *entonces*

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $a + c \leq b + d$ *y la igualdad se alcanza si y solo si* $a = b$ *y* $c = d$*.*

Demostración

Si $a < b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $b - a > 0$ *y* $d - c \geq 0$*.*
Luego

$$0 < (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Por lo tanto $a + c < b + d$*.*
De manera similar, si $a \leq b$ *y* $c < d$*, entonces* $a + c < b + d$*.*
Por último, si $a = b$ *y* $c = d$*, entonces* $b - a = 0$ *y* $d - c = 0$*.*
Luego

Ejercicio

Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a + c \leq b + d$ y la igualdad se alcanza si y solo si $a = b$ y $c = d$.

Demostración

Si $a < b$ y $c \leq d$, entonces $b - a > 0$ y $d - c \geq 0$.
Luego

$$0 < (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Por lo tanto $a + c < b + d$.
De manera similar, si $a \leq b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
Por último, si $a = b$ y $c = d$, entonces $b - a = 0$ y $d - c = 0$.
Luego

$$0 = (b - a) + (d - c)$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $a + c \leq b + d$ *y la igualdad se alcanza si y solo si* $a = b$ *y* $c = d$*.*

Demostración

Si $a < b$ *y* $c \leq d$*, entonces* $b - a > 0$ *y* $d - c \geq 0$*.*
Luego

$$0 < (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Por lo tanto $a + c < b + d$*.*
De manera similar, si $a \leq b$ *y* $c < d$*, entonces* $a + c < b + d$*.*
Por último, si $a = b$ *y* $c = d$*, entonces* $b - a = 0$ *y* $d - c = 0$*.*
Luego

$$0 = (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a + c \leq b + d$ y la igualdad se alcanza si y solo si $a = b$ y $c = d$.

Demostración

Si $a < b$ y $c \leq d$, entonces $b - a > 0$ y $d - c \geq 0$.
Luego

$$0 < (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Por lo tanto $a + c < b + d$.
De manera similar, si $a \leq b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
Por último, si $a = b$ y $c = d$, entonces $b - a = 0$ y $d - c = 0$.
Luego

$$0 = (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Por lo tanto

Ejercicio

Si $a \leq b$ y $c \leq d$, entonces $a + c \leq b + d$ y la igualdad se alcanza si y solo si $a = b$ y $c = d$.

Demostración

Si $a < b$ y $c \leq d$, entonces $b - a > 0$ y $d - c \geq 0$.
Luego

$$0 < (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Por lo tanto $a + c < b + d$.
De manera similar, si $a \leq b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$.
Por último, si $a = b$ y $c = d$, entonces $b - a = 0$ y $d - c = 0$.
Luego

$$0 = (b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c).$$

Por lo tanto $a + c = b + d$. Esto finaliza la demostración. □

Ejercicio

Si $x < y$, *entonces* $x + z < y + z$ *para cualquier* $z \in \mathbb{R}$.

Ejercicio

Si $x < y$, *entonces* $x + z < y + z$ *para cualquier* $z \in \mathbb{R}$.

Demostración

Ejercicio

Si $x < y$, *entonces* $x + z < y + z$ *para cualquier* $z \in \mathbb{R}$.

Demostración

Si $x < y$, *entonces*

Ejercicio

Si $x < y$, *entonces* $x + z < y + z$ *para cualquier* $z \in \mathbb{R}$.

Demostración

Si $x < y$, *entonces* $y - x > 0$.

Ejercicio

Si $x < y$*, entonces* $x + z < y + z$ *para cualquier* $z \in \mathbb{R}$.

Demostración

Si $x < y$*, entonces* $y - x > 0$.
Luego

Ejercicio

Si $x < y$, *entonces* $x + z < y + z$ *para cualquier* $z \in \mathbb{R}$.

Demostración

Si $x < y$, *entonces* $y - x > 0$.
Luego

$$(y + z) - (x + z)$$

Ejercicio

Si $x < y$, *entonces* $x + z < y + z$ *para cualquier* $z \in \mathbb{R}$.

Demostración

Si $x < y$, *entonces* $y - x > 0$.
Luego

$$(y + z) - (x + z) = (y - x) + (z - z)$$

Ejercicio

Si $x < y$, *entonces* $x + z < y + z$ *para cualquier* $z \in \mathbb{R}$.

Demostración

Si $x < y$, *entonces* $y - x > 0$.
Luego

$$(y + z) - (x + z) = (y - x) + (z - z) = y - x > 0.$$

Ejercicio

Si $x < y$*, entonces* $x + z < y + z$ *para cualquier* $z \in \mathbb{R}$.

Demostración

Si $x < y$*, entonces* $y - x > 0$.
Luego

$$(y + z) - (x + z) = (y - x) + (z - z) = y - x > 0.$$

Por lo tanto

Ejercicio

Si $x < y$*, entonces* $x + z < y + z$ *para cualquier* $z \in \mathbb{R}$.

Demostración

Si $x < y$*, entonces* $y - x > 0$.
Luego

$$(y + z) - (x + z) = (y - x) + (z - z) = y - x > 0.$$

Por lo tanto $y + z > x + z$. □

Ejercicio

Si $x < 0$ *y* $y > 0$, *entonces* $xy < 0$.

Ejercicio

Si $x < 0$ *y* $y > 0$, *entonces* $xy < 0$.

Demostración

Ejercicio

Si $x < 0$ *y* $y > 0$, *entonces* $xy < 0$.

Demostración

Si $x < 0$, *entonces*

Ejercicio

Si $x < 0$ *y* $y > 0$, *entonces* $xy < 0$.

Demostración

Si $x < 0$, *entonces* $-x > 0$.

Ejercicio

Si $x < 0$ *y* $y > 0$, *entonces* $xy < 0$.

Demostración

Si $x < 0$, *entonces* $-x > 0$.
Luego

Ejercicio

Si $x < 0$ *y* $y > 0$, *entonces* $xy < 0$.

Demostración

Si $x < 0$, *entonces* $-x > 0$.
Luego

$$-(xy) = (-x)y > 0$$

Ejercicio

Si $x < 0$ *y* $y > 0$*, entonces* $xy < 0$*.*

Demostración

Si $x < 0$*, entonces* $-x > 0$*.*
Luego

$$-(xy) = (-x)y > 0$$

y así,

Ejercicio

Si $x < 0$ *y* $y > 0$, *entonces* $xy < 0$.

Demostración

Si $x < 0$, *entonces* $-x > 0$.
Luego

$$-(xy) = (-x)y > 0$$

y así,

$$xy = -\left[-(xy)\right] < 0.$$

□

Ejercicio

Si $a > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} > 0$.

Ejercicio

Si $a > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} > 0$.

Demostración

Ejercicio

Si $a > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} > 0$.

Demostración

Como

Ejercicio

Si $a > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} > 0$.

Demostración

Como

$$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 > 0.$$

Ejercicio

Si $a > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} > 0$.

Demostración

Como

$$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 > 0.$$

Entonces, debido a que $a > 0$,

Ejercicio

Si $a > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} > 0$.

Demostración

Como

$$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 > 0.$$

Entonces, debido a que $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$. $\square$

Ejercicio

Si $a > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} > 0$.

Demostración

Como

$$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 > 0.$$

Entonces, debido a que $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$. $\square$

Es claro también que si $a < 0$, entonces $\frac{1}{a} < 0$.

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} =$$

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} =$$

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = (a-b)\left(\frac{1}{ab}\right). \tag{1}$$

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = (a-b)\left(\frac{1}{ab}\right). \tag{1}$$

Como

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = (a-b)\left(\frac{1}{ab}\right). \tag{1}$$

Como

$$a > 0 \quad y \quad b > 0 \Rightarrow$$

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = (a-b)\left(\frac{1}{ab}\right). \tag{1}$$

Como

$$a > 0 \quad y \quad b > 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow$$

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = (a-b)\left(\frac{1}{ab}\right). \tag{1}$$

Como

$$a > 0 \quad y \quad b > 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} > 0 \tag{2}$$

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = (a-b)\left(\frac{1}{ab}\right). \tag{1}$$

Como

$$a > 0 \quad y \quad b > 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} > 0 \tag{2}$$

y

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = (a-b)\left(\frac{1}{ab}\right). \tag{1}$$

Como

$$a > 0 \quad y \quad b > 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} > 0 \tag{2}$$

y

$$a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0. \tag{3}$$

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = (a-b)\left(\frac{1}{ab}\right). \tag{1}$$

Como

$$a > 0 \quad y \quad b > 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} > 0 \tag{2}$$

y

$$a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0. \tag{3}$$

Utilizando (2) y (3) en (1) obtenemos que

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = (a-b)\left(\frac{1}{ab}\right). \tag{1}$$

Como

$$a > 0 \quad y \quad b > 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} > 0 \tag{2}$$

y

$$a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0. \tag{3}$$

Utilizando (2) y (3) en (1) obtenemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \geq 0$$

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = (a-b)\left(\frac{1}{ab}\right). \tag{1}$$

Como

$$a > 0 \quad y \quad b > 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} > 0 \tag{2}$$

y

$$a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0. \tag{3}$$

Utilizando (2) y (3) en (1) obtenemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \geq 0$$

y así,

Ejercicio

Si $a \geq b > 0$, *entonces* $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$.

Demostración

Notemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = (a-b)\left(\frac{1}{ab}\right). \tag{1}$$

Como

$$a > 0 \quad y \quad b > 0 \Rightarrow ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} > 0 \tag{2}$$

y

$$a \geq b \Rightarrow a - b \geq 0. \tag{3}$$

Utilizando (2) y (3) en (1) obtenemos que

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \geq 0$$

y así, $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$. $\square$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \geq 0$, *entonces* $\lambda a \leq \lambda b$.

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \geq 0$, *entonces* $\lambda a \leq \lambda b$.

Demostración

Ejercicio

Si $a \leq b$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda a \leq \lambda b$.

Demostración

Notemos que

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \geq 0$, *entonces* $\lambda a \leq \lambda b$.

Demostración

Notemos que

$$\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a). \tag{4}$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \geq 0$, *entonces* $\lambda a \leq \lambda b$.

Demostración

Notemos que

$$\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a). \tag{4}$$

Ahora, como $\lambda \geq 0$ *y*

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \geq 0$, *entonces* $\lambda a \leq \lambda b$.

Demostración

Notemos que

$$\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a). \tag{4}$$

Ahora, como $\lambda \geq 0$ *y*

$$a \leq b \Rightarrow b - a \geq 0$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \geq 0$*, entonces* $\lambda a \leq \lambda b$.

Demostración

Notemos que

$$\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a). \tag{4}$$

Ahora, como $\lambda \geq 0$ *y*

$$a \leq b \Rightarrow b - a \geq 0$$

se sigue de (4) que

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \geq 0$, *entonces* $\lambda a \leq \lambda b$.

Demostración

Notemos que

$$\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a). \tag{4}$$

Ahora, como $\lambda \geq 0$ *y*

$$a \leq b \Rightarrow b - a \geq 0$$

se sigue de (4) que

$$\lambda b - \lambda a \geq 0,$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \geq 0$*, entonces* $\lambda a \leq \lambda b$*.*

Demostración

Notemos que

$$\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a). \tag{4}$$

Ahora, como $\lambda \geq 0$ *y*

$$a \leq b \Rightarrow b - a \geq 0$$

se sigue de (4) que

$$\lambda b - \lambda a \geq 0,$$

esto es

$$\lambda b \geq \lambda a.$$

□

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \leq 0$, *entonces* $\lambda a \geq \lambda b$.

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \leq 0$, *entonces* $\lambda a \geq \lambda b$.

Demostración

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \leq 0$, *entonces* $\lambda a \geq \lambda b$.

Demostración

Notemos que

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \leq 0$*, entonces* $\lambda a \geq \lambda b$*.*

Demostración

Notemos que

$$\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a). \tag{5}$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \leq 0$, *entonces* $\lambda a \geq \lambda b$.

Demostración

Notemos que

$$\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a). \tag{5}$$

Ahora, como $\lambda \leq 0$ *y*

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \leq 0$, *entonces* $\lambda a \geq \lambda b$.

Demostración

Notemos que

$$\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a). \tag{5}$$

Ahora, como $\lambda \leq 0$ *y*

$$a \leq b \Rightarrow b - a \geq 0$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ y $\lambda \leq 0$, entonces $\lambda a \geq \lambda b$.

Demostración

Notemos que

$$\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a). \tag{5}$$

Ahora, como $\lambda \leq 0$ y

$$a \leq b \Rightarrow b - a \geq 0$$

se sigue de (5) que

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \leq 0$*, entonces* $\lambda a \geq \lambda b$*.*

Demostración

Notemos que

$$\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a). \tag{5}$$

Ahora, como $\lambda \leq 0$ *y*

$$a \leq b \Rightarrow b - a \geq 0$$

se sigue de (5) que

$$\lambda b - \lambda a \leq 0,$$

Ejercicio

Si $a \leq b$ *y* $\lambda \leq 0$, *entonces* $\lambda a \geq \lambda b$.

Demostración

Notemos que

$$\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a). \tag{5}$$

Ahora, como $\lambda \leq 0$ *y*

$$a \leq b \Rightarrow b - a \geq 0$$

se sigue de (5) que

$$\lambda b - \lambda a \leq 0,$$

esto es

$$\lambda b \leq \lambda a.$$

□

Ejercicio

Si $x \neq 0$, *entonces* $x^2 > 0$.

Ejercicio

Si $x \neq 0$, *entonces* $x^2 > 0$.

Demostración

Ejercicio

Si $x \neq 0$, *entonces* $x^2 > 0$.

Demostración

Como $x \neq 0$, *entonces*

Ejercicio

Si $x \neq 0$, *entonces* $x^2 > 0$.

Demostración

Como $x \neq 0$, *entonces* $x > 0$ *ó* $x < 0$.

Ejercicio

Si $x \neq 0$, *entonces* $x^2 > 0$.

Demostración

Como $x \neq 0$, *entonces* $x > 0$ *ó* $x < 0$.
Tenemos así dos casos

Ejercicio

Si $x \neq 0$, *entonces* $x^2 > 0$.

Demostración

Como $x \neq 0$, *entonces* $x > 0$ *ó* $x < 0$.

Tenemos así dos casos

i) *Si* $x > 0$, *entonces*

Ejercicio

Si $x \neq 0$, *entonces* $x^2 > 0$.

Demostración

Como $x \neq 0$, *entonces* $x > 0$ *ó* $x < 0$.
Tenemos así dos casos

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $x^2 = xx > 0$.

Ejercicio

Si $x \neq 0$*, entonces* $x^2 > 0$.

Demostración

Como $x \neq 0$*, entonces* $x > 0$ *ó* $x < 0$.
Tenemos así dos casos

i) *Si* $x > 0$*, entonces* $x^2 = xx > 0$.
ii) *Si* $x < 0$*, entonces*

Ejercicio

Si $x \neq 0$, *entonces* $x^2 > 0$.

Demostración

Como $x \neq 0$, *entonces* $x > 0$ *ó* $x < 0$.
Tenemos así dos casos

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $x^2 = xx > 0$.
ii) *Si* $x < 0$, *entonces* $x^2 = xx > 0$.

Ejercicio

Si $x \neq 0$, *entonces* $x^2 > 0$.

Demostración

Como $x \neq 0$, *entonces* $x > 0$ *ó* $x < 0$.
Tenemos así dos casos

i) *Si* $x > 0$, *entonces* $x^2 = xx > 0$.
ii) *Si* $x < 0$, *entonces* $x^2 = xx > 0$.

Tenemos así que en cualquier caso, $x^2 > 0$. $\square$

Notemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$.

Notemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$.

Luego si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

Notemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$.

Luego si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 + y^2 \geq 0$.

Notemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$.

Luego si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 + y^2 \geq 0$.

En general si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces

Notemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$.

Luego si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 + y^2 \geq 0$.

En general si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$.

Notemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$.

Luego si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 + y^2 \geq 0$.

En general si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$.

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Notemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$.

Luego si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 + y^2 \geq 0$.

En general si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$.

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Demostración

Notemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$.

Luego si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 + y^2 \geq 0$.

En general si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$.

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Demostración

Se sigue del hecho de que

$$x^2 + y^2 - 2xy =$$

Notemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$.

Luego si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 + y^2 \geq 0$.

En general si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$.

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Demostración

Se sigue del hecho de que

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2$$

Notemos que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geq 0$.

Luego si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 + y^2 \geq 0$.

En general si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$.

Ejercicio

Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

Demostración

Se sigue del hecho de que

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0.$$

$\square$

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, $b > 0$ *y* $a^2 < b^2$, *entonces* $a < b$.

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, $b > 0$ *y* $a^2 < b^2$, *entonces* $a < b$.

Demostración

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, $b > 0$ *y* $a^2 < b^2$, *entonces* $a < b$.

Demostración

Notemos que $a^2 < b^2$ *si y solo si*

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, $b > 0$ *y* $a^2 < b^2$, *entonces* $a < b$.

Demostración

Notemos que $a^2 < b^2$ *si y solo si*

$$0 < b^2 - a^2 =$$

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, $b > 0$ *y* $a^2 < b^2$, *entonces* $a < b$.

Demostración

Notemos que $a^2 < b^2$ *si y solo si*

$$0 < b^2 - a^2 = (b + a)(b - a). \tag{6}$$

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, $b > 0$ *y* $a^2 < b^2$, *entonces* $a < b$.

Demostración

Notemos que $a^2 < b^2$ *si y solo si*

$$0 < b^2 - a^2 = (b + a)(b - a). \tag{6}$$

Como $a > 0$ *y* $b > 0$, *entonces*

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, $b > 0$ *y* $a^2 < b^2$, *entonces* $a < b$.

Demostración

Notemos que $a^2 < b^2$ *si y solo si*

$$0 < b^2 - a^2 = (b + a)(b - a). \tag{6}$$

Como $a > 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $b + a > 0$.

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, $b > 0$ *y* $a^2 < b^2$, *entonces* $a < b$.

Demostración

Notemos que $a^2 < b^2$ *si y solo si*

$$0 < b^2 - a^2 = (b+a)(b-a). \tag{6}$$

Como $a > 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $b + a > 0$. *Así, de (6) se sigue que*

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, $b > 0$ *y* $a^2 < b^2$, *entonces* $a < b$.

Demostración

Notemos que $a^2 < b^2$ *si y solo si*

$$0 < b^2 - a^2 = (b + a)(b - a). \tag{6}$$

Como $a > 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $b + a > 0$. *Así, de (6) se sigue que* $b - a > 0$, *es decir,*

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, $b > 0$ *y* $a^2 < b^2$, *entonces* $a < b$.

Demostración

Notemos que $a^2 < b^2$ *si y solo si*

$$0 < b^2 - a^2 = (b + a)(b - a). \tag{6}$$

Como $a > 0$ *y* $b > 0$, *entonces* $b + a > 0$. *Así, de (6) se sigue que* $b - a > 0$, *es decir,* $a < b$. $\square$

Ejercicio

Demostrar que $x^2 - 6x + 10 \geq 1$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio

Demostrar que $x^2 - 6x + 10 \geq 1$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración

Ejercicio

Demostrar que $x^2 - 6x + 10 \geq 1$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración

Como $x^2 - 6x + 10 =$

Ejercicio

Demostrar que $x^2 - 6x + 10 \geq 1$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración

Como $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$ *y*

Ejercicio

Demostrar que $x^2 - 6x + 10 \geq 1$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración

Como $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$ *y* $(x-3)^2 \geq 0$,

Ejercicio

Demostrar que $x^2 - 6x + 10 \geq 1$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración

Como $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$ *y* $(x-3)^2 \geq 0$, *tenemos que*

$$x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 \geq 1,$$

Ejercicio

Demostrar que $x^2 - 6x + 10 \geq 1$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$.

Demostración

Como $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$ *y* $(x-3)^2 \geq 0$, *tenemos que*

$$x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 \geq 1,$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Ejercicio

Demostrar que $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$ *para cualesquiera* $x, y \geq 0$.

Ejercicio

Demostrar que $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$ *para cualesquiera* $x, y \geq 0$.

Demostración

Ejercicio

Demostrar que $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$ *para cualesquiera* $x, y \geq 0$.

Demostración

Tenemos que

Ejercicio

Demostrar que $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$ *para cualesquiera* $x, y \geq 0$.

Demostración

Tenemos que

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$ *para cualesquiera* $x, y \geq 0$.

Demostración

Tenemos que

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$ *para cualesquiera* $x, y \geq 0$.

Demostración

Tenemos que

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$ *para cualesquiera* $x, y \geq 0$.

Demostración

Tenemos que

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Demostrar que $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$ *para cualesquiera* $x, y \geq 0$.

Demostración

Tenemos que

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0.$$

Ejercicio

Demostrar que $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$ *para cualesquiera* $x, y \geq 0$.

Demostración

Tenemos que

$$\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{xy} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0.$$

Como $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$ *es cierta,* $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$ *es también cierta y tenemos así la desigualdad deseada.* $\square$

Ejercicio

Si $x > 0$, *demostrar que* $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Ejercicio

Si $x > 0$, *demostrar que* $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Demostración

Ejercicio

Si $x > 0$, *demostrar que* $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Demostración

Tenemos que

Ejercicio

Si $x > 0$*, demostrar que* $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Demostración

Tenemos que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Si $x > 0$, *demostrar que* $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Demostración

Tenemos que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Si $x > 0$*, demostrar que* $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Demostración

Tenemos que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\Leftrightarrow$$

Ejercicio

Si $x > 0$, demostrar que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Demostración

Tenemos que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Si $x > 0$, *demostrar que* $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Demostración

Tenemos que

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0.$$

Ejercicio

Si $x > 0$*, demostrar que* $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Demostración

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
& x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \\
& \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Como esta última desigualdad es cierta, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ *es cierta.* $\square$

Ejercicio

Demostrar que

$$x^4 + 2x^2y^2 - x^2 + 2x + y^4 - 2y^2 + 2 \geq 0$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ *y determinar para qué valores de* x *y* y *se alcanza la igualdad.*

Ejercicio

Demostrar que

$$x^4 + 2x^2y^2 - x^2 + 2x + y^4 - 2y^2 + 2 \geq 0$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ *y determinar para qué valores de* x *y* y *se alcanza la igualdad.*

Demostración

Ejercicio

Demostrar que

$$x^4 + 2x^2y^2 - x^2 + 2x + y^4 - 2y^2 + 2 \geq 0$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ *y determinar para qué valores de* x *y* y *se alcanza la igualdad.*

Demostración

Recordemos que

Ejercicio

Demostrar que

$$x^4 + 2x^2y^2 - x^2 + 2x + y^4 - 2y^2 + 2 \geq 0$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ *y determinar para qué valores de* x *y* y *se alcanza la igualdad.*

Demostración

Recordemos que

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad y \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Ejercicio

Demostrar que

$$x^4 + 2x^2y^2 - x^2 + 2x + y^4 - 2y^2 + 2 \geq 0$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ *y determinar para qué valores de* x *y* y *se alcanza la igualdad.*

Demostración

Recordemos que

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad y \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Así, completando cuadrados obtenemos

Ejercicio

Demostrar que

$$x^4 + 2x^2y^2 - x^2 + 2x + y^4 - 2y^2 + 2 \geq 0$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ *y determinar para qué valores de* x *y* y *se alcanza la igualdad.*

Demostración

Recordemos que

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad y \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Así, completando cuadrados obtenemos

$$x^4 + 2x^2y^2 - x^2 + 2x + y^4 - 2y^2 + 2$$

Ejercicio

Demostrar que

$$x^4 + 2x^2y^2 - x^2 + 2x + y^4 - 2y^2 + 2 \geq 0$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ *y determinar para qué valores de* x *y* y *se alcanza la igualdad.*

Demostración

Recordemos que

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad y \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Así, completando cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned} & x^4 + 2x^2y^2 - x^2 + 2x + y^4 - 2y^2 + 2 \\ & = \left[\left(x^2\right)^2 + \left(y^2\right)^2 + (-1)^2 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2\right] + \left(x^2 + 2x + 1\right) \end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que

$$x^4 + 2x^2y^2 - x^2 + 2x + y^4 - 2y^2 + 2 \geq 0$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ *y determinar para qué valores de* x *y* y *se alcanza la igualdad.*

Demostración

Recordemos que

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad y \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Así, completando cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned}
&x^4 + 2x^2y^2 - x^2 + 2x + y^4 - 2y^2 + 2 \\
&= \left[\left(x^2\right)^2 + \left(y^2\right)^2 + (-1)^2 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2\right] + \left(x^2 + 2x + 1\right) \\
&= \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2 + (x+1)^2.
\end{aligned}$$

Demostración

Como $\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x+1)^2\geq 0,$ *tenemos que*

Demostración

Como $\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x+1)^2 \geq 0$, *tenemos que*

$$x^4+2x^2y^2-x^2+2x+y^4-2y^2+2 \geq 0.$$

Demostración

Como $\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x+1)^2 \geq 0$, *tenemos que*

$$x^4+2x^2y^2-x^2+2x+y^4-2y^2+2 \geq 0.$$

La igualdad se cumple si y solo si

Demostración

Como $\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x+1)^2 \geq 0$, *tenemos que*

$$x^4+2x^2y^2-x^2+2x+y^4-2y^2+2 \geq 0.$$

La igualdad se cumple si y solo si

$$x^2+y^2-1=0 \qquad y \qquad x+1=0.$$

Demostración

Como $\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x+1)^2 \geq 0$, *tenemos que*

$$x^4+2x^2y^2-x^2+2x+y^4-2y^2+2 \geq 0.$$

La igualdad se cumple si y solo si

$$x^2+y^2-1=0 \qquad y \qquad x+1=0.$$

De la ecuación $x+1=0$, *obtenemos*

Demostración

Como $\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x+1)^2 \geq 0$, *tenemos que*

$$x^4+2x^2y^2-x^2+2x+y^4-2y^2+2 \geq 0.$$

La igualdad se cumple si y solo si

$$x^2+y^2-1=0 \qquad y \qquad x+1=0.$$

De la ecuación $x+1=0$, *obtenemos* $x=-1$.

Demostración

Como $\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x+1)^2 \geq 0$, *tenemos que*

$$x^4+2x^2y^2-x^2+2x+y^4-2y^2+2 \geq 0.$$

La igualdad se cumple si y solo si

$$x^2+y^2-1=0 \qquad y \qquad x+1=0.$$

De la ecuación $x+1=0$, *obtenemos* $x=-1$. *Sustituyendo este valor en la ecuación* $x^2+y^2-1=0$ *obtenemos*

Demostración

Como $\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x+1)^2 \geq 0$, *tenemos que*

$$x^4+2x^2y^2-x^2+2x+y^4-2y^2+2 \geq 0.$$

La igualdad se cumple si y solo si

$$x^2+y^2-1=0 \qquad y \qquad x+1=0.$$

De la ecuación $x+1=0$, *obtenemos* $x=-1$. *Sustituyendo este valor en la ecuación* $x^2+y^2-1=0$ *obtenemos*

$$(-1)^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow$$

Demostración

Como $\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x+1)^2 \geq 0$, *tenemos que*

$$x^4+2x^2y^2-x^2+2x+y^4-2y^2+2 \geq 0.$$

La igualdad se cumple si y solo si

$$x^2+y^2-1=0 \qquad y \qquad x+1=0.$$

De la ecuación $x+1=0$, *obtenemos* $x=-1$. *Sustituyendo este valor en la ecuación* $x^2+y^2-1=0$ *obtenemos*

$$(-1)^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow y^2=0 \Leftrightarrow$$

Demostración

Como $\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x+1)^2 \geq 0$, *tenemos que*

$$x^4+2x^2y^2-x^2+2x+y^4-2y^2+2 \geq 0.$$

La igualdad se cumple si y solo si

$$x^2+y^2-1=0 \qquad y \qquad x+1=0.$$

De la ecuación $x+1=0$, *obtenemos* $x=-1$. *Sustituyendo este valor en la ecuación* $x^2+y^2-1=0$ *obtenemos*

$$(-1)^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow y^2=0 \Leftrightarrow y=0.$$

Demostración

Como $\left(x^2+y^2-1\right)^2+(x+1)^2 \geq 0$, *tenemos que*

$$x^4+2x^2y^2-x^2+2x+y^4-2y^2+2 \geq 0.$$

La igualdad se cumple si y solo si

$$x^2+y^2-1=0 \qquad y \qquad x+1=0.$$

De la ecuación $x+1=0$, *obtenemos* $x=-1$. *Sustituyendo este valor en la ecuación* $x^2+y^2-1=0$ *obtenemos*

$$(-1)^2+y^2-1=0 \Leftrightarrow y^2=0 \Leftrightarrow y=0.$$

Por lo tanto los únicos valores de x *y* y *para los cuales se cumple la igualdad son* $x=-1$ *y* $y=0$. $\square$

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a + b = 1$. Demostrar que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a + b = 1$. Demostrar que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a+b=1$. Demostrar que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Notemos que

$$1 = a + b$$

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a + b = 1$. *Demostrar que* $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Notemos que

$$1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b}$$

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a+b=1$. Demostrar que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Notemos que

$$1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b.$$

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a+b=1$. Demostrar que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Notemos que

$$1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b.$$

Luego

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a+b=1$. Demostrar que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Notemos que

$$1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b.$$

Luego

$$1 - \left(a^a b^b + a^b b^a\right)$$

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a+b=1$. Demostrar que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Notemos que

$$1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b.$$

Luego

$$1 - \left(a^a b^b + a^b b^a\right) \quad = \quad a^a a^b + b^a b^b - a^a b^b - a^b b^a$$

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a+b=1$. Demostrar que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Notemos que

$$1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b.$$

Luego

$$\begin{aligned} 1 - \left(a^a b^b + a^b b^a\right) &= a^a a^b + b^a b^b - a^a b^b - a^b b^a \\ &= \left(a^a a^b - a^a b^b\right) + \left(b^a b^b - a^b b^a\right) \end{aligned}$$

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a+b=1$. Demostrar que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Notemos que

$$1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b.$$

Luego

$$\begin{aligned} 1 - \left(a^a b^b + a^b b^a\right) &= a^a a^b + b^a b^b - a^a b^b - a^b b^a \\ &= \left(a^a a^b - a^a b^b\right) + \left(b^a b^b - a^b b^a\right) \\ &= a^a \left(a^b - b^b\right) + b^a \left(b^b - a^b\right) \end{aligned}$$

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a+b=1$. Demostrar que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Notemos que

$$1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b.$$

Luego

$$\begin{aligned} 1 - \left(a^a b^b + a^b b^a\right) &= a^a a^b + b^a b^b - a^a b^b - a^b b^a \\ &= \left(a^a a^b - a^a b^b\right) + \left(b^a b^b - a^b b^a\right) \\ &= a^a \left(a^b - b^b\right) + b^a \left(b^b - a^b\right) \\ &= b^a \left(b^b - a^b\right) - a^a \left(b^b - a^b\right) \end{aligned}$$

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a+b=1$. Demostrar que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Notemos que

$$1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b.$$

Luego

$$\begin{aligned}
1 - \left(a^a b^b + a^b b^a\right) &= a^a a^b + b^a b^b - a^a b^b - a^b b^a \\
&= \left(a^a a^b - a^a b^b\right) + \left(b^a b^b - a^b b^a\right) \\
&= a^a \left(a^b - b^b\right) + b^a \left(b^b - a^b\right) \\
&= b^a \left(b^b - a^b\right) - a^a \left(b^b - a^b\right) \\
&= \left(b^b - a^b\right)\left(b^a - a^a\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a+b=1$. Demostrar que $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Notemos que

$$1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b.$$

Luego

$$\begin{aligned}
1 - \left(a^a b^b + a^b b^a\right) &= a^a a^b + b^a b^b - a^a b^b - a^b b^a \\
&= \left(a^a a^b - a^a b^b\right) + \left(b^a b^b - a^b b^a\right) \\
&= a^a \left(a^b - b^b\right) + b^a \left(b^b - a^b\right) \\
&= b^a \left(b^b - a^b\right) - a^a \left(b^b - a^b\right) \\
&= \left(b^b - a^b\right)\left(b^a - a^a\right) \geq 0,
\end{aligned}$$

Ejercicio

Sean a y b números reales positivos tales que $a + b = 1$. *Demostrar que* $a^a b^b + a^b b^a \leq 1$.

Demostración

Notemos que

$$1 = a + b = a^{a+b} + b^{a+b} = a^a a^b + b^a b^b.$$

Luego

$$\begin{aligned}
1 - \left(a^a b^b + a^b b^a\right) &= a^a a^b + b^a b^b - a^a b^b - a^b b^a \\
&= \left(a^a a^b - a^a b^b\right) + \left(b^a b^b - a^b b^a\right) \\
&= a^a \left(a^b - b^b\right) + b^a \left(b^b - a^b\right) \\
&= b^a \left(b^b - a^b\right) - a^a \left(b^b - a^b\right) \\
&= \left(b^b - a^b\right)\left(b^a - a^a\right) \geq 0,
\end{aligned}$$

ya que ambos factores son no negativos o ambos son no positivos.

Demostración

En efecto:

Demostración

En efecto:
Si $a \leq b$, entonces

Demostración

En efecto:
Si $a \leq b$, *entonces* $b^b \geq a^b$ *y* $b^a \geq a^a$,

Demostración

En efecto:

Si $a \leq b$, *entonces* $b^b \geq a^b$ *y* $b^a \geq a^a$, *esto es*

Demostración

En efecto:
Si $a \leq b$, *entonces* $b^b \geq a^b \;\; y \;\; b^a \geq a^a$, *esto es* $b^b - a^b \geq 0 \;\; y \;\; b^a - a^a \geq 0$.

Demostración

En efecto:
Si $a \leq b$, *entonces* $b^b \geq a^b$ *y* $b^a \geq a^a$, *esto es* $b^b - a^b \geq 0$ *y* $b^a - a^a \geq 0$.
Análogamente, si $a \geq b$, *entonces*

Demostración

En efecto:

Si $a \leq b$, *entonces* $b^b \geq a^b$ *y* $b^a \geq a^a$, *esto es* $b^b - a^b \geq 0$ *y* $b^a - a^a \geq 0$.

Análogamente, si $a \geq b$, *entonces* $b^b - a^b \leq 0$ *y* $b^a - a^a \leq 0$. $\square$

Ejercicio

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ *con* $a \neq 0$. *Encontrar los valores de* x *para los cuales* $ax^2 + bx + c = 0$.

Ejercicio

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ *con* $a \neq 0$. *Encontrar los valores de* x *para los cuales* $ax^2 + bx + c = 0$.

Demostración

Ejercicio

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ *con* $a \neq 0$. *Encontrar los valores de* x *para los cuales* $ax^2 + bx + c = 0$.

Demostración

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Encontrar los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c = 0$.

Demostración

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Encontrar los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c = 0$.

Demostración

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow$$

Ejercicio

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ *con* $a \neq 0$. *Encontrar los valores de* x *para los cuales* $ax^2 + bx + c = 0$.

Demostración

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

Ejercicio

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Encontrar los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c = 0$.

Demostración

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Ejercicio

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Encontrar los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c = 0$.

Demostración

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Ejercicio

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Encontrar los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c = 0$.

Demostración

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

Ejercicio

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Encontrar los valores de x para los cuales $ax^2 + bx + c = 0$.

Demostración

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$*, la cuadrática* $ax^2 + 2bx + c$ *tiene un mínimo en* $x = -\frac{b}{a}$ *y el valor mínimo es* $c - \frac{b^2}{a}$.

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, la cuadrática $ax^2 + 2bx + c$ tiene un mínimo en $x = -\frac{b}{a}$ y el valor mínimo es $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, la cuadrática $ax^2 + 2bx + c$ tiene un mínimo en $x = -\frac{b}{a}$ y el valor mínimo es $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Completando cuadrados obtenemos

$$ax^2 + 2bx + c \quad =$$

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, la cuadrática $ax^2 + 2bx + c$ tiene un mínimo en $x = -\frac{b}{a}$ y el valor mínimo es $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Completando cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x\right) + c \\ &= \end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, *la cuadrática* $ax^2 + 2bx + c$ *tiene un mínimo en* $x = -\frac{b}{a}$ *y el valor mínimo es* $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Completando cuadrados obtenemos

$$
\begin{aligned}
ax^2 + 2bx + c &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2}\right) + c - \frac{b^2}{a} \\
&=
\end{aligned}
$$

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$, la cuadrática $ax^2 + 2bx + c$ tiene un mínimo en $x = -\frac{b}{a}$ y el valor mínimo es $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Completando cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2}\right) + c - \frac{b^2}{a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que si $a > 0$*, la cuadrática* $ax^2 + 2bx + c$ *tiene un mínimo en* $x = -\frac{b}{a}$ *y el valor mínimo es* $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Completando cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bx + c &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{a^2}\right) + c - \frac{b^2}{a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Como $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 0$ *y como el valor mínimo de esta última expresión es cero, cuando* $x = -\frac{b}{a}$*, tenemos que el valor mínimo de la cuadrática es* $c - \frac{b^2}{a}$. $\square$

Ejercicio

Demostrar que si $a < 0$*, la cuadrática* $ax^2 + 2bx + c$ *tiene un máximo en* $x = -\frac{b}{a}$ *y el valor máximo es* $c - \frac{b^2}{a}$.

Ejercicio

Demostrar que si $a < 0$, la cuadrática $ax^2 + 2bx + c$ tiene un máximo en $x = -\frac{b}{a}$ y el valor máximo es $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Ejercicio

Demostrar que si $a < 0$, la cuadrática $ax^2 + 2bx + c$ tiene un máximo en $x = -\frac{b}{a}$ y el valor máximo es $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Igual que antes, completando cuadrados obtenemos

Ejercicio

Demostrar que si $a < 0$, la cuadrática $ax^2 + 2bx + c$ tiene un máximo en $x = -\frac{b}{a}$ y el valor máximo es $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Igual que antes, completando cuadrados obtenemos

$$ax^2 + 2bx + c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}.$$

Ejercicio

Demostrar que si $a < 0$, *la cuadrática* $ax^2 + 2bx + c$ *tiene un máximo en* $x = -\frac{b}{a}$ *y el valor máximo es* $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Igual que antes, completando cuadrados obtenemos

$$ax^2 + 2bx + c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}.$$

Como $a < 0$ *y* $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 0$ *tenemos que*

Ejercicio

Demostrar que si $a < 0$, la cuadrática $ax^2 + 2bx + c$ tiene un máximo en $x = -\frac{b}{a}$ y el valor máximo es $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Igual que antes, completando cuadrados obtenemos

$$ax^2 + 2bx + c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}.$$

Como $a < 0$ y $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 0$ tenemos que

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \leq 0$$

Ejercicio

Demostrar que si $a < 0$*, la cuadrática* $ax^2 + 2bx + c$ *tiene un máximo en* $x = -\frac{b}{a}$ *y el valor máximo es* $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Igual que antes, completando cuadrados obtenemos

$$ax^2 + 2bx + c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}.$$

Como $a < 0$ *y* $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 0$ *tenemos que*

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \leq 0$$

y el valor más grande de esta última expresión es cero, luego la cuadrática siempre es menor o igual a $c - \frac{b^2}{a}$ *y toma este valor en*

Ejercicio

Demostrar que si $a < 0$, la cuadrática $ax^2 + 2bx + c$ tiene un máximo en $x = -\frac{b}{a}$ y el valor máximo es $c - \frac{b^2}{a}$.

Demostración

Igual que antes, completando cuadrados obtenemos

$$ax^2 + 2bx + c = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{a}.$$

Como $a < 0$ y $\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 0$ tenemos que

$$a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 \leq 0$$

y el valor más grande de esta última expresión es cero, luego la cuadrática siempre es menor o igual a $c - \frac{b^2}{a}$ y toma este valor en $x = -\frac{b}{a}$. $\square$

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. Demostrar que si $x + y = 2a$, el producto xy es máximo cuando $x = y = a$.

Ejercicio

Sean $x, y > 0$*. Demostrar que si* $x + y = 2a$*, el producto* xy *es máximo cuando* $x = y = a$*.*

Demostración

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. Demostrar que si $x + y = 2a$, el producto xy es máximo cuando $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. Demostrar que si $x + y = 2a$, el producto xy es máximo cuando $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$x + y = 2a \Leftrightarrow y = 2a - x.$$

Ejercicio

Sean $x, y > 0$*. Demostrar que si* $x + y = 2a$*, el producto* xy *es máximo cuando* $x = y = a$*.*

Demostración

Notemos que

$$x + y = 2a \Leftrightarrow y = 2a - x.$$

Por lo tanto

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. *Demostrar que si* $x + y = 2a$, *el producto* xy *es máximo cuando* $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$x + y = 2a \Leftrightarrow y = 2a - x.$$

Por lo tanto

$$xy = x(2a - x) = -x^2 + 2ax = -(x - a)^2 + a^2,$$

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. *Demostrar que si* $x + y = 2a$, *el producto* xy *es máximo cuando* $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$x + y = 2a \Leftrightarrow y = 2a - x.$$

Por lo tanto

$$xy = x(2a - x) = -x^2 + 2ax = -(x - a)^2 + a^2,$$

es máximo cuando $x = a$ *y entonces*

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. Demostrar que si $x + y = 2a$, el producto xy es máximo cuando $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$x + y = 2a \Leftrightarrow y = 2a - x.$$

Por lo tanto

$$xy = x(2a - x) = -x^2 + 2ax = -(x - a)^2 + a^2,$$

es máximo cuando $x = a$ y entonces $y = x = a$. $\square$

Interpretación geométrica:

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. Demostrar que si $x + y = 2a$, el producto xy es máximo cuando $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$x + y = 2a \Leftrightarrow y = 2a - x.$$

Por lo tanto

$$xy = x(2a - x) = -x^2 + 2ax = -(x - a)^2 + a^2,$$

es máximo cuando $x = a$ y entonces $y = x = a$. $\square$

Interpretación geométrica:
"De los rectángulos de perímetro fijo, el de mayor área es el cuadrado".

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. Demostrar que si $x + y = 2a$, el producto xy es máximo cuando $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$x + y = 2a \Leftrightarrow y = 2a - x.$$

Por lo tanto

$$xy = x(2a - x) = -x^2 + 2ax = -(x - a)^2 + a^2,$$

es máximo cuando $x = a$ y entonces $y = x = a$. $\square$

Interpretación geométrica:
"De los rectángulos de perímetro fijo, el de mayor área es el cuadrado".Ya que si x, y son los lados del rectángulo, el perímetro es

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. Demostrar que si $x + y = 2a$, el producto xy es máximo cuando $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$x + y = 2a \Leftrightarrow y = 2a - x.$$

Por lo tanto

$$xy = x(2a - x) = -x^2 + 2ax = -(x - a)^2 + a^2,$$

es máximo cuando $x = a$ y entonces $y = x = a$. $\square$

Interpretación geométrica:
"De los rectángulos de perímetro fijo, el de mayor área es el cuadrado".Ya que si x, y son los lados del rectángulo, el perímetro es $2(x + y) = 4a$, y su área es

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. Demostrar que si $x + y = 2a$, el producto xy es máximo cuando $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$x + y = 2a \Leftrightarrow y = 2a - x.$$

Por lo tanto

$$xy = x(2a - x) = -x^2 + 2ax = -(x - a)^2 + a^2,$$

es máximo cuando $x = a$ y entonces $y = x = a$. $\square$

Interpretación geométrica:
"De los rectángulos de perímetro fijo, el de mayor área es el cuadrado". Ya que si x, y son los lados del rectángulo, el perímetro es $2(x + y) = 4a$, y su área es xy, que es máxima cuando

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. Demostrar que si $x + y = 2a$, el producto xy es máximo cuando $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$x + y = 2a \Leftrightarrow y = 2a - x.$$

Por lo tanto

$$xy = x(2a - x) = -x^2 + 2ax = -(x - a)^2 + a^2,$$

es máximo cuando $x = a$ y entonces $y = x = a$. $\square$

Interpretación geométrica:
"De los rectángulos de perímetro fijo, el de mayor área es el cuadrado".Ya que si x, y son los lados del rectángulo, el perímetro es $2(x + y) = 4a$, y su área es xy, que es máxima cuando $x = y = a$.

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. *Demostrar que si* $xy = a^2$, *la suma* $x + y$ *es mínima cuando* $x = y = a$.

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. *Demostrar que si* $xy = a^2$, *la suma* $x + y$ *es mínima cuando* $x = y = a$.

Demostración

Ejercicio

Sean $x, y > 0$*. Demostrar que si* $xy = a^2$*, la suma* $x + y$ *es mínima cuando* $x = y = a$*.*

Demostración

Notemos que

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. Demostrar que si $xy = a^2$, la suma $x + y$ es mínima cuando $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$xy = a^2 \Leftrightarrow y = \frac{a^2}{x}.$$

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. *Demostrar que si* $xy = a^2$, *la suma* $x + y$ *es mínima cuando* $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$xy = a^2 \Leftrightarrow y = \frac{a^2}{x}.$$

Por lo tanto

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. Demostrar que si $xy = a^2$, la suma $x + y$ es mínima cuando $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$xy = a^2 \Leftrightarrow y = \frac{a^2}{x}.$$

Por lo tanto

$$x + y = x + \frac{a^2}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2a,$$

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. *Demostrar que si* $xy = a^2$, *la suma* $x + y$ *es mínima cuando* $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$xy = a^2 \Leftrightarrow y = \frac{a^2}{x}.$$

Por lo tanto

$$x + y = x + \frac{a^2}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2a,$$

luego $x + y$ *es mínimo cuando*

Ejercicio

Sean $x, y > 0$*. Demostrar que si* $xy = a^2$*, la suma* $x + y$ *es mínima cuando* $x = y = a$*.*

Demostración

Notemos que

$$xy = a^2 \Leftrightarrow y = \frac{a^2}{x}.$$

Por lo tanto

$$x + y = x + \frac{a^2}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2a,$$

luego $x + y$ *es mínimo cuando*

$$\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow$$

Ejercicio

Sean $x, y > 0$. Demostrar que si $xy = a^2$, la suma $x + y$ es mínima cuando $x = y = a$.

Demostración

Notemos que

$$xy = a^2 \Leftrightarrow y = \frac{a^2}{x}.$$

Por lo tanto

$$x + y = x + \frac{a^2}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2a,$$

luego $x + y$ es mínimo cuando

$$\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

Ejercicio

Sean $x, y > 0$*. Demostrar que si* $xy = a^2$*, la suma* $x + y$ *es mínima cuando* $x = y = a$*.*

Demostración

Notemos que

$$xy = a^2 \Leftrightarrow y = \frac{a^2}{x}.$$

Por lo tanto

$$x + y = x + \frac{a^2}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2a,$$

luego $x + y$ *es mínimo cuando*

$$\sqrt{x} - \frac{a}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = a.$$

En consecuencia $y = x = a$. $\square$

Interpretación geométrica:

Interpretación geométrica:

"De los rectángulos de área fija, el cuadrado es el de menor perímetro".

Ejercicio

Demostrar que la cuadrática $ax^2 + bx + c$ *es positiva cuando* $a > 0$ *y el discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Ejercicio

Demostrar que la cuadrática $ax^2 + bx + c$ *es positiva cuando* $a > 0$ *y el discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Demostración

Ejercicio

Demostrar que la cuadrática $ax^2 + bx + c$ *es positiva cuando* $a > 0$ *y el discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Demostración

Notemos que

Ejercicio

Demostrar que la cuadrática $ax^2 + bx + c$ *es positiva cuando* $a > 0$ *y el discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Demostración

Notemos que

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

Ejercicio

Demostrar que la cuadrática $ax^2 + bx + c$ es positiva cuando $a > 0$ y el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Demostración

Notemos que

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

Ejercicio

Demostrar que la cuadrática $ax^2 + bx + c$ *es positiva cuando* $a > 0$ *y el discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Demostración

Notemos que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que la cuadrática $ax^2 + bx + c$ es positiva cuando $a > 0$ y el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Demostración

Notemos que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

De lo cual, observamos que

Ejercicio

Demostrar que la cuadrática $ax^2 + bx + c$ es positiva cuando $a > 0$ y el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Demostración

Notemos que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

De lo cual, observamos que

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad si \quad a > 0 \quad y \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

□

Ejercicio

Demostrar que, dados $a, b, c > 0$, se puede construir un triángulo con lados de longitud a, b y c si y solo si $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ para cualesquiera p, q con $p + q = 1$.

Ejercicio

Demostrar que, dados $a, b, c > 0$, se puede construir un triángulo con lados de longitud a, b y c si y solo si $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ para cualesquiera p, q con $p + q = 1$.

Demostración

Ejercicio

Demostrar que, dados $a, b, c > 0$, se puede construir un triángulo con lados de longitud a, b y c si y solo si $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ para cualesquiera p, q con $p + q = 1$.

Demostración

Recordemos que a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y solo si

Ejercicio

Demostrar que, dados $a, b, c > 0$, se puede construir un triángulo con lados de longitud a, b y c si y solo si $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ para cualesquiera p, q con $p + q = 1$.

Demostración

Recordemos que a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y solo si

$$a + b > c, \qquad a + c > b, \qquad y \qquad b + c > a.$$

Ejercicio

Demostrar que, dados $a, b, c > 0$, se puede construir un triángulo con lados de longitud a, b y c si y solo si $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ para cualesquiera p, q con $p + q = 1$.

Demostración

Recordemos que a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y solo si

$$a + b > c, \qquad a + c > b, \qquad y \qquad b + c > a.$$

Sea

$$Q \quad = \quad pa^2 + qb^2 - pqc^2 =$$

Ejercicio

Demostrar que, dados $a, b, c > 0$*, se puede construir un triángulo con lados de longitud* a, b *y* c *si y solo si* $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ *para cualesquiera* p, q *con* $p + q = 1$.

Demostración

Recordemos que a, b *y* c *son las medidas de los lados de un triángulo si y solo si*

$$a + b > c, \qquad a + c > b, \qquad y \qquad b + c > a.$$

Sea

$$Q \quad = \quad pa^2 + qb^2 - pqc^2 = pa^2 + (1-p)b^2 - p(1-p)c^2$$

Ejercicio

Demostrar que, dados $a, b, c > 0$, se puede construir un triángulo con lados de longitud a, b y c si y solo si $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ para cualesquiera p, q con $p + q = 1$.

Demostración

Recordemos que a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y solo si

$$a + b > c, \qquad a + c > b, \qquad y \qquad b + c > a.$$

Sea

$$\begin{aligned} Q &= pa^2 + qb^2 - pqc^2 = pa^2 + (1-p)b^2 - p(1-p)c^2 \\ &= c^2p^2 + \left(a^2 - b^2 - c^2\right)p + b^2. \end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar que, dados $a, b, c > 0$, se puede construir un triángulo con lados de longitud a, b y c si y solo si $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ para cualesquiera p, q con $p + q = 1$.

Demostración

Recordemos que a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y solo si

$$a + b > c, \qquad a + c > b, \qquad y \qquad b + c > a.$$

Sea

$$\begin{aligned} Q &= pa^2 + qb^2 - pqc^2 = pa^2 + (1-p)b^2 - p(1-p)c^2 \\ &= c^2p^2 + \left(a^2 - b^2 - c^2\right)p + b^2. \end{aligned}$$

Q es una función cuadrática de p, por lo que

Ejercicio

Demostrar que, dados $a, b, c > 0$, *se puede construir un triángulo con lados de longitud* a, b *y* c *si y solo si* $pa^2 + qb^2 > pqc^2$ *para cualesquiera* p, q *con* $p + q = 1$.

Demostración

Recordemos que a, b *y* c *son las medidas de los lados de un triángulo si y solo si*

$$a + b > c, \qquad a + c > b, \qquad y \qquad b + c > a.$$

Sea

$$\begin{aligned} Q &= pa^2 + qb^2 - pqc^2 = pa^2 + (1-p)b^2 - p(1-p)c^2 \\ &= c^2p^2 + \left(a^2 - b^2 - c^2\right)p + b^2. \end{aligned}$$

Q *es una función cuadrática de* p, *por lo que*

$$Q > 0 \Leftrightarrow \Delta = \left[\left(a^2 - b^2 - c^2\right)^2 - 4b^2c^2\right] < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right]\left[a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right] < 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right]\left[a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - (b+c)^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right]\left[a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - (b+c)^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [a+b+c]\,[a-b-c]\,[a-b+c]\,[a+b-c] < 0 \\
&\Leftrightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad & \left[a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right]\left[a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right] < 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \left[a^2 - (b+c)^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] < 0 \\
\Leftrightarrow\quad & [a+b+c]\,[a-b-c]\,[a-b+c]\,[a+b-c] < 0 \\
\Leftrightarrow\quad & [b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right]\left[a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - (b+c)^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [a+b+c]\,[a-b-c]\,[a-b+c]\,[a+b-c] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0.
\end{aligned}
$$

Ahora $[b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0$, si

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right]\left[a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - (b+c)^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [a+b+c]\,[a-b-c]\,[a-b+c]\,[a+b-c] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0.
\end{aligned}$$

Ahora $[b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0$, si los tres factores son positivos o si uno es positivo y dos de ellos negativos.

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \left[a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right]\left[a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right] < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left[a^2 - (b+c)^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & [a+b+c]\,[a-b-c]\,[a-b+c]\,[a+b-c] < 0 \\
\Leftrightarrow \quad & [b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0.
\end{aligned}
$$

Ahora $[b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0$, si los tres factores son positivos o si uno es positivo y dos de ellos negativos. Esto último es imposible, pues si por ejemplo,

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right]\left[a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - (b+c)^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [a+b+c]\,[a-b-c]\,[a-b+c]\,[a+b-c] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0.
\end{aligned}$$

Ahora $[b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0$, si los tres factores son positivos o si uno es positivo y dos de ellos negativos. Esto último es imposible, pues si por ejemplo,

$$b+c-a<0 \qquad \text{y} \qquad c+a-b<0,$$

tendríamos al sumar estas desigualdades que

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right]\left[a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - (b+c)^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [a+b+c]\,[a-b-c]\,[a-b+c]\,[a+b-c] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0.
\end{aligned}
$$

Ahora $[b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0$, si los tres factores son positivos o si uno es positivo y dos de ellos negativos. Esto último es imposible, pues si por ejemplo,

$$b+c-a<0 \qquad \text{y} \qquad c+a-b<0,$$

tendríamos al sumar estas desigualdades que $c < 0$, lo cual es falso.

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - b^2 - c^2 - 2bc\right]\left[a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left[a^2 - (b+c)^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [a+b+c]\,[a-b-c]\,[a-b+c]\,[a+b-c] < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0.
\end{aligned}
$$

Ahora $[b+c-a]\,[c+a-b]\,[a+b-c] > 0$, si los tres factores son positivos o si uno es positivo y dos de ellos negativos. Esto último es imposible, pues si por ejemplo,

$$b + c - a < 0 \qquad \text{y} \qquad c + a - b < 0,$$

tendríamos al sumar estas desigualdades que $c < 0$, lo cual es falso. Así los tres factores son necesariamente positivos. $\square$

Ejercicio

Demostrar que si $a, b, c > 0$*, entonces no suceden simultáneamente las desigualdades*

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad b(1-c) > \frac{1}{4}, \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Ejercicio

Demostrar que si $a, b, c > 0$, entonces no suceden simultáneamente las desigualdades

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad b(1-c) > \frac{1}{4}, \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Demostración

Ejercicio

Demostrar que si $a, b, c > 0$, entonces no suceden simultáneamente las desigualdades

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad b(1-c) > \frac{1}{4}, \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Demostración

Supongamos que ocurren simultáneamente las tres desigualdades, entonces

Ejercicio

Demostrar que si $a, b, c > 0$, entonces no suceden simultáneamente las desigualdades

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad b(1-c) > \frac{1}{4}, \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Demostración

Supongamos que ocurren simultáneamente las tres desigualdades, entonces

$$a < 1, \quad b < 1, \quad c < 1, \quad y \quad a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \frac{1}{64}. \tag{7}$$

Ejercicio

Demostrar que si $a, b, c > 0$*, entonces no suceden simultáneamente las desigualdades*

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad b(1-c) > \frac{1}{4}, \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Demostración

Supongamos que ocurren simultáneamente las tres desigualdades, entonces

$$a < 1, \quad b < 1, \quad c < 1, \quad y \quad a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \frac{1}{64}. \tag{7}$$

Por otro lado, sabemos que $x(1-x)$ *es máximo cuando*

Ejercicio

Demostrar que si $a, b, c > 0$, entonces no suceden simultáneamente las desigualdades

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad b(1-c) > \frac{1}{4}, \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Demostración

Supongamos que ocurren simultáneamente las tres desigualdades, entonces

$$a < 1, \quad b < 1, \quad c < 1, \quad y \quad a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \frac{1}{64}. \tag{7}$$

Por otro lado, sabemos que $x(1-x)$ es máximo cuando $x = \frac{1}{2}$, en cuyo caso

Ejercicio

Demostrar que si $a, b, c > 0$, entonces no suceden simultáneamente las desigualdades

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \qquad b(1-c) > \frac{1}{4}, \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

Demostración

Supongamos que ocurren simultáneamente las tres desigualdades, entonces

$$a < 1, \quad b < 1, \quad c < 1, \quad y \quad a(1-b)b(1-c)c(1-a) > \frac{1}{64}. \tag{7}$$

Por otro lado, sabemos que $x(1-x)$ es máximo cuando $x = \frac{1}{2}$, en cuyo caso

$$x(1-x) = \frac{1}{4}.$$

Demostración

Por lo tanto $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. *Luego*

Demostración

Por lo tanto $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. *Luego*

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) = a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{64},$$

Demostración

Por lo tanto $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. *Luego*

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) = a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{64},$$

lo cual contradice (7).

Demostración

Por lo tanto $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. *Luego*

$$a(1-b)b(1-c)c(1-a) = a(1-a)b(1-b)c(1-c) \leq \frac{1}{64},$$

lo cual contradice (7). Por lo tanto, no pueden suceder simultáneamente las tres desigualdades. $\square$