Notas de Representaciones de Grupos.

Luis Manuel Reyes de la Luz

Diciembre 2024-Enero 2025

Índice general

Capítulo 1

Generalidades de la Teoría de Representaciones.

1.1. Conceptos básicos de la teoría de Categorías.

En esta sección hablaremos sobre conceptos elementales de la teoría de Categorías, con el objetivo de tener un lenguaje unificado a construcciones generales que se pueden dar en las representaciones de grupos y álgebras. Además presentaremos, con este enfoque categórico, algunas propiedades importantes del álgebra que serán utiles para utilizar en la teoría de Representaciones de Grupos, desde un punto de vista moderno. Para profundizar en estos temas, pueden revisar [3], [1] y [2].

Definición 1.1.1 — Categorías. Una categoría $\mathbf{A}$ consiste en lo siguiente:

1. Una Clase $\mathbf{A}_0$. A los elementos de $\mathbf{A}_0$ les llamaremos objetos de la categoría.
2. Para cada par de objetos A, B, un conjunto $\mathbf{A}(A,B)$. A los elementos de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,B)$ les llamaremos morfismos o $\mathbf{A}$-morfismos de A a B
3. Una Clase $\mathbf{A}_1$ que contiene a todos los conjuntos de forma $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,B)$, con $A,B \in \mathbf{A}_0$
4. Para todo A,B,C objetos, existe una función llamada ley de composición, definida en el conjunto de morfismos

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,C)$$

donde para cada pareja (f,g) la composición lo denotamos como $g \circ f$ ó simplemente gf. Esta composición satisface lo siguiente:

a) (Axioma de Identidad): Para cada objeto A, existe un morfismo $\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,A)$ llamado identidad tal que , para cada morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,B)$ y cada morfismo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(C,A)$ se satisface

$$f\,\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} = f,\ \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}\, g = g$$

b) (Axioma de Asociatividad): Para todo morfismos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(B,C), h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(C,D)$ la siguiente igualdad se cumple:

$$h(gf) = (hg)f$$

■ **Ejemplo 1.1 — Categoría de Conjuntos.** La categoría de Conjuntos, denotado como **Set**, donde los objetos son conjuntos y los morfismos son funciones. ■

■ **Ejemplo 1.2 — Categoría de espacios topológicos.** La categoría de Espacios Topológicos, denotado como **Top**, donde los objetos son espacios topológicos y los morfismos son funciones continuas. ■

■ **Ejemplo 1.3 — Categoría de Grupos.** La categoría de Grupos, denotado como **Grp**, donde los objetos son grupos y los morfismos son morfismos de grupos. ■

■ **Ejemplo 1.4 — Categoría de espacios vectoriales.** La categoría de Espacios Vectoriales bajo un campo k, denotado como **K-Vec**, donde los objetos son k-espacios y los morfismos son funciones k-lineales. ■

■ **Ejemplo 1.5 — Categoría de Matrices.** Sea $\mathbf{A}_0 = \mathbb{N}$, R un anillo y los morfismos de n a m son las matrices con entradas en R, con n filas y m columnas, es decir $\operatorname{Hom}_{\mathbf{A}}(n,m) = \mathbb{M}_{n\times m}(R)$, en este caso la composición se define como el producto de matrices, es decir $\mathbb{M}_{n\times m}(R) \times \mathbb{M}_{m\times q}(R) \to \mathbb{M}_{n\times q}(R)$; $(A,B) \to AB$ y la identidad es la matriz identidad $I_n \in \mathbb{M}_{n\times n}(R) = \mathbf{A}(n,n)$. ■

Definición 1.1.2 — Morfismos especiales. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un morfismo, decimos que f es:

1. *Monomorfismo*, si satisface la siguiente propiedad; para cada par de morfismos $g,h : C \to A$ tal que $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$.
2. *Epimorfismo*, si satisface la siguiente propiedad; para cada par de morfismos $g,h : B \to C$ tal que $g \circ f = h \circ f$ implica $g = h$.
3. *Bimorfismo*, si es monomorfismo y epimorfismo.
4. Sección, si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$, en este caso g se llama retracción.
5. *Isomorfismo*, si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}},\ f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$.

Además, un morfismo $f : A \to A$ se denomina endomorfismo, y cuando $f : A \to A$ es un isomorfismo se denomina automorfismo.

■ **Ejemplo 1.6** Tomemos un grupo G , se puede ver como una categoría en la cual solo hay un objeto $\mathbf{A}_0 = \{*\}$ y el conjunto de morfismos para $\{*\}$ es $\mathscr{G}(*,*) = G$ con la ley de composición es la multiplicación del grupo, la identidad es el elemento identidad del grupo. Según la definición (1.1.2), tenemos que en esta categoría todo morfismo es un isomorfismo, motivando la siguiente definición. ■

Definición 1.1.3 — Grupoide. Una categoría $\mathbf{C}$ se llama grupoide si todo morfismo es un isomorfismo.

■ **Ejemplo 1.7 — Categorías inducidas por órdenes.** Un conjunto parcialmente ordenado $(X,\leq)$ se puede ver como una categoría Σ donde los objetos son los elementos de X, es decir $\Sigma_0 = X$, y los morfismos $\Sigma(x,y)$ son un conjunto con un elemento cuando $x \leq y$, en tal caso lo denotamos por $f_{x,y}$ ó el conjunto vacío en otro caso. Algunas categorías importantes son la siguientes:

1. *Categoría discreta.* Está inducida por un conjunto I y la relación de igualdad. En esta categoría el conjunto $\operatorname{Hom}_I(a,b)$ consta de un solo elemento si y sólo si $a = b$ mientras que en otro caso es vacío.
2. *Categoría de abiertos.* Si consideramos (X,τ) un espacio topológico entonces τ junto a la inclusión es un espacio topológico y entonces puede verse como una categoría y es denotado como $\mathbf{O}(X)$.

■

Ejercicio 1.1 — **Propiedades de Morfismos.** Muestra que en una categoría, son válidos las siguientes afirmaciones:

1. La identidad es un isomorfismo.
2. La composición de isomorfismos es un isomorfismo.

3. Un isomorfismo es un bimorfismo, pero en general no todo bimorfismo es un isomorfismo.
4. Si una sección es un epimorfismo entonces es un isomorfismo.

Del ejercicio anterior tenemos que todo isomorfismo es bimorfismo, sin embargo, existen categorías donde los bimorfismos no son isomorfismos. Por ejemplo consideremos la categoría $\mathbb{Z}-Alg$ donde los objetos son anillos y los morfismos son homomorfismos de anillos. Consideremos el morfismo inclusión $i:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, este morfismo es monomorfismo y epimorfismo, pero i no puede ser isomorfismo ya que $\mathbb{Z}$ no es un campo y $\mathbb{Q}$ si es un campo.

Definición 1.1.4 — Categorías balanceadas. Una categoría en la cual todo bimorfismo es un isomorfismo se le llama categoría balanceada.

Una forma visual de representar los morfismos y su composición es mediante diagramas, por ejemplo consideremos una categoría $\mathbf{C}$ y un morfismo $f\in\mathbf{C}(A,B)$ el morfismo f se puede representar como sigue: $f:A\to B$, la ley de composición de dos morfismos se puede representar como sigue:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

De manera más general, decimos que un diagrama conmuta si coinciden las leyes de composición, por ejemplo consideremos el siguiente triángulo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Decimos que el triángulo conmuta si se satisface $g\circ f=h$. Otro ejemplo, para que el cuadrado siguiente conmute:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "i"'] & D \end{tikzcd}$$

Se debe satisface la siguiente identidad $g\circ f=i\circ h$.

■ **Ejemplo 1.8 — Categoría de diagramas.** Consideremos una categoría $\mathbf{C}$, la categoría de $\mathbf{C}$-morfismos es definido:

1. Objetos: Los $\mathbf{C}$-morfismos $(f\colon A\to A')$
2. Morfismos : Un morfismo de $(f\colon A\to A')$ a $(g\colon B\to B')$ es un par de $\mathbf{C}$-morfismos $(u\colon A\to B, v\colon A'\to B')$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A' \arrow[r, "v"'] & B' \end{tikzcd}$$

Existe una ley de composición definida:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, "h"] \\
A' \arrow[r, "v"] & B' \arrow[r, "v'"] & C'
\end{tikzcd}$$

Entonces la ley de composición es $(u'u\colon A \to C, v'v\colon A' \to C')$, uno puede verificar facilmente que satisface los axiomas de asociatividad y de identidad, donde la identidad es $(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} : A \to A, \mathrm{Id}_{A'} : A' \to A')$. Esta categoría de diagramas es un caso especial de una categoría más general llamada **categoría coma**. ∎

∎ **Ejemplo 1.9** Sea $\mathbf{C}$ una categoría, fijemos un objeto $I \in \mathbf{C}_0$ la categoría de morfismos bajo I, denotado como $\mathbf{C}/I$, es la categoría donde los objetos son morfismos de la forma $(f : A \to I)$, y el morfismo de dos objetos dentro de está categoría es un $\mathbf{C}$-morfismo tal que conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "u"'] & & B \\
& I \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}.$$

Así como en la categoría de diagramas, la ley de composición está dada por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[dl, "h"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

Uno puede verificar que es una categoría, además observemos que el diagrama es equivalente a este diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, "h"] \\
I \arrow[r, "I_I"] & I \arrow[r, "I_I"] & I
\end{tikzcd}$$

Entonces esta categoría se puede ver como una subcategoría de la categoría de diagramas. ∎

Definición 1.1.5 — Subcategoría. Sea $\mathbf{C}$ una categoría, una subcategoría $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ consiste en lo siguiente:

1. Una subcolección de objetos de $\mathbf{C}$ llamado $\mathbf{S}_0$
2. Una subcolección de morfismos $\mathbf{S}$ de $\mathbf{C}$ de tal manera que:
   a) Para cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathbf{S}$, implica que $A, B \in \mathbf{S}_0$
   b) Para cada objeto $A \in \mathbf{S}_0$, $\mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$ está en $\mathbf{S}$
   c) Si f, g son morfismos que están en $\mathbf{S}$ tal que la composición está definida, entonces $g \circ f$ está en $\mathbf{S}$

∎ **Ejemplo 1.10** Consideremos la clase $\vec{k}^f$ cuyos objetos consisten en espacios vectoriales de dimensión finita y los morfismos son los mismos morfismos que en $\vec{k}^f$. Entonces $\vec{k}^f$ es una subcategoría de k-**Vec**. ∎

1.1.1. Ejemplos principales del algebra.

Ahora vamos a prestar atención en algunas categorías que son importantes para nuestro estudio que vienen del Algebra.

■ **Ejemplo 1.11 — R-módulos.** Denotamos **Ab** como la subcategoría de **GRP** cuya clase de objetos consiste en los grupos abelianos. Dado $M \in \mathbf{Ab}$ tenemos que:

1. $\mathrm{End}_{\mathbf{Ab}}(M) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M,M)$ es un anillo junto a la suma de grupos abelianos y la composición.
2. $\mathrm{Aut}(M)$ es el grupo de las unidades de $\mathrm{End}_{\mathbf{Ab}}(M)$.

Con lo anterior en mente, uno puede definir un R-módulo como sigue

Definición 1.1.6 — R-módulo. Un R-módulo consiste en un grupo abeliano M junto a un homomorfismo de anillos $\lambda : R \to \mathrm{End}_{\mathbf{Ab}}(M)$.

Ejercicio 1.2 Muestra que a nivel de conjuntos, existe un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y,Z)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X \times Y, Z)$$

y usando este isomorfismo, muestra que para un grupo abeliano M son equivalentes:

1. Un homomorfismo de anillos $R \to \mathrm{End}_{\mathbf{Ab}}(M)$.
2. Una función $\cdot : R \times M \to M$ tal que se satisfacen:
   a) $r \cdot (s \cdot v) = (rs) \cdot v$, $\forall r, s \in R, \forall v \in M$.
   b) $(r+s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v$, $\forall r, s \in R, \forall v \in M$.
   c) $r \cdot (v+w) = r \cdot v + r \cdot w$, $\forall r \in R, \forall v, w \in M$.
   d) Si R tiene 1, entonces $1 \cdot v = v \ \forall v \in M$

■

Con esto, un homomorfismo de R-módulos, debe ser una función que preserva la estructura de grupo abeliano y la acción de R. Más especifico, dados M,N dos R-módulos, un homomorfismo R-lineal es una función $f : M \to N$ que es un homomorfismo de grupos y para toda $r \in R$ y toda $v \in M$, se cumple:

$$f(r \cdot v) = r \cdot f(v).$$

Esta propiedad se puede traducir en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \longrightarrow & M \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}_R \times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ R \times N & \longrightarrow & N. \end{array}$$

Definimos la categoría R-**Mod** a la categoría cuyos objetos son R-módulos y los morfimos son homomorfismos R-lineales. ■

■ **Ejemplo 1.12** Una R-álgebra asociativa es un anillo que tiene una estructura de R-módulo compatible con la multiplicación del anillo. Estos aparecen de manera común en muchos temas dentro del algebra, por mencionar uno, si V es un K-espacio vectorial, $\mathrm{End}(V)$ tiene una estructura de anillo y de K-espacio vectorial, más aún, la compatibilidad entre sus multiplicaciones está codificada mediante el homomorfismo de anillos siguiente

$$\begin{array}{ccc} K & \to & \mathrm{End}(V) \\ s & \to & (s \cdot (-) : V \to V) \end{array}$$

con esta perspectiva, uno puede desarrollar la teoría de las formas canónicas de Jordan y de los eingevalores para endomorfismos de V. Para extender esto, requerimos el siguiente ejercicio.

Ejercicio 1.3 Sea R,S anillos y $f\colon R \to S$ un homomorfismo de anillos, muestra que la asignación

$$r \cdot s := f(r)s, \ r \in R, s \in S$$

induce una S una estructura de R-módulo. ■

Definición 1.1.7 — R-álgebra asociativa. Dado R un anillo, una R-álgebra asociativa consiste en un anillo S junto a un homomorfismo de anillos $f\colon R \to S$ (denominado homomorfismo estructural) tal que $Im(f) \subseteq Z(S)$.

Dados S,T dos R-álgebras un homomorfismo de R-álgebras es un homomorfismo de anillos $\phi\colon S \to T$ tal que el siguiente diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\phi"] & & T \\
& R \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Con esto en mente, definimos la categoría de R-álgebras como R-**Alg**. ■

Ejercicio 1.4 — Algunas categorías importantes.. En este ejercicio estudiaremos como aparecen de manera natural estas dos categorías. Denotamos $\mathbb{Z}$ el anillo de enteros con su estructura usual de operaciones como anillos.

1. Muestra que para todo anillo R con 1, existe un único homomorfismo de anillos $\mathbb{Z} \to R$.
2. Sea G un grupo abeliano, muestra que G tiene una única estructura como $\mathbb{Z}$-módulo. Además muestra que los homomorfismo de grupos son (con sus respectivas estructuras) homomorfismos $\mathbb{Z}$-lineales. Concluye que la categoría de grupos abelianos **Ab** es la categoría de $\mathbb{Z}$-**Mod**.
3. Sea **C** la subcategoria de **Rng** cuyos objectos son anillos conmutativos con 1. Muestra que **C** es la categoría $\mathbb{Z}$-**Alg**.

■

1.1.2. Funtores y Transformaciones naturales.

Consideremos la categoría $\vec{k}^f$, en la teoría de espacios lineales de dimensión finita, tenemos:

1. Todo espacio vectorial tiene base.
2. Dado V un espacio vectorial de dimensión finita, digamos n, al fijar una base β entonces existe un isomorfismo no canónico $V \cong K^n$. De esta manera, si W es otro espacio vectorial de dimensión m con base γ, para toda función $f\colon V \to W$ que es K-lineal, existe una única matriz $[f]_\beta^\gamma$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f"'] & K^n \arrow[d, "T(x)=[f]_\beta^\gamma x"] \\
W \arrow[r, "\cong"'] & K^m
\end{tikzcd}$$

Con estas dos propiedades, tenemos que desde la perspectiva de la categorías hay una relación estrecha entre la categoría $\vec{k}^f$ y la categoría de matrices $\mathbf{A}(K)$ (1.5) sobre K, más aún, si $f\colon V \to W$ y $g\colon W \to T$ son funciones K-lineales en espacios vectoriales de dimensión finita, entonces se puede probar que:

$$[g \circ f] = [g] * [f]$$

Relacionar objetos y morfismos entre dos categorías es un fenómeno muy natural que se produce en el ámbito matemático, de allí la necesidad del concepto de funtor.

Definición 1.1.8 — Funtor. Sean $\mathbf{A},\mathbf{B}$ dos categorías. Un funtor $\mathscr{F}$ de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, denotado como $\mathscr{F}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$, consiste en lo siguiente

1. Una función entre la clases objetos $\mathbf{A}_0\to\mathbf{B}_0$ que a cada $A\in\mathbf{A}_0$ le asigna un objeto $\mathscr{F}(A)\in\mathbf{B}_0$
2. Para cada par de objetos A,A' de $\mathbf{A}$ existe una función de conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,A')\to\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(\mathscr{F}(A),\mathscr{F}(A'))$ tal que satisface las siguientes identidades:
   a) $\mathscr{F}(g\circ f)=\mathscr{F}(g)\circ\mathscr{F}(f)$
   b) Para cada objeto $A\in\mathbf{A}$, $\mathscr{F}(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}})=\mathrm{Id}_{\mathscr{F}(A)}$

■ **Ejemplo 1.13 — Funtor Grupo de unidades.** Sea $(-)^\times:\mathbf{CRng}\to\mathbf{Grp}$ definido como sigue:

1. A cada anillo conmutativo R lo enviamos al grupo multiplicativo $R^\times=\{u\in R|\ uv=1\}$.
2. Si $f:R\to S$ es un homomorfismo de anillos, dado $u\in R^\times$ entonces $uv=1$, aplicando f obtenemos $f(u)f(v)=1$, por lo que $f(u)\in S^\times$, permitiendo definir $f^\times:=f|_{R^\times}$.

■

■ **Ejemplo 1.14 — Algebra Lineal sobre espacios vectoriales de dimensión finita.** Sea $\mathbf{C}_K$ la categoría cuyos objetos consisten en parejas (V,β_V), en donde $V\in k\text{-}\mathbf{Vec}^f$ y $\beta_V\subseteq V$ es una base. Además, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_K}((V,\beta_V),(W,\beta_W))=\mathrm{Hom}_K(V,W)$ y la composición usual. Podemos construir un funtor $\mathscr{T}:\mathbf{C}_K\to\mathbf{A}(K)$, como sigue:

1. A cada pareja (V,β_V) es enviado al número natural $n=\dim_K V$.
2. Para cada morfismo $f:(V,\beta)\to(W,\gamma)$ es enviado a la matriz $[f]_\beta^\gamma\in\mathbb{M}_{m\times n}(K)$.

■

Definición 1.1.9 — Composición de funtores. Sean $\mathscr{F}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ y $\mathscr{G}:\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ dos funtores, definimos el funtor $\mathscr{G}\circ\mathscr{F}:\mathbf{A}\to\mathbf{C}$ con las siguientes reglas de asignación:

1. Para cada objeto $A\in\mathbf{A}$ lo enviamos a $\mathscr{G}(\mathscr{F}(A))\in\mathbf{C}$.
2. Para cada morfismo $f:A\to A'$ lo enviamos al morfismo $\mathscr{G}(\mathscr{F}(f)):\mathscr{G}(\mathscr{F}(A))\to\mathscr{G}(\mathscr{F}(A'))$.

■ **Ejemplo 1.15** Sea $f:R\to S$ un homomorfismo de anillos, entonces existe un funtor

$$\begin{array}{rcc}\mathscr{F}_f: S\text{-}\mathbf{Alg} & \to & R\text{-}\mathbf{Alg}\\ (S\to T) & \to & (R\to S\to T)\end{array}$$

Se puede ver que si $g:A\to R$ es otro homorfismo de anillos, entonces como funtores:

$$\mathscr{F}_{g\circ f}=\mathscr{F}_f\circ\mathscr{F}_g$$

De manera similar se puede construir funtores en la categoría de modulos S-**Mod** $\to$ R-**Mod**. Cabe destacar que se tiene el siguiente diagrama conmutativo de R-módulos.

$$\begin{tikzcd} S\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[r] & \mathbf{R}\text{-}\mathbf{Mod} \\ S\text{-}\mathbf{Alg} \arrow[u] \arrow[r, "\mathscr{F}_f"'] & R\text{-}\mathbf{Alg} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

■

Definición 1.1.10 — Funtores fiel y completos. Sea $\mathscr{F}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ un funtor y las funciones:

$$\mathbf{A}(A,A')\to\mathbf{B}(\mathscr{F}(A),\mathscr{F}(A')),\ f\to\mathscr{F}(f)$$

para cada par de objetos A,A' en $\mathbf{A}$. Decimos que el funtor $\mathscr{F}$ es:

1. *Fiel*, cuando las funciones mencionadas son inyectivas para todos los objetos A, A'.
2. *Pleno*, cuando las funciones mencionadas son sobreyectivas para todos los objetos A, A'. A este tipo de funtores también se les conoce como funtores completos.
3. *Isomorfismo* cuando es fiel y pleno, además la función entre la clase de objetos $\mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ es biyectiva.

Ejercicio 1.5 — **Propiedades sobre Morfismos Especiales y funtores.** Muestra que son válidas las siguientes afirmaciones:
1. Todos los funtores preservan isomorfismos.
2. Un funtor fiel y completo refleja isomorfismos.
3. Los funtores fieles reflejan monomorfismos y epimorfismos.

■

Definición 1.1.11 — Transformaciones naturales. Consideremos dos funtores $\mathscr{F}, \mathscr{G} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, una transformación natural $\alpha : \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{H}$ de $\mathscr{F}$ a $\mathscr{H}$ es una clase de morfismos $(\alpha_A : \mathscr{F}(A) \to \mathscr{H}(A))_{A \in \mathbf{A}}$ de $\mathbf{B}$ indexado por objetos de $\mathbf{A}$ tal que cada morfismo $f : A \to A'$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathbf{B}$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\mathscr{F}(f)"'] & \mathscr{H}(A) \arrow[d, "\mathscr{H}(f)"] \\
\mathscr{F}(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"'] & \mathscr{H}(A')
\end{tikzcd}$$

■ **Ejemplo 1.16 — Dualidad Lineal.** Consideremos la categoría K-**Vec**, para cada espacio vectorial V, denotamos el espacio dual lineal $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K)$. Definimos la función **bilineal estandar** como sigue:

$$b_V : V \times V^* \to K, \; b_V(v, f) := f(v)$$

Esta función induce una única función K-lineal $\alpha_V : V \to \mathrm{Hom}_K(V^*, K) = V^{**}$ dado como $\alpha_V(v) = b_V(v, -)$. Es fácil ver que la asignación $V \to V^{**}$ induce un funtor $\mathscr{F} : K\text{-}\mathbf{Vec} \to K\text{-}\mathbf{Vec}$. Entonces la familia α_V forma una transformación natural $\alpha : \mathrm{Id}_{K\text{-}\mathbf{Vec}} \Rightarrow \mathscr{F}$. ■

■ **Ejemplo 1.17 — Conjunto Potencia.** Existe un funtor contravariante $\mathscr{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ dado por las siguientes asignaciones:

1. A cada conjunto X lo enviamos al conjunto potencia $\mathscr{P}(X)$.
2. Si $f : X \to Y$ es una función, lo enviamos a la función imagen inversa $f^* : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$.

Sea $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, y tenemos el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, 2) : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$. Existe una transformación natural $\alpha : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, 2) \to \mathscr{P}$ dado como sigue, para cada conjunto X, $\alpha_X : \mathscr{P}(X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, 2)$ es la función definida $\alpha_X(A) = f^*(\{\{\emptyset\}\})$. ■

Ejercicio 1.6 Muestra lo siguiente:
1. $\alpha : \mathscr{P} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, 2)$ es una transformación natural.
2. Para cada conjunto X, α_X es una biyección.

■

Definición 1.1.12 — Composición vertical Natural. Sean $\mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ funtores y consideremos las transformaciones naturales $\alpha : \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{H}, \beta : \mathscr{H} \Rightarrow H$. Definimos la transformación natural composición vertical $\beta \circ \alpha : \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{H}$ como la familia $\{\beta_A \circ \alpha_A\}_{A \in \mathbf{A}}$.

Ejercicio 1.7 Muestra que la composición vertical natural de dos transformaciones naturales, es una transformación natural. ■

Definición 1.1.13 — Categorías pequeñas. Una categoría $\mathbf{C}$ es una categoría pequeña cuando su clase de objetos es un conjunto.

Proposición 1.1.1 — La categoría de las categorías pequeñas. Las categorías pequeñas y junto con los funtores como morfismos entre ellas constituyen una categoría denotado como $\mathbf{Cat}$.

Proposición 1.1.2 — La categoría de Funtores. Sea $\mathbf{A}$ una categoría pequeña y $\mathbf{B}$ una categoría. Existe una categoría denotada como $\mathbf{Fun}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ que consiste en:

1. **Objetos**: Como los funtores de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.
2. **Morfismos**: Como la transformaciones naturales $\alpha\colon \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G}$.
3. **Composición**: Como la composición vertical natural.

Además, cuando $\mathbf{B}$ es pequeña, entonces $\mathbf{Fun}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ es pequeña.

Definición 1.1.14 — Isomorfismo natural. Un isomorfismo natural es un isomorfismo $\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ en la categoría $\mathbf{Fun}(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

Proposición 1.1.3 Sea $\alpha\colon \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G}$ una transformación natural, entonces α es un isomorfismo natural si y sólo si para toda $A \in \mathbf{C}$ el morfismo α_A es un isomorfismo en $\mathbf{C}$.

Demostración. Si α es un isomorfismo natural, entonces existe una transformación natural $\beta : \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ tal que:

$$\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}},\ \alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{\mathscr{G}}. \tag{1.1}$$

Al tomar $A \in \mathbf{C}$ un objeto, aplicando la definición (1.1.12) tenemos:

$$\beta_A \circ \alpha_A = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}(A)},\ \alpha_A \circ \beta_A = \mathrm{Id}_{\mathscr{G}(A)} \tag{1.2}$$

obteniando que α_A es un isomorfismo por (1.2). Conversamente, supongamos que para toda $A \in \mathbf{C}$, se cumple (1.2), basta mostrar que la familia $\{\beta_A\}_{A\in\mathbf{C}}$ es una transformación natural, pues entonces obtendriamos (1.1). Sea $f\colon A \to A'$ un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f)\beta_A &= \mathrm{Id}_{\mathscr{F}(A')}\mathscr{F}(f)\beta_A \\
&= \beta_{A'}\alpha_{A'}\mathscr{F}(f)\beta_A, \text{ por (1.2)} \\
&= \beta_{A'}\mathscr{G}(f)\alpha_A\beta_A, \text{ por ser } \alpha \text{ una transformación natural} \\
&= \beta_{A'}\mathscr{G}(f), \text{ por (1.2)}
\end{aligned}$$

por lo tanto β es una transformación natural. ■

■ **Ejemplo 1.18** Considerando el ejemplo (1.17), gracias a la proposición (1.1.3) y el ejercicio (1.6) tenemos un isomorfismo natural entre los funtores $\mathscr{P} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-,2)$. ■

Definición 1.1.15 — Equivalencia de categorias. Sea $\mathscr{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un funtor, decimos que $\mathscr{F}$ es:

1. Un *isomorifsmo de categorías*, si existe $\mathbf{G} : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ funtor tal que $\mathscr{G}\mathscr{F}(X) = X$ y $\mathscr{F}\mathscr{G}(Y) = Y$ para todo $X \in \mathbf{C}_0$, $Y \in \mathbf{C}'_0$ y similarmente para los morfismos.
2. Una *equivalencia de categorías* si existen $\mathbf{G} : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ funtor e isomorfismos naturales $\alpha : \mathscr{G}\mathscr{F} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}, \beta : \mathscr{F}\mathscr{G} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{C}'}$.

Proposición 1.1.4 Sea $\mathbf{C}$ una categoría (pequeña). Existe una subcategoria completa $\mathbf{C}_0$ tal que el funtor inclusión es una equivalencia de categorías y $\mathbf{C}_0$ tiene la propiedad de que dos objetos isomorfos en $\mathbf{C}_0$ son iguales.

Una consecuencia de esto es

Proposición 1.1.5 Un funtor $\mathscr{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ es una equivalencia de categorías si y solo si $\mathscr{F}$ es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo.

Demostración. Si $\mathscr{F}$ es una equivalencia de categorías, es claro que $\mathscr{F}$ es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo. Luego si $\mathscr{F}$ es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo, entonces por (1.1.4) existe una subcategoria plena $\mathbf{C}_0$ de $\mathbf{C}$ tal que dos objetos isomorfos en $\mathbf{C}_0$ son iguales, y denotamos $\kappa\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}_0$ su cuasi-inverso. Similarmente construimos una subcategoría plena $\mathbf{C}'_0$ de $\mathbf{C}$ tal que dos objetos isomorfos son iguales y κ' el cuasi inverso de i'. Tenemos que $k' \circ \mathscr{F} \circ i\colon \mathbf{C}_0 \to \mathbf{C}'_0$ es un isomorfismo, denotamos $\mathscr{K}$ su inverso y por lo tanto el funtor $\mathscr{G} = i\colon \mathscr{K} \circ \kappa'$ es el cuasiinverso de $\mathscr{F}$. ■

Corolario 1.1.6 Sea $\mathscr{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un funtor fiel y pleno, entonces existe una subcategoría plena $i'\colon \mathbf{C}'_0 \to \mathbf{C}'$ y una equivalencia de categorias $\mathscr{F}_0\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'_0$ tal que $\mathscr{F} \cong i' \circ \mathscr{F}_0$

Demostración. Sea $\mathbf{C}'_0$ la subcategoria plena cuyos objetos son de la forma $\mathscr{F}(X)$ y aplica (1.1.5). ■

1.2. Funtores Adjuntos y límites.

Definición 1.2.1 — Objeto Universal. Sea $\mathscr{F}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor y $B \in \mathbf{B}$ definimos un objeto universal de B como la pareja $(U_B, j_B\colon B \to \mathscr{F}(U_B))$ tal que para toda pareja $(X, f\colon B \to \mathscr{F}(X))$ existe un único morfismo $h\colon U_B \to X$ en $\mathbf{A}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "j_B"] \arrow[dr, "f"'] & \mathscr{F}(U_B) \arrow[d, "\mathscr{F}(h)"] \\ & \mathscr{F}(X) \end{tikzcd}$$

Proposición 1.2.1 El objeto universal de B, en caso de existir, es único salvo isomorfismos.

Dualmente tenemos el concepto del objeto co-universal de B.

Teorema 1.2.2 — Caracterización de Funtores Adjuntos. Sea $\mathscr{F}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor, entonces son equivalentes:

1. Para cada objeto $B \in \mathbf{B}$ existe el objeto universal de B.
2. Existe un funtor $\mathscr{G}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ y una transformación natural $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{B}} \Rightarrow \mathscr{F}\mathscr{G}$ tal que $(\mathscr{G}(B), \eta_B)$ es un objeto universal del B.
3. Existe un funtor $\mathscr{G}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tal que para todo objeto $A \in \mathbf{A}$ y todo objeto $B \in \mathbf{B}$ existen biyecciones naturales en ambas variables:
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathscr{G}(B), A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(B, \mathscr{F}(A))$$
4. Existe un funtor $\mathscr{G}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tal que existen transformaciones naturales $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{B}} \to \mathscr{F}\mathscr{G}$ y $\varepsilon\colon \mathscr{G}\mathscr{F} \to \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$ que cumplen las siguientes propiedades:
$$(\mathrm{Id}_{\mathscr{F}} * \varepsilon) \circ (\eta * \mathrm{Id}_{\mathscr{F}}) = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}},\ (\varepsilon * \mathrm{Id}_{\mathscr{G}}) \circ (\mathrm{Id}_{\mathscr{F}} * \eta) = \mathrm{Id}_{\mathscr{G}}$$

5. Para cada objeto $A \in \mathbf{A}$ existe el objeto couniversal de A.

Definición 1.2.2 — Funtores adjuntos. Consideremos los funtores $\mathscr{F}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $\mathscr{G}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ decimos que la pareja $(\mathscr{F},\mathscr{G})$ es una pareja de funtores adjuntos si satisface alguna de las afirmaciones equivalentes del teorema (1.2.2). En esta situación, también decimos que:

1. $\mathscr{F}$ es el adjunto izquierdo de $\mathscr{G}$.
2. $\mathscr{G}$ es el adjunto derecho de $\mathscr{F}$.

Demostración. Del teorema (1.2.2). Para el caso $1 \Rightarrow 2$, por el axioma de elección, construimos la asignación $\mathbf{B}_0 \to \mathbf{A}_0$ donde a cada objeto B es enviado a $\mathscr{G}(B) \in \mathbf{A}_0$ con $(\mathscr{G}(B), \eta_B)$ el objeto universal de B, esta asignación es funtorial, pues si $f\colon B \to B'$ en $\mathbf{B}$ entonces por la definición (1.2.1), existe un único morfismo denotado $\mathscr{G}(f)\colon \mathscr{G}(B) \to \mathscr{G}(B')$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "f"'] & \mathscr{F}\mathscr{G}(B) \arrow[d, "\mathscr{F}\mathscr{G}(f)"] \\ B' \arrow[r, "\eta_{B'}"'] & \mathscr{F}\mathscr{G}(B') \end{tikzcd}$$

de esta manera se puede probar que $\mathscr{G}$ es un funtor, además la familia $\eta := \{\eta_B\}_{B\in\mathbf{B}}$ es una transformación universal. Para el caso $2 \Rightarrow 3$, tomemos $A \in \mathbf{A}$ y $B \in \mathbf{B}$, definimos

$$\phi_{A,B}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathscr{G}(B),A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(B,\mathscr{F}A)$$

como sigue $\phi_{A,B}(f\colon \mathscr{G}(B) \to A) = \mathscr{F}(f)\circ\eta_B$. Y también definimos

$$\psi_{A,B}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(B,\mathscr{F}(A)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathscr{G}(B),A)$$

como sigue $\psi_{A,B}(a\colon B \to \mathscr{F}(A)) = h$ donde, por hipótesis, $h\colon \mathscr{G}(B) \to A$ es el único morfismo (según la definición (1.2.1) en $\mathbf{A}$ tal que $a = \mathscr{F}(h)\circ\eta_B$. Con estas dos definiciones tenemos dos transformaciones naturales y además $\phi_{A,B}$ y $\psi_{A,B}$ son inversos. Para el caso $3 \Rightarrow 2$ definimos las familias

$$\eta := \{\eta_B\colon B \to \mathscr{F}\mathscr{G}(B)\}_{B\in\mathbf{B}},\ \eta_B = \phi_{\mathscr{G}(B),B}(\mathrm{Id}_{\mathscr{G}(B)})$$
$$\varepsilon := \{\varepsilon_A\colon \mathscr{G}\mathscr{F}(A) \to A\}_{A\in\mathbf{A}}.\ \varepsilon_A = \psi_{A,\mathscr{F}(A)}(\mathrm{Id}_{\mathscr{F}(A)})$$

Por la hipótesis de 2, se tiene la naturalidad de η y ε. Para el caso $4 \Rightarrow 5$ tenemos que para cada $A \in \mathbf{A}$ la pareja $(\mathscr{F}(A), \varepsilon_A)$ es el objeto co-universal. Para el caso $5 \Rightarrow 1$, se sigue probando que $5 \Rightarrow 3$ con un razonamiento similar a la prueba de $1 \Rightarrow 3$ y es fácil probar que $3 \Rightarrow 1$. ∎

Proposición 1.2.3 Si las siguientes parejas $(\mathscr{G},\mathscr{F})\colon \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ y $(\mathscr{K},\mathscr{H})\colon \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C}$ son parejas de funtores adjuntos entonces la pareja $(\mathscr{G}\mathscr{K},\mathscr{H}\mathscr{F})\colon \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{C}$ es una pareja de funtores adjuntos.

Ejercicio 1.8 Probar (1.2.3) usando (1.2.2). ▪

Proposición 1.2.4 Sea $(\mathscr{G},\mathscr{F})\colon \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ una pareja de funtores adjuntos con $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{B}} \Rightarrow \mathscr{F}\mathscr{G}$ y $\varepsilon\colon \mathscr{G}\mathscr{F} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$ sus correspondientes transformaciones naturales, entonces son equivalentes:

1. $\mathscr{F}$ es fiel y pleno.
2. ε es un isomorfismo.

Bajo estas condiciones $\eta * \mathrm{Id}_{\mathscr{F}}$ y $\mathrm{Id}_{\mathscr{G}} * \eta$ son isomorfismos naturales.

▪ **Ejemplo 1.19 — Módulo libremente generado..** Una de las aplicaciones más fuertes de las categorías es definir y caracterizar objetos usando propiedades universales, que por (1.2.2) equivalen a construir funtores adjuntos. Para lograr esa transición se requiere dar el enfoque correcto de la definición y sus categorías, empezaremos con el Módulo libremente generado.

Definición 1.2.3 — Módulo libremente generado. Sea X un conjunto, un módulo libremente generado por X es un R-módulo $M_{(X)} \in R$-**Mod** junto a una función $X \to M_{(X)}$ tal que para todo R-módulo N y función $X \to N$ existe una única función R-lineal $h\colon M_{(X)} \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & M_{(X)} \arrow[d, dashed, "h"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Es fácil ver que si definimos el funtor de olvido $\mathscr{U}: R$-**Mod** $\to$ **Set** entonces la noción de objetos universales coinciden con la noción de Módulos libremente generados. Con ello se puede tener las siguiente interpretacion

- El objeto universal es el objeto inicial a través del cual se factorizan todos los demás morfismos. El módulo libremente generado para X es el R-módulo inicial con respecto a todos los módulos y funciones que comienzan en X, lo que implica que este tipo de funciones necesariamente deben factorizarse a través de él.

Es bien sabido que para cada conjunto X existe el módulo libremente generado, por ejemplo $R^{(X)}$. Entonces esto permite construir un funtor $\mathscr{F}$: **Set** $\to$ **R-Mod** que es el adjunto izquierdo de $\mathscr{U}$. ¿Que obtenemos con esto? En particular para todo conjunto X y todo R-módulo N, hay una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, \mathscr{U}(N)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{R\text{-}Mod}}(\mathscr{F}(X), N)$$

En particular me dice que la cantidad de homomorfismos R-lineales que hay entre $\mathscr{F}(X) = R^{(X)}$ y N es la misma cantidad de funciones que hay entre X y N como conjuntos. Otro resultado directo que se puede obtener, si $X = \{*\}$ es un conjunto de 1 punto, entonces R es su objeto universal con respecto a $\mathscr{U}$, obteniendo los isomorfismos canónicos

$$M \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{*\}, \mathscr{U}(M)) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(R, M)$$

y dado que $\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(R, M)$ tiene estructura de R-módulo inducido por M, es fácil ver que esta biyección

$$M \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(R, M)$$

es un isomorfismo de R-módulos concluyendo un isomorfismo natural de funtores $\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathbf{Mod}} \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(R, -)$. De esta manera uno puede usar a los funtores adjuntos como una herramienta para obtener y relacionar información entre categorías. ∎

∎ **Ejemplo 1.20** En este ejemplo, daremos una nueva perspectiva al anillo de polinomios. Sea R un anillo conmutativo y sea $\mathscr{V}$: R-**Alg** $\to$ **Set** el funtor olvido correspondiente.

Ejercicio 1.9 Muestra que el objeto universal del conjunto $\{x\}$ con respecto a $\mathscr{V}$ es el anillo de polinomios $R[x]$ junto al morfismo estructural usual $R \to R[x]$. Concluye la siguiente biyección natural para toda S una R-álgebra

$$S \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[x], S)$$

¿Será este un isomorfismo de R-álgebras? Argumenta. ∎

Usando el ejercicio anterior, nuestro objetivo es construir el adjunto izquierdo para cualquier conjunto, que, lo esperable debe ser un anillo del tipo polinomial, segun el ejercicio anterior. La clave para realizarlo, desde un punto de vista categórico, es usar la siguiente propiedad que se tiene en conjuntos

Proposición 1.2.5 En **Set**, para toda X se tiene

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$$

como unión disjunta.

La pregunta clave es ¿Que propiedad categórica le corresponde la union disjunta? La respuesta se da en el siguiente ejercicio:

Ejercicio 1.10 Muestra que para cada X,Y conjuntos, existe una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,Y) \cong \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{x\},Y)$$

■

con esto en mente, el plan para la construcción se sigue de las siguientes biyecciones funtoriales

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,\mathscr{V}(S)) \cong \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{x\},\mathscr{V}(S)) \cong \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[x],S) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[X],S)$$

Donde $R[X]$ debe ser esa R-álgebra que permita el último isomorfismo. Para ello requeriremos la siguiente definición categórica importante. ■

Por ultimo definiremos un concepto importante definido como el límite de un funtor, que permite construir el resto de objetos con propiedades universales.

Definición 1.2.4 — Categoría de Conos. Sea $\mathscr{F}\colon \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ un funtor, definimos un cono de $\mathscr{F}$ como una pareja $(M,\{\alpha_i\}_{i\in I})$, donde $M \in \mathbf{C}$ y tenemos una familia de morfismos

$$\{\alpha_i\colon M \to \mathscr{F}(i)\}_{i\in I}$$

con la propiedad de que si $f\colon i \to j$ es un morfismo en $\mathbf{I}$ entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\ \mathscr{F}(i) \arrow[rr, "\mathscr{F}(f)"'] & & \mathscr{F}(j) \end{tikzcd}$$

Además un morfismo de conos $f\colon (M,\{\alpha_i\}_{i\in I}) \to (N,\{\beta_i\}_{i\in I})$ consiste en un morfismo $f\colon M \in N$ en $\mathbf{C}$ tal que para toda $i \in I$, se tiene $\alpha_i = \beta_i \circ f$. A la categoría de conos lo denotamos como $\mathbf{Cono}(\mathscr{F})$.

De manera dual se define la categoría de coconos de $\mathscr{F}$.

Definición 1.2.5 — Limite. Un límite de $\mathscr{F}$ es un objeto terminal en $\mathbf{Cono}(\mathscr{F})$. Un colímite de $\mathscr{F}$ es un objeto inicial en $\mathbf{Cocono}(\mathscr{F})$.

Proposición 1.2.6 — Límites y funtores adjuntos. Sea $(\mathscr{G},\mathscr{F})\colon \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ una pareja de funtores adjuntos entonces:

1. $\mathscr{F}$ preserva todos los límites existentes.
2. $\mathscr{G}$ preserva todos los colímites existentes.

1.2.1. Algunos límites importantes.

En esta sección vamos a presentar algunos límites y co-límites importantes y como se describen sus propiedades universales.

Productos y Coproductos. Consideremos I un conjunto, visto como categoría discreta (1.7) lo denotaremos como $\mathbf{I}$, para cada funtor $\mathscr{F}: \mathbf{I} \to \mathbf{C}$, denotamos $X_i := \mathscr{F}(i)$ para cada $i \in I$, y el funtor induce a una familia de objetos $\{X_i\}_{i\in I}$ cuyo límite es el producto categórico de la familia y colímite es el coproducto categórico de la familia.

Definición 1.2.6 — Producto y Coproducto. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathbf{C}$, definimos:

1. El producto de la familia como la pareja $(P, \{\pi_i \colon P \to X_i\}_{i\in I})$ que consiste en un objeto P y una familia de morfismos en $\mathbf{C}$ tal que para otra pareja $(E, \{f_i \colon E \to X_i\}_{i\in I})$ existe un único morfismo $h \colon P \to E$ tal que para toda $i \in I$ se cumple:
$$f_i = h \circ \pi_i$$
2. El coproducto de la familia como la pareja $(Q, \{u_i \colon X_i \to Q\}_{i\in \mathbf{I}})$ tal que para cada pareja $(F, \{g_i \colon X_i \to F\})_{i\in I}$ existe un único morfismo $h \colon F \to Q$ tal que para toda $i \in I$ se cumple:
$$g_i = u_i \circ h$$

Igualadores y co-igualadores. Consideremos $\mathbf{I}$ como la siguiente categoría:

1. Objetos de $\mathbf{I}$: $\{A, B\}$.
2. Morfismos de $\mathbf{I}$: $\{f \colon A \to B, g \colon A \to B, \mathrm{Id}_A, \mathrm{Id}_B\}$.

y sea $\mathscr{I}: \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ un funtor. Por abuso de notación, denotamos $X = \mathscr{F}(X)$, para cada objeto y morfismo X en $\mathbf{I}$. Definimos los igualadores y co-igualadores de $f, g \in \mathbf{C}$ como el límite y colímite de $\mathscr{F}$ respectivamente.

Definición 1.2.7 — Igualadores y Coigualadores. Dados dos morfismos $f, g \colon A \to B$ en $\mathbf{C}$, definimos:

1. El igualador de f, g como la pareja (E, i_E) en donde $E \in \mathbf{C}$ y $i_E \colon E \to A$ es un $\mathbf{C}$-morfismo tal que:
$$f \circ i_E = g \circ i_E$$
con la propiedad de que para toda pareja (M, μ) con $\mu \colon M \to A$ y con la propiedad de $f \circ \mu = g \circ \mu$, entonces existe un único morfismo $h \colon M \to E$ tal que:
$$\mu = i_E \circ h$$
2. El coigualador de f, g como la pareja (Q, q_Q) en donde $Q \in \mathbf{C}$ y $q_Q \colon B \to Q$ es un $\mathbf{C}$-morfismo tal que:
$$q_Q \circ f = q_Q \circ g$$
con la propiedad de que para toda pareja (N, ν) con $\nu \colon B \to N$ y $\nu \circ f = \nu \circ g$, entonces existe un único morfismo $h \colon Q \to N$ tal que:
$$\nu = h \circ q_Q$$

Producto fibrado y suma fibrada. Consideremos $\mathbf{I}$ como la siguiente categoría:

1. Objetos de $\mathbf{I}$:$\{A, B, C\}$.
2. Morfismos de $\mathbf{I}$: $\{\mathrm{Id}_A, \mathrm{Id}_B, \mathrm{Id}_C, f \colon A \to C, g \colon B \to C\}$.

Consideremos el funtor $\mathscr{F}: \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ y como el caso anterior, denotamos $X = \mathscr{F}(X)$ para cada objeto y morfismos en $\mathbf{I}$. Definimos el producto fibrado.

Definición 1.2.8 — Producto fibrado. El producto fibrado de $f\colon A \to C$ y $g\colon B \to C$ es la pareja $(P, \{\pi_f\colon P \to A, \pi_g\colon P \to B\})$ tal que:

$$f \circ \pi_f = g \circ \pi_g$$

y con la propiedad de que para toda pareja $(M, \mu\colon M \to A, \nu\colon M \to B)$ que satisface $f \circ \mu = g \circ \nu$, entonces existe un único morfismo $h\colon N \to P$ tal que:

Ejercicio 1.11 En este ejercicio muestra cada afirmación, relativo al producto y coproducto en ciertas categorías.

1. En **Set**, el producto categórico corresponde al producto cartesiano mientras que el coproducto categórico corresponde al conjunto union disjunta.
2. En R-**Mod**, el producto categórico corresponde al producto de R-módulos mientras que el coprodcuto categórico corresponde a la suma directa de R-módulos. Además cuando I es finito, ambos objetos son canónicamente isomorfos.
3. En R-**Alg** el coproducto de dos R-álgebras S, T le corresponde a la suma fibrada de S y T con respecto a R. Más adelante se verá que este concepto es el algebra tensorial $S \otimes_R T$. ¿El producto de S y T es el anillo $S \times T$?

■

Por ultimo, vamos a completar el estudio del ejemplo (1.20), de manera general.

Teorema 1.2.7 Sea $\mathbf{C}$ una categoría con coproductos y $\mathscr{U}: \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ un funtor fiel. Si el conjunto $\{*\}$ tiene objeto universal con respecto a $\mathscr{U}$, entonces:

1. $\mathscr{U}$ tiene adjunto izquierdo.
2. Para todo $X \in \mathbf{C}$. se tiene la biyección natural

$$\mathscr{U}(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(1, X)$$

donde 1 es el objeto universal de $\{*\}$ con respecto a $\mathscr{U}$.

1.3. Categoría de Representaciones de Grupos.

Definición 1.3.1 Sea $\mathbf{C}$ una categoría y G un grupo, definimos la categoría $\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$ de representaciones de G con valores en $\mathbf{C}$ cuyos objetos (X, ρ) son representaciones $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$ y los morfismos $f\colon (X, \rho) \to (Y, \nu)$ consisten en un $\mathbf{C}$-morfismo $f\colon X \to Y$ tal que para toda $g \in G$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_g"'] & Y \arrow[d, "\nu_g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}.$$

■ **Ejemplo 1.21** Si $\mathbf{C} = \mathbf{Set}$ entonces la categoría de representaciones $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Set}}(G)$ es equivalente a la categoría de G-conjuntos $G - \mathbf{Set}$. ■

■ **Ejemplo 1.22** G tiene una estructura de G-conjunto inducida por la multiplicación $G \times G \to G$, y ademas $l\colon G \to Biy(G)$ es un encaje. Ahora, si $H \leq G$ es un subgrupo, entonces para cada $g \in G$

existe una única función $\mu_g\colon G/H \to G/H$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "l_g"'] & G/H \arrow[d, "\mu_g"] \\ G \arrow[r, two heads] & G/H \end{tikzcd}$$

induciendo una representación $\mu\colon G \to Biy(G/H)$ tal que la proyección $G \to G/H$ es G-equivariante.
■

■ **Ejemplo 1.23 — Representación trivial.** Sea $M \in \mathbf{C}$ y G un grupo, la representación trivial M es el homomorfismo trivial $G \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(M)$. Esto nos permite construir un funtor $\mathscr{T}\nabla\rangle\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$.
■

■ **Ejemplo 1.24** Sean (M,μ) y (N,ν) dos objetos en $\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$, entonces en $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M,N)$ le inducimos una estructura de G-conjuntos, tal que para toda $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M,N)$ $g\cdot f$ satisface el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu_g"'] & N \arrow[d, "\nu_g"] \\ M \arrow[r, dashed, "g\cdot f"'] & N \end{tikzcd}$$

A esta representación lo denotamos $\xi_{\mu,\nu}\colon G \to Biy(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M,N))$. Cabe destacar que el conjunto de G-invariantes es $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G)}((M,\mu),(N,\nu))$, en particular la función inclusión $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G)}((M,\mu),(N,\nu)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M,N)$ es G-equivariante si a $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G)}((M,\mu),(N,\nu))$ le dotamos de la representación trivial. ■

Proposición 1.3.1 Consideremos $\mathscr{F}\colon \mathbf{I} \to \mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$ un funtor en donde denotamos $\mathscr{F}(i) = (X_i,\mu_i)$ para cada objeto $i \in \mathbf{I}$. Las siguientes afirmaciones son válidas.

1. Si $(\mathrm{lím}_{i\in\mathbf{I}} X_i, \{\rho_i\colon \mathrm{lím}_{i\in\mathbf{I}} X_i \to X_i\}_{i\in\mathbf{C}})$ es el límite de $\mathscr{U}\circ\mathscr{F}$ en $\mathbf{C}$, entonces existe una única representación $\mu\colon G \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(\mathrm{lím}_{i\in\mathbf{I}} X_i)$ tal que:
   a) $\forall i \in \mathbf{I}$ el morfismo ρ_i es G-equivariante y para cada $g \in G$ el morfismo μ_g es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama para toda $i \in \mathbf{I}$:

   $$\begin{tikzcd} \mathrm{lím}_{i\in\mathbf{I}} X_i \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d, dashed, "\mu_g"'] & X_i \arrow[d, "(\mu_i)_g"] \\ \mathrm{lím}_{i\in\mathbf{I}} X_i \arrow[r, "\rho_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

   b) $(\mathrm{lím}_{i\in\mathbf{I}} X_i, \mu)$ junto con los morfismos $\{\rho_i\}_{i\in\mathbf{I}}$ es el límite de $\mathscr{F}$
2. Si $(colim_{i\in\mathbf{I}}X_i, \{\upsilon_i\colon X_i \to colim_{i\in\mathbf{I}}X_i\}_{i\in\mathbf{C}})$ es el colímite de $\mathscr{U}\circ\mathscr{F}$ en $\mathbf{C}$, entonces existe una única representación $\nu\colon G \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(colim_{i\in\mathbf{I}}X_i)$ tal que:
   a) $\forall i \in \mathbf{I}$ el morfismo ν_i es G-equivariante y para cada $g \in G$ el morfismo ν_g es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama para toda $i \in \mathbf{I}$:

   $$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\upsilon_i"] \arrow[d, "(\mu_i)_g"'] & colim_{i\in\mathbf{I}}X_i \arrow[d, dashed, "\nu_g"] \\ X_i \arrow[r, "\upsilon_i"'] & colim_{i\in\mathbf{I}}X_i \end{tikzcd}$$

   b) $(colim_{i\in\mathbf{I}}X_i, \nu)$ junto con los morfismos $\{\upsilon_i\}_{i\in\mathbf{I}}$ es el colímite de $\mathscr{F}$.

Proposición 1.3.2 El funtor $\mathscr{U}\colon \mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G) \to \mathbf{C}$ satisface las siguientes propiedades:

1. Refleja isomorfismos.
2. Preserva límites y colímites.

Demostración. Para el primer punto, consideremos $f\colon (X,\mu)\to(Y,\nu)$ un morfismo G-equivariante tal que $f\colon X\to Y$ es un isomorfismo, basta ver que el inverso $f^{-1}\colon X\to Y$ es G-equivariante. Esto se sigue al notar que para cada $g\in G$ del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(X,\mu) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu_g"'] & (Y,\nu) \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\nu_g"'] & (X,\mu) \arrow[d, "\mu_g"] \\
(X,\mu) \arrow[r, "f"'] & (Y,\nu) \arrow[r, "f^{-1}"'] & (X,\mu)
\end{tikzcd}$$

En donde el cuadrado izquierdo conmuta, tenemos entonces:

$$\mu_g\circ f^{-1}\circ f=\mu_g=f^{-1}\circ f\circ\mu_g=f^{-1}\circ\nu_g\circ f\Rightarrow\mu_g\circ f^{-1}=f^{-1}\circ\nu_g$$

Completando la primera parte. Par la segunda parte, solo mostraremos el caso de límites, pues es análogo para colímites. Sea $\mathscr{H}\colon\mathbf{I}\to\mathbf{Rep_C}(G)$ un funtor con límite $((L,\nu),\{\rho_i\}_{i\in I})$ entonces al aplicar $\mathscr{U}$ obtenemos el cono $(L,\{\rho_i\}_{i\in I})$ de $\mathscr{U}\circ\mathscr{H}$, ahora tomemos $(X,\{\pi_i\})$ un límite de $\mathscr{U}\circ\mathscr{H}$ entonces por (1.3.1) existe una única representación $\mu\colon G\to\mathrm{Aut}_{\mathbf{C}}(X)$ tal que (X,μ) es el límite, entonces por unicidad de los límites, existe un único isomorfismo G-equivariante $h\colon(L,\nu)\to(X,\mu)$ tal que para toda $i\in\mathbf{I}$ se tiene que $\rho_i=\pi_i\circ h$, entonces al aplicar $\mathscr{U}$ se tiene que h es un isomorfismo tal que $\rho_i=\pi_i\circ h$ para toda $i\in\mathbf{I}$, por lo tanto L es un límite de $\mathscr{U}\circ\mathscr{H}$, completando la prueba. ■

Funtores entre representaciones Sean $\mathbf{C},\mathbf{D}$ categorías y si $\mathscr{F}\colon\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ es un funtor, entonces induce un funtor entre las categorías de representaciones $\mathbf{Rep}_G(\mathscr{F}):\mathbf{Rep_C}(G)\to\mathbf{Rep_D}(G)$ como sigue:

1. Para cada representación $(X,\mu)\in\mathbf{Rep_C}(G)$ lo enviamos a $(\mathscr{F}(X),\mu_{\mathscr{F}})\in\mathbf{Rep_D}(G)$ en donde $\mu_{\mathscr{F}}\colon G\to\mathrm{Aut}_{\mathbf{D}}\mathscr{F}(X)$ es un homomorfismo definido $\mu_{\mathscr{F}}(g):=\mathscr{F}(\mu_g)$ para toda $g\in G$.
2. Si $f\colon(X,\mu)\to(Y,\nu)$ es G-equivariante entonces lo enviamos a $\mathscr{F}(f)\colon(\mathscr{F}(X),\mu_F)\to(\mathscr{F}(Y),\nu_{\mathscr{F}})$.

Denotamos como $\mathscr{U}_{(\mathbf{C},G)}:\mathbf{Rep_C}(G)\to\mathbf{C}$ al funtor de olvido, donde a cada G-representación (X,μ) es enviado a $X\in\mathbf{C}$. En dado caso de que no haya confusión entre el grupo G y la categoría $\mathbf{C}$, denotamos $\mathscr{U}:=\mathscr{U}_{(\mathbf{C},G)}$.

Proposición 1.3.3 — Propiedades Generales. El funtor $\mathbf{Rep}_G(\mathscr{F})$ satisface el diagrama conmutativo de funtores:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rep_C}(G) \arrow[r, "\mathbf{Rep}_G(\mathscr{F})"] \arrow[d, "\mathscr{U}_{(\mathbf{C},G)}"'] & \mathbf{Rep_D}(G) \arrow[d, "\mathscr{U}_{(\mathbf{D},G)}"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, "\mathscr{F}"'] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

Además las siguientes afirmaciones son válidas:

1. Si $\mathscr{F}\colon\mathbf{C}\to\mathbf{D}$, $\mathscr{G}\colon\mathbf{D}\to\mathbf{E}$ son funtores entonces $\mathbf{Rep}_G(\mathscr{G}\mathscr{F})=\mathbf{Rep}_G(\mathscr{G})\circ\mathbf{Rep}_G(\mathscr{F})$.
2. $\mathbf{Rep}_G(\mathrm{Id})_{\mathbf{C}}=\mathbf{Id}_{\mathbf{Rep_C}(G)}$.
3. Si $\mathscr{F}$ es fiel entonces $\mathbf{Rep}_G(\mathscr{F})$ es fiel.

Más aún para cada transformación natural $\alpha\colon\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ se extiende a una transformacion natural $\alpha_G\colon\mathbf{Rep}_G(\mathscr{F})\to\mathbf{Rep}_G(\mathscr{G})$ tal que $\alpha_{(X,\mu)}=\alpha_X$ y satisface las siguientes propiedades:

1. Para toda $\alpha,\beta\in Nat(\mathscr{F},\mathscr{G})$ se tiene $(\beta\circ\alpha)_G=\beta_G\circ\alpha_G$.

2. $(1_{\mathscr{F}})_G = 1_{\mathbf{Rep}_G(\mathscr{F})}$.
3. Si $\mathscr{F}: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es una equivalencia de categorías entonces $\mathbf{Rep}_G(\mathscr{F})$ es una equivalencia de categorías.

Corolario 1.3.4 Si $(\mathscr{G}, \mathscr{F}) : \mathbf{C} \longleftrightarrow \mathbf{D}$ es una pareja de adjuntos entonces $(\mathbf{Rep}_G(G), \mathbf{Rep}_G(F))$ es una pareja de adjuntos.

Cambio de Grupo Consideremos $f: P \to T$ un morfismo de grupos entonces este induce un funtor $\mathscr{F}_f: \mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(T) \to \mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(P)$ como sigue:

1. A cada (X, μ) en $\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(T)$ le corresponde $(X, \mu f)$ en $\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(P)$.
2. Si $\phi: (X, \mu) \to (Y, \nu)$ es T-equivariante entonces f es P-equivariante con sus estructuras correspondientes.

El problema de las representaciones inducidas. Sea H un subgrupo de G y sea i el morfismo inclusión.

- ¿El funtor $\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G) \to \mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(H)$ tiene adjunto izquierdo?

Ejercicio 1.12 Describe la propiedad universal correspondiente al funtor $\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G) \to \mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(H)$. A la propiedad universal de este ejemplo se le conoce como la representación inducida. ■

1.4. Producto tensorial y grupo anillo.

Con el objetivo de resolver en el caso de representaciones lineales el problema de las representaciones inducidas. Vamos a construir objetos importantes para la teoría de representaciones lineales.

1.4.1. Grupo anillo.

Teorema 1.4.1 — Grupo Anillo. El funtor $(-)^{\times}: R\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{Grp}$ que envia a cada S una R-álgebra a su grupo de unidades $S^{\times}$ tiene adjunto izquierdo.

Ejercicio 1.13 Describe la propiedad universal del grupo anillo con coeficientes en R. ■

Para probarlo requerimos de algumas observaciones

Lema 1.4.2 Sea M un R-módulo y $m: M \times M \to M$ una función bilineal balanceada, es decir $b(rm, n) = rb(m, n) = b(m, rn)$ y existe una $u \in M$ tal que $m(u, x) = x = m(x, u)$ para toda $x \in M$. Entonces M es una R-álgebra.

Demostración. Sea $j: R \to M$ el único homomorfismo R-lineal definido como $j(r) = r * u$ (La unicidad se sigue del isomorfismo $M \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(R, M)$). Veamos que j es un homomorfismo de anillos, tomemos $r, r' \in R$ entonces

$$\begin{aligned} j(rr') &= (rr') * u = b((rr') * u, u) = b(r * (r' * u), u) \\ &= r * b(r' * u, u) = r * b(u, r' * u) \\ &= b(r * u, r'u) = b(j(r), j(r')) \end{aligned}$$

Entonces j es un homomorfismo de anillos y se cumple que $j(R) \subseteq Z(M)$, por tanto j es una R-álgebra, donde la estructura de R-módulo inducido por j coincide con la estructura de M. ■

Usando el isomorfismo funtorial $Bil(M,M:M) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(M, \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(M,M))$ tenemos que si $M = R^{(X)}$ entonces toda función bilineal balanceada $b : M \times M \to M$ está unicamente determinada por las imágenes $b(x,y)$.

Demostración del teorema 1.4.1. Sea $M = R^{(G)}$, en este anillo para cada $g \in G$ tenemos que $g \in M$ mediante la asignación $x \to \delta_{x,g}$, definimos la única función bilineal balanceada $\cdot\colon M \times M \to M$ tal que $g \cdot h = gh$. Tenemos que $u = e$ satisface para toda $f \in M$ que $f \cdot u = f = u \cdot f$, entonces por el lema M tiene una estructura de R-álgebra, el cuál, denotaremos como $R \to R[G]$. Es fácil ver que $G \subseteq R[G]^{\times}$. Ahora sea S una R-álgebra y tomemos un homomorfismo de grupos $f\colon G \to S^{\times}$, este se extiende a una única función R-lineal $h\colon R[G] \to S$, es fácil ver que h es homomorfismo de anillos, y por construcción

$$\begin{tikzcd} R[G] \arrow[rr, "h"] & & S \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Tomemos $g \in G$ entonces $h(g) = f(g) \in S^{\times}$ es decir

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & R[G]^{\times} \arrow[d, "h"] \\ & S^{\times} \end{tikzcd}$$

■

Definición 1.4.1 — Grupo anillo. Sea G un grupo y R un anillo, el grupo anillo de G con coeficientes en R, denotado como $R[G]$, es el objeto universal del funtor $(-)^{\times}\colon R\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{Grp}$.

■ **Ejemplo 1.25** $\mathbb{C}[C_3] \cong \mathbb{C}[x]/(x^3-1)$ ■

■ **Ejemplo 1.26** $\mathbb{R}[\mathbb{Z}] \cong R[x, x^{-1}]$. Esto se sigue del hecho de que $\mathbb{Z}$ es el grupo libremente generado (objeto universal de $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$) del conjunto $\{*\}$. ■

Ejercicio 1.14 ¿Quién es $R[\{e\}]$? ■

Corolario 1.4.3 Hay una equivalencia de categorias

$$\mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(G) \cong R[G]\text{-}\mathbf{Mod}$$

Demostración. Si tenemos un homomorfismo de grupos

$$\phi\colon G \to \mathrm{Aut}_R(M)$$

entonces existe un único homomorfismo de anillos $\Phi\colon R[G] \to \mathrm{End}_R(M)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\phi"'] & R[G]^{\times} \arrow[d, "\Phi^{\times}"] \\ & \mathrm{Aut}_R(M) \end{tikzcd}$$

Luego, sea $f\colon (M,\phi) \to (N,\psi)$ G-equivariante, entonces este es $R[G]$-lineal, pues si $a \in R[G]$ entonces $a = \sum_{g\in G} r_g g$ obteniendo

$$f(a\cdot m) = f(\sum_{g\in G} r_g(g\cdot m)) = \sum_{g\in G} r_g(g\cdot f(m)) = (\sum_{g\in G} r_g g)f(m) = a\cdot f(m)$$

construyendo los funtores

$$\begin{array}{rcc} \mathscr{F}\colon \mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(G) & \to & R[G]\text{-}\mathbf{Mod} \\ (\phi\colon G \to \mathrm{Aut}_R(M)) & \to & (\Phi\colon R[G] \to \mathrm{End}_R(M)) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcc} \mathscr{G}\colon R[G]\text{-}\mathbf{Mod} & \to & \mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(G) \\ (\Lambda\colon R[G] \to \mathrm{End}_R(M)) & \to & (\Lambda^{\times}|_G) \end{array}$$

■

Ejercicio 1.15 ¿Son equivalentes $\mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(G)$ y $\mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(R[G])$? ■

■ **Ejemplo 1.27** Consideremos V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, entonces $\mathrm{End}_{\mathbf{Ab}}(V)$ es una $\mathbb{C}$-algebra, usando la biyección natural $\mathrm{End}_{\mathbf{Ab}}(V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-}\mathbf{Alg}}(\mathbb{C}[x], \mathrm{End}_{\mathbf{Ab}}(V))$ a cada $T\colon V \to V$ le corresponde un único homomorfismo de R-álgebras $\theta\colon \mathbb{C}[x] \to \mathrm{End}_{\mathbf{Ab}}(V)$, entonces $\ker\theta$ es un ideal del DFU $\mathbb{C}[x]$. Entonces son equivalentes:

1. Existe una transformación $T\colon V \to V$ tal que $T^3 = \mathrm{Id}_V$.
2. Existe una representación de C_3 en V.

■

Proposición 1.4.4 Si $f\colon G \to T$ es un homomorfismo de grupos, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo de funtores

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(T) & \xrightarrow{\cong} & R[T]\text{-}\mathbf{Mod} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(G) & \xrightarrow[\cong]{} & R[G]\text{-}\mathbf{Mod} \end{array}$$

Demostración. Es consecuencia del siguiente diagrama conmutativo de funciones, donde la fila superior es de anillos y la fila inferior es de grupos

$$\begin{array}{ccc} R[G] & \xrightarrow{R[f]} & R[T] \\ \uparrow & & \uparrow \\ R[G]^{\times} & \xrightarrow{R[f]^{\times}} & R[T]^{\times} \\ {\scriptstyle\varepsilon_G}\uparrow & & {\scriptstyle\varepsilon_T}\uparrow \\ G & \xrightarrow[f]{} & T \end{array}$$

■

Ejercicio 1.16 Muestra que si G tiene un elemento de orden finito entonces $R[G]$ tiene divisores cero. Concluye que si G es un grupo finito entonces $K[G]$ no puede ser un dominio entero. ■

■ **Ejemplo 1.28** Ahora usemos la biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}\left(G, R^{\times}\right) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[G], R)$$

al morfismo neutro $e\colon G \to R^{\times}$ le corresponde un único homomorfismo $\varepsilon\colon R[G] \to R$ denominado **homomorfismo de argumentación**. Algunas propiedades son:

1. ε es un homomorfismo sobreyectivo.
2. $\ker\varepsilon$ está generado por elementos de la forma $1-g$, $g \in G$.

■

Ejercicio 1.17 Muestra que G es abeliano si y sólamente si $R[G]$ es conmuutativo. ■

Ejercicio 1.18 Muestra que si G tiene elemtnos de torsión entonces $R[G]$ tiene divisores cero. ■

1.4.2. Producto tensorial y algebra tensorial.

Para la siguiente construcción funtorial, vamos a usar la siguiente tecnica cuya generalización se obtiene el lema de Yoneda.

Definición 1.4.2 — Categoría de Elementos. Sea $\mathscr{F}: \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ un funtor, definimos la categoría de elementos de $\mathscr{F}$ como la categoría $\mathbf{C}_{\mathscr{F}}$ que consiste en

1. Objetos: Parejas (X,t), donde $X \in \mathbf{C}$ y $t \in \mathscr{F}(X)$.
2. Morfismos: Un morfismo $f\colon (X,t) \to (Y,s)$ es un morfismo $f\colon X \to Y$ en $\mathbf{C}$ tal que $\mathscr{F}(t) = s$.

Teorema 1.4.5 — Representabilidad. Sea $\mathscr{F}: \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ un funtor, y $(X,t_0) \in \mathbf{C}_{\mathscr{F}}$. Son equivalentes:

1. El objeto $(X,t_0) \in \mathbf{C}_{\mathscr{F}}$ es inicial.
2. Existe un isomorfismo natural de funtores $\mathscr{F}(-) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)$.

En esta situación decimos que $\mathscr{F}$ es **representable** por X.

Demostración. Supongamos que (X,t_0) es inicial, para cada $(Y,s) \in \mathbf{C}_{\mathscr{F}}$ entonces existe un único morfismo $f_{(Y,s)}\colon (X,t_0) \to (Y,s)$, definimos

$$\begin{array}{rcl} \psi_Y : \mathscr{F}(Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) \\ s & \to & f_{(Y,s)} \end{array}$$

Es claro que ψ_Y es una biyección. Luego si $f\colon Y \to Z$ es un morfismo en $\mathbf{C}$, entonces $f\colon (Y,s) \to (Z,\mathscr{F}(f)(s))$ es un morfismo en $\mathbf{C}_{\mathscr{F}}$, obteniendo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(Y) \arrow[r, "\psi_Y"] \arrow[d, "\mathscr{F}(f)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,f)"] \\ \mathscr{F}(Z) \arrow[r, "\psi_Z"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z) \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo. Para el converso supongamos que $\phi: \mathscr{F}(-) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,-)$, entonces es fácil ver que (X,t_0) donde $t_0 = \phi_X(\mathrm{Id}_X)$, es el objeto inicial. ■

Con esto en mente, fijemos $M,N \in R\text{-}\mathbf{Mod}$ con R conmutativo. Definimos el siguiente funtor

$$\begin{array}{rcl} B(M,N;-)\colon R\text{-}\mathbf{Mod} & \to & R\text{-}\mathbf{Mod} \\ Z & \to & B(M,N;Z) \end{array}$$

donde $B(M,N;Z) := \{f\colon M \times N \to Z |\ f \text{ es bilineal}\} \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(M \times N, Z)$.

Ejercicio 1.19 Prueba que la asignación $B(M,N;-)$ es funtorial. ■

Nuestro objetivo es mostrar que este funtor es representable, es decir satisface una propiedad universal dado por la categoría de elementos. En esta situación una pareja $(P,\tau) \in R\text{-}\mathbf{Mod}_{B(M,N;-}$ consiste en un R-módulo P y $\tau \in B(M,N;P)$ es una función bilineal $\tau\colon M \times N \to P$. De esta manera la propiedad de ser inicial se traduce a:

1. Un objeto (P,τ) es inicial si para toda función bilineal $f\colon M\times N\to Z$ existe una única función R-lineal $P\to Z$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "f"'] & P \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Teorema 1.4.6 El funtor $B(M,N;-)$ es representable. Al objeto representable se le denota $(M\otimes_R N,\tau)$.

Demostración. Sea $D=R^{M\times N}$ y sea L el submódulo generado por los elementos

$$\begin{gathered}(m+n,w)-(m,w)-(n,w)\\(m,w+z)-(m,w)-(m,z)\\(rm,n)-r(m,n)\\(m,n)-r(m,n)\end{gathered}$$

Definimos $P=D/L$, obteniendo la siguiente función

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[rr, bend left, "\tau"] & D \arrow[r, two heads, "p"'] & P \end{tikzcd}$$

que es bilineal. Luego si $g\colon M\times N\to Z$ es bilineal entonces

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "g"'] & D \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, dashed, "l"] & P \arrow[dl, dashed, "\exists h"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

obteniendo que (P,τ) satisface la propiedad universal de ser objeto inicial. ■

De esta manera, si $f_A\colon A\to B$ y $f_{A'}\colon A'\to B'$ tenemos

$$\begin{tikzcd} A\times A' \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "f_A\times f_{A'}"'] & A\otimes_R A' \arrow[d, dashed, "f_A\otimes f_{A'}"] \\ B\times B' \arrow[r, "\tau_B"'] & B\otimes_R B' \end{tikzcd}$$

permitiendo definir una función

$$B\colon \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(A,B)\times\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(A',B')\to\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(A\otimes_R A',B\otimes_R B)$$

Proposición 1.4.7 — Propiedades del producto tensorial. Las siguientes afirmaciones son válidas:

1. $(g_B\otimes g_{B'})\circ(f_A\otimes f_{A'})=(g_B\circ f_A)\otimes(g_{B'}\otimes f_{A'})$ y $\mathrm{Id}_A\otimes\mathrm{Id}_{A'}=\mathrm{Id}_{A\otimes_R A'}$. En particular $M\otimes_R -$ y $-\otimes_R N$ son funtoriales de R-**Mod** $\to$ R-**Mod**.
2. Existe un isomorfismo natural $R\cong R\otimes_R M$. Es decir los funtores $\mathrm{Id}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}\cong -\otimes_R M$ son isomorfos.
3. Existe un isomorfismo natural $M\otimes_R N\cong N\otimes_R M$.
4. Existe un isomorfismo natural $M\otimes_R(M'\otimes_R M'')\cong(M\otimes_R M')\otimes_R M''$.
5. La función $B\colon \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(A,B)\times\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(A',B')\to\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(A\otimes_R A',B\otimes_R B)$ es bilineal.

Por un lado tenemos un isomorfismo natural de R-módulos (cuando R es conmutativo)

$$B(M,N;Z) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(M, \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(N,Z))$$

implicando

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(M \otimes_R N, Z) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(M, \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(N,Z))$$

concluyendo

Proposición 1.4.8 La pareja de funtores $(- \otimes_R N, \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(N,-))\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ es una pareja de funtores adjuntos.

1.4.3. Funtor Restricción y extensión de escalares.

Ahora vamos a resolver el problema del funtor restricción, dado $f\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos, obtenemos

$$\mathscr{R}_f\colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$$

una asignación funtorial. Vamos a estudiar sus propiedades de adjunción. Para ello estudiaremos las construcciones que nos ofrece el producto tensorial en la categoría de R-**Alg** cuando R es conmutativo.

Estructura de anillo. Sean A, B dos R-algebras, y $m_A\colon A \times A \to A$, $m_B\colon B \times B \to B$ bilineales, entonces

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes_R B) \otimes_R (A \otimes_R B) \arrow[r, "m_{A\otimes B}"] \arrow[d, "\cong"'] & A \otimes B \arrow[d, "="] \\
(A \otimes_R A) \otimes_R (B \otimes_R B) \arrow[r, "m'_A \otimes m'_B"'] & A \otimes_R B
\end{tikzcd}$$

es una función lineal, induciendo una función bilineal $(A \otimes_R B) \times (A \otimes_R B) \to A \otimes_R B$, a esta estructura da a $A \otimes_R B$ una estructura de anillo. De hecho obtenemos que los siguientes homomorfismos, son homomorfismos de anillos y el siguiente diagrama de anillos conmuta.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "u_A"] \\
B \arrow[r, "u_B"'] & A \otimes_R B
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.4.9 La categoría R-**Alg** tiene coproductos finitos.

Ahora, sea $f\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos, entonces para cada $M \in A$-**Mod** tenemos que $B \otimes_A M$ tiene una estructura de R-módulo como sigue:

$$s \in B, \sum r \otimes m \in B \otimes_A M,\ s \cdot \left(\sum r \otimes m\right) := \sum (f(s)r) \otimes m$$

Construyendo una asignación

$$\mathscr{E}_f\colon A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$$

donde a cada función $\mu\colon M \to N$ A-lineal, lo enviamos a $\mathrm{Id}_B \otimes \mu\colon B \otimes_A M \to B \otimes_A N$.

Proposición 1.4.10 La asignación $\mathscr{E}_f$ es funtorial. Además la pareja $(\mathscr{E}_f, \mathscr{R}_f)\colon B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ es una pareja de funtores adjuntos.

Lema 1.4.11 Consideremos el diagrama conmutativo de funtores:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{C}' & \xrightarrow{\mathscr{U}'} & \mathbf{C} \\
{\scriptstyle \mathscr{T}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}} \\
\mathbf{D}' & \xrightarrow{\mathscr{U}} & \mathbf{D} \\
{\scriptstyle \mathscr{S}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{G}} \\
\mathbf{C}' & \xrightarrow{\mathscr{U}'} & \mathbf{C}
\end{array}$$

En donde $\mathscr{U}$ y $\mathscr{U}'$ son funtores fieles y plenos. Si $(\mathscr{G},\mathscr{F})$ es una pareja de adjuntos entonces $(\mathscr{S},\mathscr{T})$ es una pareja de adjuntos.

Demostración. Sea $D' \in \mathbf{D}'$, vamos a construir un $C' \in \mathbf{C}'$ y un morfismo $\varepsilon_{D'}: D' \to \mathscr{T}(C')$ que sea un morfismo universal. Proponemos $C' := \mathscr{S}(D')$, entonces se satisface por conmutatividad $\mathscr{U}'(C') = \mathscr{U}'\mathscr{S}(D') = \mathscr{G}\mathscr{U}(D')$ Por otro lado, tenemos por hipótesis que $\mathscr{U}(D')$ tiene morfismo universal, digamos $\delta_{\mathscr{U}(D')}: \mathscr{U}(D') \to \mathscr{F}(\mathscr{G}\mathscr{U}(D'))$ en $\mathbf{D}$, ahora, notemos que $\delta_{\mathscr{U}(D')}: \mathscr{U}(D') \to \mathscr{F}\mathscr{G}\mathscr{U}(D') = \mathscr{F}\mathscr{U}'\mathscr{S}(D') = \mathscr{U}\mathscr{T}(C')$, como $\mathscr{U}$ es un funtor fiel y pleno entonces existe un único morfismo $\varepsilon_{D'}: D' \to \mathscr{T}(C')$ tal que $\mathscr{U}(\varepsilon_{D'}) = \delta_{\mathscr{U}(D')}$. Resta ver que $\varepsilon_{D'}$ es morfismo universal, asi que tomemos $f: D' \to \mathscr{T}(X)$, aplicamos $\mathscr{U}$ obtenemos $\mathscr{U}(f): \mathscr{U}(D') \to \mathscr{U}\mathscr{T}(X) = \mathscr{F}\mathscr{U}'(X)$ y usando la pareja de adjuntos tenemos que existe un único morfismo $h: \mathscr{U}'(C') \to \mathscr{U}'(X)$ en $\mathbf{C}'$ tal que

$$\mathscr{U}(f) = \mathscr{F}(h) \circ \delta_{\mathscr{U}(D')} \tag{1.3}$$

Luego como $\mathscr{U}'$ es fiel y pleno entonces existe un único morfismo $s: C' \to X$ en $\mathbf{C}'$ tal que $\mathscr{U}'(s) = h$, sustituyendo en (1.3) obtenemos

$$\mathscr{U}(f) = \mathscr{F}\mathscr{U}'(s) \circ \mathscr{U}(\varepsilon_{D'}) = \mathscr{U}(\mathscr{T}(s) \circ \varepsilon_{D'})$$

y por último usando que $\mathscr{U}$ es fiel entonces $f = \mathscr{T}(s) \circ \varepsilon_{D'}$ por lo tanto $\varepsilon_{D'}$ es morfismo universal. ■

Teorema 1.4.12 — Representaciones lineales inducidas. Sea G un grupo y $H \leq G$ entonces el funtor

$$\mathscr{F}: \mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(G) \to \mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(H)$$

tiene adjunto izquierdo.

Demostración. Usando (1.4.4) y (1.4.10) tenemos el diagrama conmutativo de funtores

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(G) & \xrightarrow{\cong} & R[G]\text{-}\mathbf{Mod} \\
{\scriptstyle \mathscr{F}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{R}_i} \\
\mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(H) & \xrightarrow{\cong} & R[H]\text{-}\mathbf{Mod} \\
{\scriptstyle \mathscr{G}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{E}_i} \\
\mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(G) & \xrightarrow{\cong} & R[G]\text{-}\mathbf{Mod}
\end{array}$$

Usando (1.4.11) obtenemos el resultado. ■

Ejercicio 1.20 Muestra que si G es finito, entonces para cada representación $\mu\colon H \to \mathrm{Aut}_R(W)$, la representación inducida esta definido como sigue: Sea $n := [G:H]$ y $g_1, \cdots, g_n \in G$ un sistema de representantes de G/H, entonces

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} g_i W$$

entonces

$$\mu_g\left(\sum_{i=1}^{n} g_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} g_{i'} \mu_{h_i}(v_i)$$

donde $g * g_i = g_{i'} h_i$ con $h_i \in H$. ■

Definición 1.4.3 — Representaciones inducidas. Sea G un grupo y $H \leq G$, al funtor adjunto izquierdo $\mathscr{F}$ es denotado como Res_H^G y al adjunto izquierdo es denotado como Ind_H^G.

■ **Ejemplo 1.29** Si consideramos $H = \{*\}$, entonces tenemos la equivalencia de Categorías

$$\mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(H) \cong R\text{-}\mathbf{Mod}$$

y de la inclusión $i\colon H \to G$ tenemos que el funtor

$$\mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(G) \to R\text{-}\mathbf{Mod}$$

es el funtor olvido. Gracias a 1.4.12 tenemos que tiene un funtor adjunto izquierdo, donde a cada M un R-módulo, tenemos la representación inducida $\mu_M\colon G \to \mathrm{Aut}_R(M)$ definido como $\mu_M := \mathrm{Ind}_H^G(1)$. ■

■ **Ejemplo 1.30** Usando propiedades de R-módulos, tenemos $\mathrm{Res}_H^G(F(G)) = [G:H]F(H)$ y también para todo $(W,\tau) \in R[H]$-**Mod** entonces $\deg(\mathrm{Ind}_H^G(\tau)) = [G:H]\deg W$. ■

■ **Ejemplo 1.31** Tenemos que $\mathrm{Ind}_H^G(F(H)) = F(G)$. ■

Capítulo 2

Representaciones Lineales de Grupos.

A continuación mencionaremos algunos aspectos básicos de grupos, visto desde la teoría de representaciones.

1. Si G es un grupo y $H \leq G$ entonces G/H es un G-conjunto tal que $G \to G/H$ es G-equivariante.
2. Sea P otro grupo, entonces son equivalentes.
   a) Existe un homomorfismo de grupos $G \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{GRP}}(P)$.
   b) Existe un grupo S y una sucesión exacta
   $$1 \to P \to S \to G \to 1$$
   que se escinde en $S \to G$.
3. Para cada grupo G, tenemos el homomorfismo de grupos $Inn\colon G \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{GRP}}(G)$ definido como $Inn(g)\colon G \to G$ que envia $x \to gxg^{-1}$. El kernel del morfismo es $Z(G)$. A las clases de equivalencia se le denomina como clases conjugadas, denotadas como $Cl(a)$, por el teorema órbita-estabilizador, tenemos el isomorfismo $G/C_G(a) \cong Cl(a)$ de G-conjuntos.

A continuación presentaremos ejemplos de representaciones lineales que se usarán para este capítulo.

■ **Ejemplo 2.1** Sea G un grupo y F un campo, entonces $F(G)$ como F-espacio vectorial tiene a G como base, y la multiplicación
$$G \times F(G) \to F(G)$$
es una acción lineal, es decir $G \to \mathrm{Aut}_F(F(G))$ es un homomorfismo de grupos. A esta representación se le conoce como **representación regular de** G. ■

■ **Ejemplo 2.2** Sea P un conjunto y sea $\mu\colon G \to Biy(P)$ una G-acción dentro de la categoría $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Set}}(G)$. Construimos $M = R^{(P)}$ el R-módulo libremente generado con base P, usando la propiedad universal de la base, para cada $g \in G$
$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\mu_g"'] & M \arrow[d, dashed, "\hat{\mu}_g"] \\ P \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$
induce una representación lineal $\hat{\mu}\colon G \to \mathrm{Aut}_R(M)$ tal que, si $\mathscr{U}: R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$ es el funtor olvido y $\mathscr{V}$ su adjunto izquierdo, se cumple que $\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow \mathscr{U} \circ \mathscr{V}$ es G-equivariante. Un ejemplo interesante es tomar H un subgrupo, entonces $P := G/H$ tiene una estructura de G-conjunto tal que $G \to G/H$ es G-equivariante. ■

En la categoría de representaciones lineales, propiedades del grupo y del anillo influyen al momento de construir representaciones. Por ejemplo si $R = \mathbb{Z}$ y G es de orden 3, es decir el grupo cíclico de orden 3, entonces no existe una representación lineal no trivial $\mu : G \to \mathrm{Aut}_R(R)$, puesto que $\mathrm{Aut}_R(R) = R^\times = (\mathbb{Z})^\times$ es un grupo de orden 2, implicaria que $\ker \mu$ o es 0 o G, como μ no es trivial entonces $\ker \mu$ es distinto de cero y por tanto G se encaja en $\mathrm{Aut}_R(R)$, es decir hay un subgrupo de orden 3 en un grupo de orden 2 y esto es una contradicción ya que por Teorema de Lagrange, 3 no divide a 2. También las restricciones aplican para campos. Por simplicidad, usaremos representaciones F-lineales sobre grupos finitos, donde F es un campo.

Definición 2.0.1 — Campos buenos. Sea G un grupo finito. Un campo F es bueno para G si las siguientes condiciones se satisfacen:

1. La caracteristica de F es cero o primo relativo al orden de G.
2. Si u denota el exponente de G, entonces la ecuación $x^u - 1 = 0$ tiene u-distintas raices en F.

Cabe notar que para todo campo F se tiene que $\mathrm{Aut}_F(F) = F^\times$.

■ **Ejemplo 2.3** Sea $G = \langle g \rangle$ el grupo cíclico de orden n y F un campo que es bueno para G, entonces la ecuación $x^n - 1 = 0$ tiene n distintas raices, denotados como $\xi_1 = 1, \cdots, \xi_n$. Sea $\mu : G \to F^\times$ un homomorfismo de grupos, para cada $h \in G$ existe $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ tal que $h = g^n$, entonces

$$\mu(h) = \mu(g^k) = \mu(g)^k$$

puesto que $g^n = e$ y $\mu(e) = 1$ entonces $\mu(g)$ es una raiz de la unidad, entonces existe una ξ_i tal que $\mu(g) := \xi_i$, por lo tanto existen n representaciones de G 1-dimensional. ■

■ **Ejemplo 2.4** Sea $G = \langle x, y | x^m = 1, y^2 = 1, xy = yx^{-1} \rangle$ el grupo diédrico de orden $2m$ con m impar, F un campo bueno para G y tomemos ξ una raiz que genere el grupo de raices de $x^m = 1$. Para cada $k = 1, \cdots, (m-1)/2$ definimos $\varphi_k : G \to \mathrm{Aut}_F(F^2)$ como sigue

$$\phi_k(x) = \begin{pmatrix} \xi^k & 0 \\ 0 & \xi^{-k} \end{pmatrix}, \ \phi_k(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Ejercicio 2.1 Muestra que el homomorfismo de argumentación $F[G] \to F$ definido en el ejemplo (1.28) es G-equivariante si $F[G]$ tiene la representación regular y F la representación trivial. ■

■ **Ejemplo 2.5 — Representaciones conjugadas.** Sea $\mu : G \to \mathrm{Aut}_F(M)$ una representación F-lineal de G y γ: $\mathrm{Aut}_F(F[G])$, definimos $\mu^{(\gamma)} : G \to \mathrm{Aut}_F(M)$ como sigue, dado $r \in F[G]$ y $m \in M$ entonces $r \cdot_{\mu^\gamma} m = \gamma(r) \cdot_\mu m$. Cuando γ viene de un automorfismo de campos de F, decimos que las representaciones μ y μ^γ son **conjugados**. ■

2.1. Subrepresentaciones irreducibles y descomposición.

Proposición 2.1.1 Sea G un grupo y $\mu : G \to \mathrm{Aut}_R(M)$ una representación lineal son equivalentes para $N \subseteq M$

1. N es un $R[G]$-submódulo de M. Es decir una **subrepresentación** de M.
2. N satisface:
   a) $N \leq M$ como R-módulos.
   b) $\forall g \in G$, $gN \subseteq N$.

Dado que $\mathbf{Rep}_{R\text{-}\mathbf{Mod}}(G) \cong R[G]$**-Mod**, podemos inducir conceptos de la teoría de módulos a las representaciones.

Definición 2.1.1 — Representaciones irreducibles. Sea G un grupo y (M, σ) una representación R-lineal, decimos que:

1. M es una representación irreducible si como $R[G]$-módulo es irreducible.
2. M es una representación indecomponible si como $R[G]$-módulo es indecomponible.
3. M es una representación semisimple si como $R[G]$-módulo es semisimple.

Nuestro objetivo es encontrar representaciones irreducibles, en el caso de F un campo y G un grupo finito y ver que representaciones se pueden expresar como usma de representaciones irreducibles. Veamos el siguiente ejemplo.

Proposición 2.1.2 Sea F un campo bueno para $G = \langle g \rangle$ el grupo cíclico de orden n. Entonces la representación regular $F[G]$ es isomorfo a la suma

$$\mu_0 \oplus \mu_1 \oplus \cdots \oplus \mu_{n-1}$$

Para el siguiente ejemplo, necesitamos el siguiente lema técnico.

Definición 2.1.2 Sean M, N dos representacións F-lineales de G. La multiplicidad de M en N es el mayor entero m tal que mM es isomorfo a un submódulo de N. Si mM es isomorfo a un submódulo de N para todo $m > 0$ decimos que la multiplicidad es infinita. Más aún, decimos que N contiene m copias de M cuando $m \neq 0$, y cuando $m = 0$ decimos que N no contiene a M.

Lema 2.1.3 Sea G un grupo, $\sigma_0, \sigma \colon G \to \mathrm{Aut}_F(F[G])$ homomorfismos de grupos donde σ_0 es trivial y σ es la representación regular, entonces si G es finito, tenemos que σ contiene a σ_0. En caso contrario G es infinito.

Corolario 2.1.4 Si G es un grupo infinito entonces la representación regular no es semisimple.

■ **Ejemplo 2.6 — Promedio sobre el grupo.** Sea G un grupo finito, tomemos $(V_1, \sigma_1), (V_2, \sigma_2)$ dos representaciones R-lineales sobre G. Dado $f \in \mathrm{Hom}_R(V_1, V_2)$ entonces definimos el **promedio sobre** G como

$$Av(f) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\sigma_2)_{g^{-1}} \circ f \circ (\sigma_1)_g$$

Proposición 2.1.5 La función $Av \colon \mathrm{Hom}_R(V_1, V_2) \to \mathrm{Hom}_{R[G]}(V_1, V_2)$ es un homomorfismo R-lineal G-equivariante (Como en el ejemplo (1.24) tal que $Av \circ i = \mathrm{Id}$.

Esta construcción se puede realizar para G grupo finito y $i \colon M^G \to M$ donde $M^G := \{m \in M |\ g \cdot m = m,\ \forall g \in G\}$, donde a M^G le denotamos la Representación R-lineal. ■

Para continuar con nuestro estudio sobre las representaciones semisimples, requerimos el siguiente resultado de la teoría de módulos.

Teorema 2.1.6 — Caracterización de módulos semisimples. Sea M un R-módulo, entonces son equivalentes:

1. M es un R-módulo semisimple.
2. Para cada submódulo N de M existe N' tal que $M = N \oplus N'$.
3. Cada submódulo de M es una suma de R-módulos simples.

Corolario 2.1.7 Los módulos semisimples son cerrados bajo sumas directas (extensiones escindibles), submódulos y modulos cocientes.

Corolario 2.1.8 Sea M un R-módulo semisimple y $N \leq M$. Entonces N es irreducible (i.e. simple) si y sólo si N es indecomponible.

Teorema 2.1.9 — Caracterización de R-Mod cuando R es semisimple. Sea R un anillo. Son equivalentes:

1. R es un anillo semisimple.
2. Cada R-módulo es semisimple.
3. Cada R-módulo es proyectivo.

En particular cuando R es un anillo semisimple la subcategoría de R-**Mod** que consiste en R-módulos finitamente generados es una categoría semisimple.

Una vez conocido algunas de las propiedades de los anillos semisimples. Probaremos el teorema de Maschke.

Teorema 2.1.10 — Teorema de Maschke. Sea G un grupo finito y F un campo. Son equivalentes:

1. $F[G]$ es un anillo semisimple.
2. La característica $\xi(F)$ de F es cero o primo relativo al orden de G.

La estrategia de la prueba se basa en los resultados de los teoremas (2.1.9) y (2.1.6), entonces, basta probar que para cada $F[G]$-módulo, todo $F[G]$-submódulo es complementado.

■ **Ejemplo 2.7 — Ilustración de las implicaciones del Teorema de Maschke.** En este ejemplo ilustraremos las implicaciones que dice el Teorema de Maschke, para el caso de G un grupo cíclico, estableciendo una prueba alterna cuando K es un campo de caracteristica cero.

1. Para cada $\xi : G \to K^\times$ hojmomorfismos, definimos el elemento $e_\xi := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\chi(g)}g \in K[G]$. Este elemento satisface las siguientes propiedades:
   a) Para toda $h \in K[G]$ entonces $he_\xi = e_\xi h = \hat{\xi}(h)e_\xi$ donde $\hat{\xi} : K[G] \to K$ es el inducido por la propiedad universa de $K[G]$.
   b) $e_\xi^2 = e_\xi$.
   c) Si $\tau \neq \xi$ entonces $e_\xi e_\tau = 0 = e_\tau e_\xi$

   a estas propiedades se les conoce como ortogonalidad, y se describiran con más detalle en la teoría de **caractéres**.
2. Si $V \in K[G]$-**Mod**, definimos $V^\xi := \{v \in V \mid h\cdot v = \xi(h)v,\ \forall h \in G\}$, este submódulo satisface $V^\xi = e_\xi V$.

Ahora cuando G es un grupo cíclico de orden n, en el ejemplo (2.3) tenemos n homomorfismos distintos $\xi_0, \cdots, \xi_{n-1}$. En esta situación tenemos que $\sum_{i=0}^{n-1} e_{\xi_i} = 1$ en $K[G]$. Usando el punto (2), la última igualdad mostrada implica que

Proposición 2.1.11 Toda representación V de C_n, se descompone como

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n-1} V^{\xi_i}$$

Algunos ejemplos usando $G = S_2$ serian:

1. $Fun(\mathbb{R},\mathbb{R})$ se descompone en suma de una función par e impar.
2. $M_{n\times n}(K)$ se expresa de manera única como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.
3. $V \otimes V$ se expresa de manera unica como la suma de un tensor simétrico y un tensor antisimétrico.
4. Si V es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V,V)$ se expresa de manera única como la suma de una función $\mathbb{C}$-lineal y $\mathbb{C}$-sequislineal.

■

■ **Ejemplo 2.8** Sea $T\colon F^2 \to F^2$ definido por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en la base estandar, este induce una representación de $(\mathbb{Z}, +)$ de grado 2. Cuando la caracteristica de F es p entonces $T^p = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^2}$, induciendo una representación de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de grado 2. Observemos que cuando $F = F_p$ entonces esta representación es indecomponible pero no es irreducible, por tanto no es semisimple. ■

Lema 2.1.12 Sea G un grupo finito y F un campo bueno. Dado $\sigma\colon G \to \mathrm{Aut}_F(M)$ una representación de grado finito. Entonces para cada $g \in G$ la transformación lineal $\sigma(g)$ es diagonalizable.

2.2. Representaciones Regulares.

2.3. Representaciones sobre $\mathbb{C}$.

Capítulo 3

Teoría de Caracteres.

3.1. Propiedades básicas.

3.2. Tabla de caracteres.

3.3. Indepotentes y sus usos.

3.4. Subcampos de $\mathbb{C}$.

Bibliografía

[1] Steve Awodey. *Category theory*. Vol. 52. OUP Oxford, 2010.

[2] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra: volume 1, Basic category theory*. Vol. 1. Cambridge University Press, 1994.

[3] Emily Riehl. *Category theory in context*. Courier Dover Publications, 2017.