Notas sobre Categorías

Luis Manuel Reyes de la Luz

January 2024

Índice general

1. Fundamentos. **5**
- 1.1. Fundamentos Lógicos . . . 5
- 1.2. Categorías: Objetos y Morfismos. . . . 6
- 1.3. Funtores y Trasformaciones Naturales. . . . 10
- 1.4. Equivalencia de Categorías. . . . 17
- 1.5. Lema de Yoneda y Representabilidad. . . . 18
- 1.6. Propiedades Universales y Funtores Adjuntos. . . . 20

2. Construcciones categóricas. **23**
- 2.1. Producto de Categorías. . . . 23
- 2.2. Categoría Coma. . . . 23
- 2.3. Límites . . . 24
- 2.4. Cálculo de límites en algunas categorías. . . . 27
  - 2.4.1. Algunos límites importantes. . . . 27
  - 2.4.2. Sobre la categoría coma . . . 28
  - 2.4.3. Sobre la categoría de Funtores . . . 28
- 2.5. Existencia de Límites. . . . 29
- 2.6. Conmutatividad de límites. . . . 30
- 2.7. Subobjetos e Imágenes. Sistemas de Factorización. . . . 30
- 2.8. Subcategorías Reflectivas. . . . 30
- 2.9. Localización de Categorías . . . 30

3. Categorías con estructura **31**
- 3.1. Categorías con Cero y categorias semiaditivas. . . . 31
- 3.2. Categorías Regulares y Exactas. . . . 31
- 3.3. Categorías Aditivas y Abelianas. . . . 31

4. Categorías monoidales. **33**

Capítulo 1

Fundamentos.

1.1. Fundamentos Lógicos

En las matemáticas existen varias familias de conjuntos con ciertas propiedades y de funciones que las preservan, por ejemplo los grupos y los Homomorfismos, los conjuntos y las funciones, los espacios topológicos y las funciones continuas, las variedades diferenciables y las funciones suaves. Cada uno de estos ejemplos es una categoría. En este capítulo empezamos dando la definición de lo que es una categoría y algunas construcciones importantes.

Clases y Universo Desde el descubrimiento de la paradoja de Russell, que muestra que aceptar como conjunto al conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a si mismo como miembros, se llega a una contradicción lógica, se abrió un debate que condujo a la formulación de la Teoría de conjuntos bajo los axiomas de Zermelo-Fraenkel. En nuestra situación, para la teoría de categorías, vamos a exponer los fundamentos para poder hablar de una manera formal situaciones como la colección de todos los grupos o la colección de todos los conjuntos.

Definición 1.1.1 — Universo. Un universo es un conjunto U con las siguientes propiedades:

1. $x \in y,\ y \in U \rightarrow\ x \in U$.
2. $I \in U$ y $\forall i \in I, x_i \in U \rightarrow \bigcup_{i \in I} x_i \in U$.
3. $x \in U \rightarrow \mathscr{P}(x) \in U$.
4. $x \in U$ y $f : x \rightarrow y$ función sobreyectiva $\rightarrow y \in U$.

Donde $\mathscr{P}(x)$ denota el conjunto potencia de x.

Una consecuencia directa de la definición es lo siguiente:

R Las siguientes afirmaciones son válidas para un universo U:

1. $x \in U$ y $y \subset x$ entonces $y \in U$.
2. $x, y \in U$ entonces $\{x, y\} \in U$.
3. $x, y \in U$ entonces $x \times y \in U$.
4. $x, y \in U$ entonces $x^y \in U$.

Donde $x^y := \{f \subset y \times x |\ f \text{ es función}\}$. Con esto, necesitaremos el axioma de la existencia de un universo.

Definición 1.1.2 — Existencia de un universo. Cada conjunto está dentro de algún universo.

Como convención tenemos.

Definición 1.1.3 — Universo de conjuntos pequeños. Fijaremos un universo U y denominaremos conjuntos pequeños a los elementos de U.

De esta manera, usando el axioma (1.1.2) tenemos la siguiente observación.

R Existe un conjunto S con la propiedad de que $x \in S$ si y sólo si x es un conjunto pequeño.

Por último, vamos a usar la teoría de Gödel-Bernays, introduciremos la noción de clase. Para ello introduciremos los siguientes dos axiomas.

Definición 1.1.4 — Axioma de Clase. Una clase es un conjunto si y sólo si está contenido en alguna otra clase

Definición 1.1.5 — Axioma de Esquema de Comprensión. Si $\phi(x_1,\cdots,x_n)$ es una fórmula bien formada donde la cuantificación ocurre en un conjunto de variables, entonces existe una clase A tal que $(x_1,\cdots,x_n) \in A$ si y sólo si ocurre $\phi(x_1,\cdots,x_n)$

Gracias al axioma (1.1.5) tenemos una manera formal para la creación de una clase a partir de una fórmula bien formada, donde se cuantifica en un conjunto de variables. Por ejemplo, podemos crear una clase **Grp** tal que $(G,+) \in \mathbf{Grp}$ si y sólo si $(G,+)$ es un grupo, suponiendo que el conjunto de variables está en un universo U. Dicho de otra manera, si se supone la existencia de universos, entonces los axiomas (1.1.2) y (1.1.5) de la teoría de Gödel, establece que puede usar los elementos del universo U de la convención dada, para crear clases y son precisamente los subconjuntos de U, aquellos que serán considerado como clases, entonces tenemos un modelo de la teoría de Gödel para formar las colecciones de conjuntos grandes. Como convención adicional a los subconjuntos de U, se les denominará clases y a los conjuntos pequeños, se les denominará conjuntos. Con estas ideas desarrolladas estableceremos la teoría de categorías en la siguiente sección.

1.2. Categorías: Objetos y Morfismos.

Definición 1.2.1 — Categorías. Una categoría $\mathbf{A}$ consiste en lo siguiente:

1. Una Clase $\mathbf{A}_0$. A los elementos de $\mathbf{A}_0$ les llamaremos objetos de la categoría.
2. Para cada par de objetos A,B, un conjunto $\mathbf{A}(A,B)$. A los elementos de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,B)$ les llamaremos morfismos o $\mathbf{A}$-morfismos de A a B
3. Una Clase $\mathbf{A}_1$ que contiene a todos los conjuntos de forma $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,B)$, con $A,B \in \mathbf{A}_0$
4. Para todo A,B,C objetos, existe una función llamada ley de composición, definida en el conjunto de morfismos

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,C)$$

donde para cada pareja (f,g) la composición lo denotamos como $g \circ f$ ó simplemente gf. Esta composición satisface lo siguiente:

a) (Axioma de Identidad): Para cada objeto A, existe un morfismo $\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,A)$ llamado identidad tal que , para cada morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,B)$ y cada morfismo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(C,A)$ se satisface

$$f\,\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} = f,\ \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}\,g = g$$

b) (Axioma de Asociatividad): Para todo morfismos $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A,B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(B,C), h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(C,D)$ la siguiente igualdad se cumple:

$$h(gf) = (hg)f$$

■ **Ejemplo 1.1 — Categoría de Conjuntos.** La categoría de Conjuntos, denotado como **Set**, donde los objetos son conjuntos y los morfismos son funciones. ■

■ **Ejemplo 1.2 — Categoría de espacios topológicos.** La categoría de Espacios Topológicos, denotado como **Top**, donde los objetos son espacios topológicos y los morfismos son funciones continuas. ■

■ **Ejemplo 1.3 — Categoría de Grupos.** La categoría de Grupos, denotado como **Grp**, donde los objetos son grupos y los morfismos son morfismos de grupos. ■

■ **Ejemplo 1.4 — Categoría de espacios vectoriales.** La categoría de Espacios Vectoriales bajo un campo k, denotado como **K-Vec**, donde los objetos son k-espacios y los morfismos son funciones k-lineales. ■

■ **Ejemplo 1.5 — Categoría de Matrices.** Sea $\mathbf{A}_0 = \mathbb{N}$, R un anillo y los morfismos de n a m son las matrices con entradas en R, con n filas y m columnas, es decir $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(n,m) = \mathbb{M}_{n\times m}(R)$, en este caso la composición se define como el producto de matrices, es decir $\mathbb{M}_{n\times m}(R)\times\mathbb{M}_{m\times q}(R)\to\mathbb{M}_{n\times q}(R)$; $(A,B)\to AB$ y la identidad es la matriz identidad $I_n\in\mathbb{M}_{n\times n}(R) = \mathbf{A}(n,n)$. ■

Definición 1.2.2 — Morfismos especiales. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y $f : A\to B$ un morfismo, decimos que f es:

1. *Monomorfismo*, si satisface la siguiente propiedad; para cada par de morfismos $g,h : C\to A$ tal que $f\circ g = f\circ h$ implica $g = h$.
2. *Epimorfismo*, si satisface la siguiente propiedad; para cada par de morfismos $g,h : B\to C$ tal que $g\circ f = h\circ f$ implica $g = h$.
3. *Bimorfismo*, si es monomorfismo y epimorfismo.
4. Sección, si existe $g : B\to A$ tal que $g\circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$, en este caso g se llama retracción.
5. *Isomorfismo*, si existe $g : B\to A$ tal que $g\circ f = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$, $f\circ g = \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$.

Además, un morfismo $f : A\to A$ se denomina endomorfismo, y cuando $f : A\to A$ es un isomorfismo se denomina automorfismo.

■ **Ejemplo 1.6** Tomemos un grupo G , se puede ver como una categoría en la cual solo hay un objeto $\mathbf{A}_0 = \{*\}$ y el conjunto de morfismos para $\{*\}$ es $\mathscr{G}(*,*) = G$ con la ley de composición es la multiplicación del grupo, la identidad es el elemento identidad del grupo. Según la definición (1.2.2), tenemos que en esta categoría todo morfismo es un isomorfismo, motivando la siguiente definición. ■

Definición 1.2.3 — Grupoide. Una categoría $\mathbf{C}$ se llama grupoide si todo morfismo es un isomorfismo.

■ **Ejemplo 1.7 — Categorías inducidas por órdenes.** Un conjunto parcialmente ordenado $(X,\leq)$ se puede ver como una categoría Σ donde los objetos son los elementos de X, es decir $\Sigma_0 = X$, y los morfismos $\Sigma(x,y)$ son un conjunto con un elemento cuando $x\leq y$, en tal caso lo denotamos por $f_{x,y}$ ó el conjunto vacío en otro caso. Algunas categorías importantes son la siguientes:

1. *Categoría discreta.* Está inducida por un conjunto I y la relación de igualdad. En esta categoría el conjunto $\mathrm{Hom}_I(a,b)$ consta de un solo elemento si y sólo si $a = b$ mientras que en otro caso es vacío.
2. *Categoría de abiertos.* Si consideramos (X,τ) un espacio topológico entonces τ junto a la inclusión es un espacio topológico y entonces puede verse como una categoría y es denotado como $\mathbf{O}(X)$.

■

Ejercicio 1.1 — Propiedades de Morfismos. Muestra que en una categoría, son válidos las siguientes afirmaciones:

1. La identidad es un isomorfismo.

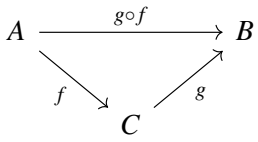
2. La composición de isomorfismos es un isomorfismo.
3. Un isomorfismo es un bimorfismo, pero en general no todo bimorfismo es un isomorfismo.
4. Si una sección es un epimorfismo entonces es un isomorfismo.

■

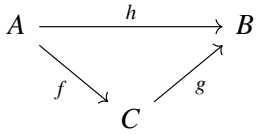
Del ejercicio anterior tenemos que todo isomorfismo es bimorfismo, sin embargo, existen categorías donde los bimorfismos no son isomorfismos. Por ejemplo consideremos la categoría $\mathbb{Z}-Alg$ donde los objetos son anillos y los morfismos son homomorfismos de anillos. Consideremos el morfismo inclusión $i:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$, este morfismo es monomorfismo y epimorfismo, pero i no puede ser isomorfismo ya que $\mathbb{Z}$ no es un campo y $\mathbb{Q}$ si es un campo.

Definición 1.2.4 — Categorías balanceadas. Una categoría en la cual todo bimorfismo es un isomorfismo se le llama categoría balanceada.

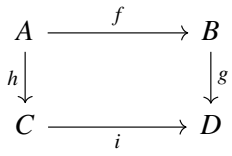
Una forma visual de representar los morfismos y su composición es mediante diagramas, por ejemplo consideremos una categoría $\mathbf{C}$ y un morfismo $f\in\mathbf{C}(A,B)$ el morfismo f se puede representar como sigue: $f:A\to B$, la ley de composición de dos morfismos se puede representar como sigue:



De manera más general, decimos que un diagrama conmuta si coinciden las leyes de composición, por ejemplo consideremos el siguiente triángulo:



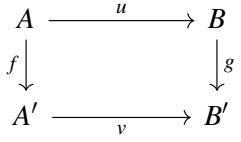
Decimos que el triángulo conmuta si se satisface $g\circ f=h$. Otro ejemplo, para que el cuadrado siguiente conmute:



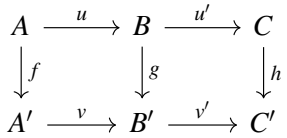
Se debe satisface la siguiente identidad $g\circ f=i\circ h$.

■ **Ejemplo 1.8 — Categoría de diagramas.** Consideremos una categoría $\mathbf{C}$, la categoría de $\mathbf{C}$-morfismos es definido:

1. Objetos: Los $\mathbf{C}$-morfismos $(f:A\to A')$
2. Morfismos : Un morfismo de $(f:A\to A')$ a $(g:B\to B')$ es un par de $\mathbf{C}$-morfismos $(u:A\to B, v:A'\to B')$ tal que conmuta el diagrama:

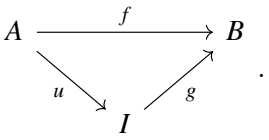


Existe una ley de composición definida:

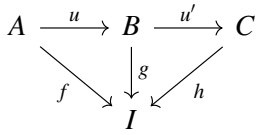


Entonces la ley de composición es $(u'u\colon A \to C, v'v\colon A' \to C')$, uno puede verificar facilmente que satisface los axiomas de asociatividad y de identidad, donde la identidad es $(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} : A \to A, \mathrm{Id}_{A'} : A' \to A')$. Esta categoría de diagramas es un caso especial de una categoría más general llamada **categoría coma**. ∎

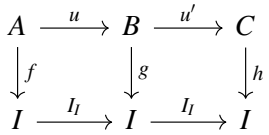
∎ **Ejemplo 1.9** Sea $\mathbf{C}$ una categoría, fijemos un objeto $I \in \mathbf{C}_0$ la categoría de morfismos bajo I, denotado como $\mathbf{C}/I$, es la categoría donde los objetos son morfismos de la forma $(f : A \to I)$, y el morfismo de dos objetos dentro de está categoría es un $\mathbf{C}$-morfismo tal que conmuta el triángulo



Así como en la categoría de diagramas, la ley de composición está dada por el siguiente diagrama conmutativo:

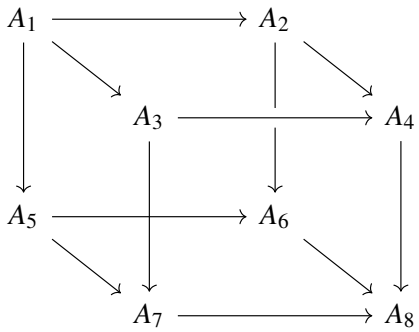


Uno puede verificar que es una categoría, además observemos que el diagrama es equivalente a este diagrama:



Entonces esta categoría se puede ver como una subcategoría de la categoría de diagramas. ∎

Proposición 1.2.1 — Lema del cubo. Considere el siguiente diagrama, si cinco de los seis lados del cubo conmutan excepto la parte superior y $A_4 \to A_8$ es un monomorfismo. Entonces la parte superior conmuta tambien.



(1.1)

Definición 1.2.5 — Subcategoría. Sea $\mathbf{C}$ una categoría, una subcategoría $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ consiste en lo siguiente:

1. Una subcolección de objetos de $\mathbf{C}$ llamado $\mathbf{S}_0$
2. Una subcolección de morfismos $\mathbf{S}$ de $\mathbf{C}$ de tal manera que:
   a) Para cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathbf{S}$, implica que $A, B \in \mathbf{S}_0$
   b) Para cada objeto $A \in \mathbf{S}_0$, $\mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$ está en $\mathbf{S}$
   c) Si f, g son morfismos que están en $\mathbf{S}$ tal que la composición está definida, entonces $g \circ f$ está en $\mathbf{S}$

■ **Ejemplo 1.10** Consideremos la clase **k-VecFin** cuyos objetos consisten en espacios vectoriales de dimensión finita y los morfismos son los mismos morfismos que en **k-Vec**. Entonces **k-VecFin** es una subcategoría de **k-Vec**. ■

Otros ejemplos sencillos son la categoría de grupos abelianos como subcategoría de grupos, la categoría de espacios de Hausdorff como subcategoría de espacios topológicos, la categoría de diagramas bajo un objeto fijo I como subcategoría de diagramas.

1.3. Funtores y Trasformaciones Naturales.

Consideremos la categoría **K-VecFin**, en la teoría de espacios lineales de dimensión finita, tenemos los siguientes resultados que se pueden revisar en [1]:

1. Todo espacio vectorial tiene base.
2. Dado V un espacio vectorial de dimensión finita, digamos n, al fijar una base β entonces existe un isomorfismo no canónico $V \cong K^n$. De esta manera, si W es otro espacio vectorial de dimensión m con base γ, para toda función $f\colon V \to W$ que es K-lineal, existe una única matriz $[f]^{\gamma}_{\beta}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\cong} & K^n \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(x)=[f]^{\gamma}_{\beta}x} \\ W & \xrightarrow[\cong]{} & K^m \end{array}$$

Con estas dos propiedades, tenemos que desde la perspectiva de la categorías hay una relación estrecha entre la categoría **K-VecFin** y la categoría de matrices $\mathbf{A}(K)$ (1.5) sobre K, más aún, si $f\colon V \to W$ y $g\colon W \to T$ son funciones K-lineales en espacios vectoriales de dimensión finita, entonces se puede probar que:

$$[g \circ f] = [g] * [f]$$

Relacionar objetos y morfismos entre dos categorías es un fenómeno muy natural que se produce en el ámbito matemático, de allí la necesidad del concepto de funtor.

Definición 1.3.1 — Funtor. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dos categorías. Un funtor $\mathscr{F}$ de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, denotado como $\mathscr{F}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, consiste en lo siguiente

1. Una función entre la clases objetos $\mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ que a cada $A \in \mathbf{A}_0$ le asigna un objeto $\mathscr{F}(A) \in \mathbf{B}_0$
2. Para cada par de objetos A, A' de $\mathbf{A}$ existe una función de conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(A, A') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(\mathscr{F}(A), \mathscr{F}(A'))$ tal que satisface las siguientes identidades:
   a) $\mathscr{F}(g \circ f) = \mathscr{F}(g) \circ \mathscr{F}(f)$
   b) Para cada objeto $A \in \mathbf{A}$, $\mathscr{F}(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}}) = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}(A)}$

■ **Ejemplo 1.11 — Algebra Lineal sobre espacios vectoriales de dimensión finita.** Sea $\mathbf{C}_K$ la categoría cuyos objetos consisten en parejas (V, β_V), en donde $V \in$ **K-VecFin** y $\beta_V \subseteq V$ es una base.

Además, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_K}((V,\beta_V),(W,\beta_W)) = \mathrm{Hom}_K(V,W)$ y la composición usual. Podemos construir un funtor $\mathscr{T}\colon \mathbf{C}_K \to \mathbf{A}(K)$, como sigue:

1. A cada pareja (V,β_V) es enviado al número natural $n = \dim_K V$.
2. Para cada morfismo $f\colon (V,\beta) \to (W,\gamma)$ es enviado a la matriz $[f]^{\gamma}_{\beta} \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$.

■

Definición 1.3.2 — Composición de funtores. Sean $\mathscr{F}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $\mathscr{G}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ dos funtores, definimos el funtor $\mathscr{G}\circ\mathscr{F}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ con las siguientes reglas de asignación:

1. Para cada objeto $A \in \mathbf{A}$ lo enviamos a $\mathscr{G}(\mathscr{F}(A)) \in \mathbf{C}$.
2. Para cada morfismo $f\colon A \to A'$ lo enviamos al morfismo $\mathscr{G}(\mathscr{F}(f))\colon \mathscr{G}(\mathscr{F}(A)) \to \mathscr{G}(\mathscr{F}(A'))$.

Dualidad En categorías, existe el siguiente concepto de dualidad, tomemos una categoría $\mathbf{C}$ definimos su **dual** como la categoría donde los objetos son los objetos de $\mathbf{C}$ y un único morfismo $f^*: B \to A$ está definido para cada morfismo $f: A \to B$, esta categoría generalmente se denota como $\mathbf{C}^{op}$. La definición de funtor es llamado también funtor covariante, usando la categoría opuesta podemos definir **funtor contravariante** como el funtor $\mathscr{F}: \mathbf{C} \to \mathbf{D}^{op}$, en términos de la categoría $\mathbf{D}$ tenemos que se satisface $\mathscr{F}(g\circ f) = \mathscr{F}(f)\circ\mathscr{F}(g)$, en términos puntuales, un funtor $\mathscr{F}: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ es contravariante si se satisface la identidad anterior, un ejemplo de funtor contravariante es $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,A): \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$.
Notemos que la categoría dual de la categoría dual es $(\mathbf{C}^{op})^{op} = \mathbf{C}$, siendo este el principio de dualidad, es decir a toda definición en términos de sus morfismos, le corresponde una definición dual, que consiste en la definición con los morfismos invertidos. Por ejemplo:

Definición 1.3.3 — Objeto inicial y terminal. En una categoría $\mathbf{C}$ un objeto I es inicial si para todo objeto X, existe un único morfismo $f: I \to X$ es decir que $\mathbf{C}(I,X)$ consta de solo un elemento, dualmente un objeto F es final si para todo objeto X, existe un único morfismo $g: X \to F$ es decir que $\mathbf{C}(X,F)$ consta de solo un objeto. Un objeto cero es un objeto inicial que es también un objeto final.

Ejercicio 1.2 Sea I un objeto inicial en $\mathbf{A}$ responde lo siguiente:

1. Sea $e\colon I \to J$ un epimorfismo. ¿J es un objeto inicial?.
2. Si $\mathscr{F}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ es un funtor ¿$\mathscr{F}(I)$ es un objeto inicial?.
3. Responde las preguntas duales, para el caso de que I sea un objeto final.

■

Definición 1.3.4 — Propiedades preservada por funtores. Consideremos un funtor $\mathscr{F}: \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, sea P una propiedad que puede cumplir un objeto, decimos que $\mathscr{F}$ preserva P si para cada objeto X que satisface P implica que $\mathscr{F}(X)$ satisface la propiedad P, de la misma manera para propiedades de morfismos. También decimos que $\mathscr{F}$ refleja P si para cada objeto X tal que $\mathscr{F}(X)$ satisface P implica que X satisface P, de la misma manera para propiedades de morfismos.

Definición 1.3.5 — Funtores fiel y completos. Sea $\mathscr{F}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor y las funciones:

$$\mathbf{A}(A,A') \to \mathbf{B}(\mathscr{F}(A),\mathscr{F}(A')),\ f \to \mathscr{F}(f)$$

para cada par de objetos A,A' en $\mathbf{A}$. Decimos que el funtor $\mathscr{F}$ es:

1. *Fiel*, cuando las funciones mencionadas son inyectivas para todos los objetos A,A'.
2. *Pleno*, cuando las funciones mencionadas son sobreyectivas para todos los objetos A,A'. A este tipo de funtores también se les conoce como funtores completos.
3. *Isomorfismo* cuando es fiel y pleno, además la función entre la clase de objetos $\mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ es biyectiva.

Ejercicio 1.3 — Propiedades sobre Morfismos Especiales y funtores. Muestra que son válidas las siguientes afirmaciones:

1. Todos los funtores preservan isomorfismos.
2. Un funtor fiel y completo refleja isomorfismos.
3. Los funtores fieles reflejan monomorfismos y epimorfismos.

■

Definición 1.3.6 — Transformaciones naturales. Consideremos dos funtores $\mathscr{F},\mathscr{G} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, una transformación natural $\alpha : \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{H}$ de $\mathscr{F}$ a $\mathscr{H}$ es una clase de morfismos $(\alpha_A : \mathscr{F}(A) \to \mathscr{H}(A))_{A\in\mathbf{A}}$ de $\mathbf{B}$ indexado por objetos de $\mathbf{A}$ tal que cada morfismo $f : A \to A'$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo en $\mathbf{B}$

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & \mathscr{H}(A) \\ {\scriptstyle \mathscr{F}(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{H}(f)} \\ \mathscr{F}(A') & \xrightarrow[\alpha_{A'}]{} & \mathscr{H}(A') \end{array}$$

■ **Ejemplo 1.12 — Dualidad Lineal.** Consideremos la categoría **K-Vec**, para cada espacio vectorial V, denotamos el espacio dual lineal $V^* := \mathrm{Hom}_K(V,K)$. Definimos la función **bilineal estandar** como sigue:

$$b_V : V \times V^* \to K,\ b_V(v,f) := f(v)$$

Esta función induce una única función K-lineal $\alpha_V : V \to \mathrm{Hom}_K(V^*,K) = V^{**}$ dado como $\alpha_V(v) = b_V(v,-)$. Es fácil ver que la asignación $V \to V^{**}$ induce un funtor $\mathscr{F} :$ **K-Vec** $\to$ **K-Vec**. Entonces la familia α_V forma una transformación natural $\alpha :\ \mathrm{Id}_{\mathbf{K\text{-}Vec}} \Rightarrow \mathscr{F}$. ■

■ **Ejemplo 1.13 — Conjunto Potencia.** Existe un funtor contravariante $\mathscr{P} :$ **Set** $\to$ **Set** dado por las siguientes asignaciones:

1. A cada conjunto X lo enviamos al conjunto potencia $\mathscr{P}(X)$.
2. Si $f : X \to Y$ es una función, lo enviamos a la función imagen inversa $f^* :\ \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$.

Sea $2 = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, y tenemos el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-,2) :$ **Set** $\to$ **Set**. Existe una transformación natural $\alpha :\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-,2) \to \mathscr{P}$ dado como sigue, para cada conjunto X, $\alpha_X :\ \mathscr{P}(X) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,2)$ es la función definida $\alpha_X(A) = f^*(\{\{\emptyset\}\})$. ■

Ejercicio 1.4 Muestra lo siguiente:

1. $\alpha :\ \mathscr{P} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-,2)$ es una transformación natural.
2. Para cada conjunto X, α_X es una biyección.

■

Definición 1.3.7 — Composición vertical Natural. Sean $\mathscr{F},\mathscr{G},\mathscr{H} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ funtores y consideremos las transformaciones naturales $\alpha : \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{H}, \beta : \mathscr{H} \Rightarrow H$. Definimos la transformación natural composición vertical $\beta \circ \alpha :\ \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{H}$ como la familia $\{\beta_A \circ \alpha_A\}_{A\in\mathbf{A}}$.

Ejercicio 1.5 Muestra que la composición vertical natural de dos transformaciones naturales, es una transformación natural. ■

Definición 1.3.8 — Categorías pequeñas. Una categoría $\mathbf{C}$ es una categoría pequeña cuando su clase de objetos es un conjunto.

Proposición 1.3.1 — La categoría de las categorías pequeñas. Las categorías pequeñas y junto con los funtores como morfismos entre ellas constituyen una categoría denotado como **Cat**.

Proposición 1.3.2 — La categoría de Funtores. Sea **A** una categoría pequeña y **B** una categoría. Existe una categoría denotada como $\mathbf{Fun}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ que consiste en:

1. **Objetos**: Como los funtores de **A** a **B**.
2. **Morfismos**: Como la transformaciones naturales $\alpha\colon \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G}$.
3. **Composición**: Como la composición vertical natural.

Además, cuando **B** es pequeña, entonces $\mathbf{Fun}(\mathbf{A},\mathbf{B})$ es pequeña.

Definición 1.3.9 — Isomorfismo natural. Un isomorfismo natural es un isomorfismo $\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ en la categoría $\mathbf{Fun}(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

Proposición 1.3.3 Sea $\alpha\colon \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G}$ una transformación natural, entonces α es un isomorfismo natural si y sólo si para toda $A \in \mathbf{C}$ el morfismo α_A es un isomorfismo en **C**.

Demostración. Si α es un isomorfismo natural, entonces existe una transformación natural $\beta\colon \mathscr{G} \to \mathscr{F}$ tal que:

$$\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}},\ \alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{\mathscr{G}}\,. \tag{1.2}$$

Al tomar $A \in \mathbf{C}$ un objeto, aplicando la definición (1.3.7) tenemos:

$$\beta_A \circ \alpha_A = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}(A)},\ \alpha_A \circ \beta_A = \mathrm{Id}_{\mathscr{G}(A)} \tag{1.3}$$

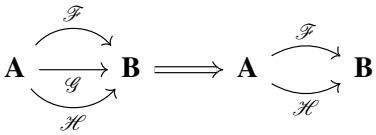
obteniendo que α_A es un isomorfismo por (1.3). Conversamente, supongamos que para toda $A \in \mathbf{C}$, se cumple (1.3), basta mostrar que la familia $\{\beta_A\}_{A\in\mathbf{C}}$ es una transformación natural, pues entonces obtendriamos (1.2). Sea $f\colon A \to A'$ un morfismo en **C**, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f)\beta_A &= \mathrm{Id}_{\mathscr{F}(A')}\mathscr{F}(f)\beta_A \\
&= \beta_{A'}\alpha_{A'}\mathscr{F}(f)\beta_A, \text{ por (1.3)} \\
&= \beta_{A'}\mathscr{G}(f)\alpha_A\beta_A, \text{ por ser } \alpha \text{ una transformación natural} \\
&= \beta_{A'}\mathscr{G}(f), \text{ por (1.3)}
\end{aligned}$$

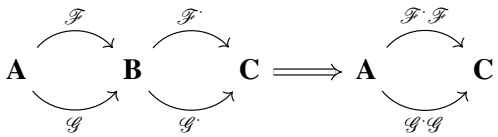
por lo tanto β es una transformación natural. ■

▪ **Ejemplo 1.14** Considerando el ejemplo (1.13), gracias a la proposición (1.3.3) y el ejercicio (1.4) tenemos un isomorfismo natural entre los funtores $\mathscr{P} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-,2)$. ▪

Las transformaciones naturales usualmente suelen conocerse como la composición vertical entre funtores con las mismas categorías. Desde esta manera, la composición vertical es visto como:



Sin embargo, también es posible definir una transformación natural para un par de transformaciones naturales cuyos funtores admiten una composición de funtores según la definición (1.3.2), dicha composición se denominará como composición horizontal, en referencia a la siguiente representación visual:



Consideremos $\alpha : \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G}$ una transformación natural de funtores de **A** a **B**, y $\alpha^* : \mathscr{F}^* \Rightarrow \mathscr{G}$ una transformación natural de funtores de **B** a **C**, vamos a definir una transformación natural de funtores de $\mathscr{F}^*\mathscr{F}$ a $\mathscr{G}^*\mathscr{G}$ como sigue:

Sea $X \in \mathbf{A}_0$, entonces tenemos el $\mathbf{B}$-morfismo $\alpha_X : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{G}(X)$, aplicando la naturalidad de α^* tenemos el cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}^*\mathscr{F}(X) & \xrightarrow{\alpha^*_{\mathscr{F}(X)}} & \mathscr{G}^*\mathscr{F}(X) \\ {\scriptstyle \mathscr{F}(\alpha_X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{G}^*(\alpha_X)} \\ \mathscr{F}\mathscr{G}(X) & \xrightarrow[\alpha^*_{\mathscr{G}(X)}]{} & \mathscr{G}^*\mathscr{G}(X) \end{array}$$

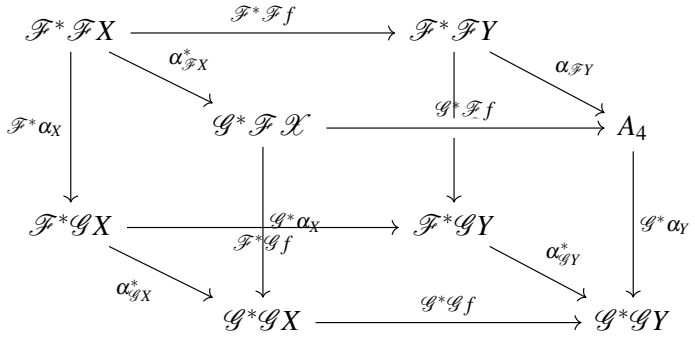
Consideremos $\alpha^* * \alpha : \mathscr{F}^*\mathscr{F} \to \mathscr{G}^*\mathscr{G}$ como la familia $\{\alpha^*_{\mathscr{G}(X)}\mathscr{F}^*(\alpha_X) : \mathscr{F}^*\mathscr{F}(\mathscr{X}) \to \mathscr{G}^*\mathscr{G}(\mathscr{X})\}_{X\in\mathbf{A}_0}$.

Proposición 1.3.4 Considerando la construcción anterior, entonces la familia $\alpha^* * \alpha$ es una transformación natural del funtor $\mathscr{F}^*\mathscr{F}$ al funtor $\mathscr{G}^*\mathscr{G}$.

Demostración. Consideremos $f : X \to Y$ entonces aplicando la naturalidad de α obtenemos;

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}X & \xrightarrow{\alpha_X} & \mathscr{G}X \\ {\scriptstyle \mathscr{F}f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{G}f} \\ \mathscr{F}Y & \xrightarrow[\alpha_Y]{} & \mathscr{G}Y \end{array}$$

aplicando la naturalidad de α^* obtenemos el diagrama conmutativo:

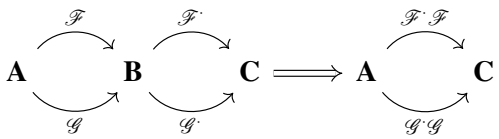


Obteniendo la conmutatividad:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}^*\mathscr{F}X & \xrightarrow{\alpha^*_{\mathscr{G}X}\mathscr{F}^*\alpha_X} & \mathscr{G}^*\mathscr{G}X \\ {\scriptstyle \mathscr{F}^*\mathscr{F}f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{G}^*\mathscr{G}f} \\ \mathscr{F}^*\mathscr{F}Y & \xrightarrow[\alpha^*_{\mathscr{G}Y}\mathscr{F}^*\alpha_Y]{} & \mathscr{G}^*\mathscr{G}Y \end{array}$$

Por tanto $\alpha^* * \alpha$ es una transformación natural. ■

Definición 1.3.10 — Composición horizontal natural. Sean $\alpha : \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G}$ y $\alpha^* : \mathscr{F}^* \Rightarrow \mathscr{G}^*$ dos transfomaciones naturales de la forma:



Definimos la composición horizontal natural $\alpha^* * \alpha : \mathscr{F}^* \circ \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G}^* \circ \mathscr{G}$ como la familia $\{\alpha^*_{\mathscr{G}(X)}\mathscr{F}^*(\alpha_X) : \mathscr{F}^*\mathscr{F}(\mathscr{X}) \to \mathscr{G}^*\mathscr{G}(\mathscr{X})\}_{X\in\mathbf{A}_0}$.

Teorema 1.3.5 — Distributividad de las composiciones transformaciones naturales. Consideremos $\mathbf{A},\mathbf{B},\ \mathbf{C}$ categorias, $\mathscr{F},\mathscr{G},\mathscr{H}$ funtores de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, $\mathscr{F}^*,\mathscr{G}^*,\mathscr{H}^*$ funtores de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C}$ y las siguientes transformaciones naturales:

1. $\alpha : \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G}$
2. $\beta : \mathscr{G} \Rightarrow \mathscr{H}$
3. $\alpha^* : \mathscr{F}^* \Rightarrow \mathscr{G}^*$
4. $\beta^* : \mathscr{G}^* \Rightarrow \mathscr{H}^*$

Entonces tenemos la siguiente igualdad de transformaciones naturales:

$$(\beta^*\alpha^*) * (\beta\alpha) = (\beta^* * \beta)(\alpha^* * \alpha)$$

Demostración. Consideremos $X \in \mathbf{A}$, entonces por definición:

$$\begin{aligned}
[(\beta^* \circ \alpha^*) * (\beta \circ \alpha)]_X &= (\beta^* \circ \alpha^*)_{\mathscr{H}X} \circ \mathscr{F}^*(\beta \circ \alpha)_X \\
&= (\beta^*_{\mathscr{H}X} \circ \alpha^*_{\mathscr{H}X}) \circ \mathscr{F}^*\beta_X \circ \mathscr{F}^*\alpha_X \\
&= \beta^*_{\mathscr{H}X} \circ \alpha^*_{\mathscr{H}X} \circ \mathscr{F}^*\beta_X \circ \mathscr{F}^*\alpha_X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(\beta^* * \beta) \circ (\alpha^* * \alpha)]_X &= (\beta^* * \beta)_X \circ (\alpha^* * \alpha)_X \\
&= \beta^*_{\mathscr{H}X} \circ G^*\beta_X \circ \alpha^*_{\mathscr{G}X} \circ \mathscr{F}^*\alpha_X
\end{aligned}$$

Pero $\alpha^*_{\mathscr{H}X} \circ \mathscr{F}^*\beta_X = G^*\beta_X \circ \alpha^*_{\mathscr{G}X}$ por la naturalidad de α^* obteniendo la igualdad deseada. ■

R Algunas propiedades de la composición horizontal:

1. Para cada $C \in \mathbf{C}$ se cumple $(I_{\mathscr{G}} * \alpha)_C = (I_{\mathscr{G}})_{\mathscr{F}'(C)}\mathscr{G}(\alpha_C) = \mathscr{G}(\alpha_C)$.
2. Para cada $C \in \mathbf{C}$ se cumple $(\beta * I_{\mathscr{F}})_C = \beta_{\mathscr{F}(C)}$.
3. $(I_{\mathscr{G}} * I_{\mathscr{F}}) = I_{\mathscr{G}\mathscr{F}}$.
4. Si α y β son isomorfismos naturales entonces $(\beta^{-1} * \alpha^{-1}) \circ (\beta * \alpha) = I_{\mathscr{G}\mathscr{F}}$, $(\beta * \alpha) \circ (\beta^{-1} * \alpha^{-1}) = I_{\mathscr{F}\mathscr{G}}$

Funtor inducido en la categoría de funtores. Sea $\mathbf{I}$ una categoría pequeña y $\Phi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un funtor, entonces induce el funtor en la categoría de funtores:

$$\Phi^* : \mathbf{Fun}(\mathbf{I},\mathbf{C}) \to \mathbf{Fun}(\mathbf{I},\mathbf{C}')$$

Dado como sigue:

1. Para cada funtor $\mathscr{F} : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ es enviado al funtor $\Phi\mathscr{F} : \mathbf{I} \to \mathbf{C}'$.
2. Para cada transformación natural $\alpha : \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G}$ es enviado a la trasformación natural $I_\Phi * \alpha : \Phi\mathscr{F} \Rightarrow \Phi\mathscr{G}$ y lo denotaremos como $\Phi^*\alpha$.

Notemos que la transformación anterior cumple para cada $X \in \mathbf{C}$ que:

$$\begin{aligned}
\Phi^*\alpha_X &= (I_\Phi * \alpha)_X \\
&= (I_\Phi)_{\mathscr{G}(X)}\Phi(\alpha_X) \\
&= I_{\Phi\mathscr{G}(X)}\Phi(\alpha_X) \\
&= \Phi(\alpha_X) : \Phi\mathscr{F}(X) \to \Phi\mathscr{G}(X).
\end{aligned}$$

Proposición 1.3.6 Sea $\mathbf{I}$ una categoría pequeña y $\Phi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un funtor, entonces la asignación Φ^* es un funtor.

Demostración. Sea $\alpha\colon \mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{G}$ y $\beta\colon \mathscr{G} \Rightarrow \mathscr{H}$ dos transformaciones naturales en $\mathbf{Fun}(\mathbf{I},\mathbf{C})$, entonces

$$\begin{aligned}\Phi^*(\beta\circ\alpha) &= (\mathrm{Id}_\Phi) * (\beta\circ\alpha)\\ &= (\mathrm{Id}_\Phi\circ\mathrm{Id}_\Phi) * (\beta\circ\alpha)\\ &= (\mathrm{Id}_\Phi * \beta)\circ(\mathrm{Id}_\Phi * \alpha),\ \text{Por (1.3.5)}\\ &= \Phi^*(\beta)\circ\Phi^*(\alpha).\end{aligned}$$

Por último, es fácil ver que $\Phi^*(\mathrm{Id}_{\mathscr{F}}) = \mathrm{Id}_{\Phi\mathscr{F}}$. ■

Esta asignación se puede extender a transformaciones naturales, sean $\mathscr{F},\mathscr{G}\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}'$ funtores y $\alpha\colon \mathscr{F}\to\mathscr{G}$ una transformación natural, definimos $\alpha^*\colon \mathscr{F}^*\to\mathscr{G}^*$ como sigue, para cada $\mathscr{U}\in \mathbf{Fun}(\mathbf{I},\mathbf{C})$ tenemos:

$$\alpha^*_{\mathscr{U}} := \alpha * \mathrm{Id}_{\mathscr{U}} : \mathscr{F}\mathscr{U}\to\mathscr{G}\mathscr{U}.$$

Para ver que es un morfismo en $\mathbf{Fun}(\mathbf{I},\mathbf{C}')$, pues si $\gamma\colon \mathscr{U}\to\mathscr{V}$ es un morfismo en $\mathbf{Fun}(\mathbf{I},\mathbf{C})$, entonces conmuta el siguiente diagrama de transformaciones naturales:

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{F}\mathscr{U} & \xrightarrow{\alpha^*_{\mathscr{U}}} & \mathscr{G}\mathscr{U}\\ {\scriptstyle \mathscr{F}^*(\gamma)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{G}^*(\gamma)}\\ \mathscr{F}\mathscr{V} & \xrightarrow[\alpha^*_{\mathscr{V}}]{} & \mathscr{G}\mathscr{U}\end{array}$$

Esto se sigue de aplicar repetidamente (1.3.5)

$$\begin{aligned}\mathscr{G}^*(\gamma)\circ\alpha^*_{\mathscr{U}} &= (\mathrm{Id}_{\mathscr{G}} * \gamma)\circ(\alpha * \mathrm{Id}_{\mathscr{U}})\\ &= (\mathrm{Id}_{\mathscr{G}}\circ\alpha) * (\gamma\circ\mathrm{Id}_{\mathscr{U}})\\ &= (\alpha\circ\mathrm{Id}_{\mathscr{F}}) * (\mathrm{Id}_{\mathscr{V}}\circ\gamma)\\ &= \alpha^*_{\mathscr{V}}\circ\mathscr{F}^*(\gamma)\end{aligned}$$

Proposición 1.3.7 Las siguientes afirmaciones son verdaderas, para cada categoría $\mathbf{I}$:

1. Si $\Phi\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}'$ y $\Psi\colon \mathbf{C}''\to\mathbf{C}''$ dos funtores, entonces:
$$(\Psi\circ\Phi)^* = \Psi^*\circ\Phi^*$$
2. Para toda categoria $\mathbf{C}$, tenemos $(\mathrm{Id}_{\mathbf{C}})^* = \mathrm{Id}_{\mathbf{Fun}(\mathbf{I},\mathbf{C})}$.
3. Si $\alpha\colon \mathscr{F}\to\mathscr{G}$ y $\beta\colon \mathscr{G}\to\mathscr{H}$ son transfomaciones naturales de funtores de $\mathbf{C}$ en $\mathbf{C}'$ entonces
$$(\beta\circ\alpha)^* = \beta^*\circ\alpha^*$$
4. Para cada funtor $\mathscr{F}\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}'$ tenemos que:
$$(\mathrm{Id}_{\mathscr{F}})^* = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}^*}.$$
5. Si $\alpha^*\colon \mathscr{F}\cong\mathscr{G}$ es un isomorfismo natural entonces $\alpha^*\colon \mathscr{F}^*\cong\mathscr{G}^*$ es un isomorfismo natural.

Ejercicio 1.6 Probar (1.3.7) ■

Proposición 1.3.8 Si Φ es un funtor fiel (resp. fiel y pleno), entonces Φ^* lo es.

Ejercicio 1.7 Probar (1.3.8). ∎

De manera dual podemos definir el funtor:

$$\Phi_*\colon \mathbf{Fun}(\mathbf{C}',\mathbf{I}) \to \mathbf{Fun}(\mathbf{C},\mathbf{I})$$

como sigue

1. Para cada funtor $\mathscr{H}\colon \mathbf{C}' \to \mathbf{I}$ es enviado al funtor $\mathscr{H}\Phi\colon \mathbf{C} \to \mathbf{I}$.
2. Para cada transformación natural $\alpha\colon \mathscr{H} \Rightarrow \mathscr{T}$ es enviado a la transformación natural $\alpha * \mathrm{Id}_\Phi\colon \mathscr{H}\Phi \Rightarrow \mathscr{T}\Phi$.

1.4. Equivalencia de Categorías.

Definición 1.4.1 — Equivalencia de categorias. Sea $\mathscr{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un funtor, decimos que $\mathscr{F}$ es:

1. Un *isomorifsmo de categorías*, si existe $\mathbf{G}: \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ funtor tal que $\mathscr{G}\mathscr{F}(X) = X$ y $\mathscr{F}\mathscr{G}(Y) = Y$ para todo $X \in \mathbf{C}_0$, $Y \in \mathbf{C}'_0$ y similarmente para los morfismos.
2. Una *equivalencia de categorías* si existen $\mathbf{G}: \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ funtor e isomorfismos naturales $\alpha: \mathscr{G}\mathscr{F} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}, \beta: \mathscr{F}\mathscr{G} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{C}'}$.

Proposición 1.4.1 Sea $\mathscr{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ una equivalencia de categorías entonces $\mathscr{F}^*$ y $\mathscr{F}_*$ son equivalencias de categorías.

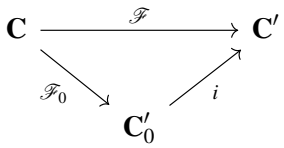
Demostración. Basta probar para $\mathscr{F}^*$. Tenemos por definición dos isomorfismo naturales $\alpha\colon \mathscr{G}\mathscr{F} \to \mathrm{Id}_{\mathbf{C}}$ y $\beta\colon \mathscr{F}\mathscr{G} \to \mathrm{Id}_{\mathbf{C}'}$, entonces por (1.3.7) tenemos los isomorfismo naturales $\alpha^*\colon \mathscr{G}^*\mathscr{F}^* \to \mathrm{Id}_{\mathbf{Fun}(\mathbf{I},\mathbf{C})}$ y $\beta^*\colon \mathscr{F}^*\mathscr{G}^* \to \mathrm{Id}_{\mathbf{Fun}(\mathbf{I},\mathbf{C}')}$. ∎

Definición 1.4.2 — Funtor esencialmente sobreyectivo. Decimos que un funtor $\mathscr{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ es esencialmente sobreyectivo si para cada objeto $Y \in \mathbf{C}'$ existe un $X \in \mathbf{C}$ y un isomorfismo $\mathscr{F}(X) \cong Y$.

Definición 1.4.3 — Funtor Conservativo. Decimos que un funtor $\mathscr{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ es conservativo si para cada morfismo f en $\mathbf{C}$, si $\mathscr{F}(f)$ es isomorfismo entonces f lo es.

Definición 1.4.4 — Subcategoría plena. Decimos que una subcategoría $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$ es plena o completa si el funtor inclusión $i\colon \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ es completa.

Teorema 1.4.2 — Factorización de funtores. Sea $\mathscr{F}: \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un funtor, $\mathbf{C}'_0$ una subcategoria completa de $\mathbf{C}'$, tal que para cada $X \in \mathbf{C}$, existe $Y \in \mathbf{C}'_0$ y un isomorfismo $\mathscr{F}(X) \cong Y$. Entonces existe un único (salvo isomorfismos naturales) funtor $\mathscr{F}_0: \mathbf{C} \to \mathbf{C}_0$ y un isomorfismo de funtores $\theta_0: \mathscr{F} \Rightarrow i \circ \mathscr{F}_0$.



Demostración. Usando el axioma de elección, para cada $X \in \mathbf{C}$, escogemos una $Y \in \mathbf{C}'_0$ y un isomorfismo $\phi_X: Y \to \mathscr{F}(X)$, definimos $\mathscr{F}_0\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'_0$ como sigue:

1. Para cada objeto $X \in \mathbf{C}$ lo enviamos a $Y \in \mathbf{C}'_0$.
2. Para cada morfismo $f\colon X \to X'$ lo enviamos a $\mathscr{F}_0(f) = \phi_{X'}^{-1}\mathscr{F}(f)\phi_X$.

obteniendo la transformación natural $\phi\colon \mathscr{F} \Rightarrow i \circ \mathscr{F}_0$ que es un isomorfismo natural. ■

Proposición 1.4.3 Sea $\mathbf{C}$ una categoría (pequeña). Existe una subcategoria completa $\mathbf{C}_0$ tal que el funtor inclusión es una equivalencia de categorías y $\mathbf{C}_0$ tiene la propiedad de que dos objetos isomorfos en $\mathbf{C}_0$ son iguales.

Una consecuencia de esto es

Proposición 1.4.4 Un funtor $\mathscr{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ es una equivalencia de categorías si y solo si $\mathscr{F}$ es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo.

Demostración. Si $\mathscr{F}$ es una equivalencia de categorías, es claro que $\mathscr{F}$ es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo. Luego si $\mathscr{F}$ es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo, entonces por (1.4.3) existe una subcategoria plena $\mathbf{C}_0$ de $\mathbf{C}$ tal que dos objetos isomorfos en $\mathbf{C}_0$ son iguales, y denotamos $\kappa\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}_0$ su cuasi-inverso. Similarmente construimos una subcategoría plena $\mathbf{C}'_0$ de $\mathbf{C}$ tal que dos objetos isomorfos son iguales y κ' el cuasi inverso de i'. Tenemos que $k' \circ \mathscr{F} \circ i\colon \mathbf{C}_0 \to \mathbf{C}'_0$ es un isomorfismo, denotamos $\mathscr{K}$ su inverso y por lo tanto el funtor $\mathscr{G} = i\colon \mathscr{K} \circ \kappa'$ es el cuasiinverso de $\mathscr{F}$. ■

Corolario 1.4.5 Sea $\mathscr{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ un funtor fiel y pleno, entonces existe una subcategoría plena $i'\colon \mathbf{C}'_0 \to \mathbf{C}'$ y una equivalencia de categorias $\mathscr{F}_0\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'_0$ tal que $\mathscr{F} \cong i' \circ \mathscr{F}_0$

Demostración. Sea $\mathbf{C}'_0$ la subcategoria plena cuyos objetos son de la forma $\mathscr{F}(X)$ y aplica (1.4.4). ■

1.5. Lema de Yoneda y Representabilidad.

Definición 1.5.1 — Funtores de Yoneda. Fijemos $\mathbf{C}$ una categoría, definimos los funtores de Yoneda como sigue:

1. (Funtor de Yoneda Contravariante) $\mathscr{K}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Fun}(\mathbf{C}^{op}, \mathbf{Set})$ donde para cada $X \in \mathbf{C}$ es enviado al funtor $\mathscr{K}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$ y para cada morfimo $f\colon X \to Y$ es enviado a la transformación natural $\mathscr{K}_f\colon \mathscr{K}(X) \to \mathscr{K}(Y)$ que consiste para cada objeto $Z \in \mathbf{C}$, la función $(\mathscr{K}_f)_Z$ es definido como:

$$\begin{aligned}(\mathscr{K}_f)_Z\colon \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,X) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z,Y)\\ \phi &\to (f \circ \phi)\end{aligned}$$

2. (Funtor de Yoneda Covariante) $\mathscr{H}\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{Set})$ donde para cada $X \in \mathbf{C}$ es enviado al funtor $\mathscr{H}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -)$ y para cada morfimo $f\colon X \to Y$ es enviado a la transformación natural $\mathscr{K}_f\colon \mathscr{K}(Y) \to \mathscr{K}(X)$ que consiste para cada objeto $Z \in \mathbf{C}$, la función $(\mathscr{H}_f)_Z$ es definido como:

$$\begin{aligned}(\mathscr{H}_f)_Z\colon \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y,Z) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Z)\\ \phi &\to (\phi \circ f)\end{aligned}$$

Ejercicio 1.8 Sea $\mathbf{C}$ una categoría y $\mathscr{F}\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$. Prueba que las asignaciones:

1. Para cada objeto $X \in \mathbf{C}$, es enviado al conjunto $Nat(\mathscr{K}(X), \mathscr{F})$.
2. Para cada morfismo $f\colon X \to X'$ es enviado a la función:

$$Nat(\mathscr{K}(X'), \mathscr{F}) \to Nat(\mathscr{K}(X), \mathscr{F})$$

dado por $\alpha \to \alpha \circ \mathscr{K}_f$.
Induce un funtor contravariante $\widehat{\mathscr{F}}\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$. ∎

Teorema 1.5.1 — Lema de Yoneda. Para todo funtor contravariante $\mathscr{F}\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ y para todo objeto $X \in \mathbf{C}$ se tiene la siguiente biyección natural en ambas variables.

$$Nat(\mathscr{K}(X), \mathscr{F}) \cong \mathscr{F}(X)$$

Demostración. Para cada $X \in \mathbf{C}$, definimos la función

$$\phi_{X,\mathscr{F}}\colon Nat(\mathscr{K}(X), \mathscr{F}) \to \mathscr{F}(X)$$

como sigue $\phi_{X,\mathscr{F}}(\alpha) = \alpha_X(\mathrm{Id}_X)$. Entonces para cada morfismo $f\colon X \to Y$ en $\mathbf{C}$ se tienen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} Nat(\mathscr{K}(Y), \mathscr{F}) & \xrightarrow{\phi_{Y,\mathscr{F}}} & \mathscr{F}(Y) \\ {\scriptstyle \widehat{\mathscr{F}}(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}(f)} \\ Nat(\mathscr{K}(X), \mathscr{F}) & \xrightarrow[\phi_{X,\mathscr{F}}]{} & \mathscr{F}(X) \end{array}$$

En donde $\widehat{\mathscr{F}}$ es la asignación funtorial del ejercicio (1.8). Y para cada transformación natural $\alpha\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ entonces conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Nat(\mathscr{K}(X), \mathscr{F}) & \xrightarrow{\phi_{X,\mathscr{F}}} & \mathscr{F}(X) \\ {\scriptstyle Nat(\mathscr{K}(X),\alpha_X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_X} \\ Nat(\mathscr{K}(X), \mathscr{G}) & \xrightarrow[\phi_{X,\mathscr{G}}]{} & \mathscr{G}(X) \end{array}$$

Basta ahora construir el inverso de $\phi_{X,\mathscr{F}}$. Primero, dado $t \in \mathscr{F}(X)$ y $W \in \mathbf{C}$, definimos:

$$\delta^t_W\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(W, X) \to \mathscr{F}(W)$$

Como sigue $\delta^t_W(f) = \mathscr{F}(f)(t)$ para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(W, X)$. Entonces la familia $\delta^t := \{\delta^t_W\}_{W \in \mathbf{C}}$ es una transformación natural, pues para cada $\mu\colon U \to V$ tenemos

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, X) & \xrightarrow{\delta^t_V} & \mathscr{F}(V) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mu,X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}(\mu)} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(U, X) & \xrightarrow[\delta^t_U]{} & \mathscr{F}(U) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(\mu) \circ \delta^t_V(f) &= \mathscr{F}(\mu)(\mathscr{F}(f)(t)) \\ &= \mathscr{F}(f\mu)(t) \\ &= \delta^t_U \circ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mu, X)(f) \end{aligned}$$

Permitiendo definir la función:

$$\psi_{X,\mathscr{F}}\colon \mathscr{F}(X) \to Nat(\mathscr{K}(X), \mathscr{F})$$

como sigue $\psi_{X,\mathscr{F}}(t) = \delta^t$ y esta es su inversa. ∎

Existe su versión covariante y es la siguiente.

Teorema 1.5.2 — Lema de Yoneda Covariante. Para todo funtor covariante $\mathscr{F}: \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ y para todo objeto $X \in \mathbf{C}$ se tiene la siguiente biyección natural en ambas variables.

$$Nat(\mathscr{H}(X), \mathscr{F}) \cong \mathscr{F}(X)$$

Proposición 1.5.3 Los funtores de Yoneda son fieles y plenos.

Demostración. Esto se sigue del isomorfismo

$$Nat(\mathscr{K}(X), \mathscr{K}(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X,Y)$$

donde se aplico (1.5.1) con $\mathscr{F} = \mathscr{K}(Y)$. ■

Gracias a (1.5.3) y a (1.4.5) tenemos una subcategoría plena de $\mathbf{Fun}(\mathbf{C}^{op}, \mathbf{Set})$ que es equivalente a $\mathbf{C}$, dicha subcategoría será denominada funtores representables.

Definición 1.5.2 — Funtores Representables. Sea $\mathscr{F}: \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ un funtor contravariante, decimos que es representable si existe $X \in \mathbf{C}$ tal que $\mathscr{F} \cong \mathscr{K}(X)$.

Categoría de elementos Existe una manera interesante de caracterizar un funtor representable mediante sus elementos, para ello construiremos una nueva categoría. Fijemos $\mathscr{F}: \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$, definimos la categoría $\mathbf{C}_{\mathscr{F}}$ como sigue:

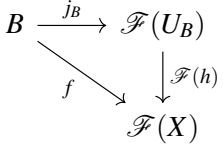
1. Los objetos son parejas (A,a) con $A \in \mathbf{C}$ y $a \in \mathscr{F}(A)$.
2. Un morfismo $f: (A,a) \to (B,b)$ es un morfismo $f: A \to B$ en C tal que $\mathscr{F}f(a) = b$

Con esto en mente, consideremos lo siguiente. Dado un funtor $\mathscr{F}: \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$, y $(X,s) \in \mathbf{C}_{\mathscr{F}}$, definimos la transformación natural $\theta_s: \mathscr{H}(X) \Rightarrow \mathscr{F}$ como sigue, para cada $A \in C$, $\theta_{s,A}: \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(A,X) \to \mathscr{F}(A)$ es la función $\theta_{s,A}(f: A \to X) := \mathscr{F}(f)[s] \in \mathscr{F}(A)$. Por otro lado, de la demostración del lema de Yoneda, si $\alpha: \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,X) \Rightarrow \mathscr{F}$ se considera la siguiente asignación $\Theta: Nat(\mathscr{H}(X), \mathscr{F}) \to \mathscr{F}(X)$ como $\Theta(\alpha) = \alpha_X(Id_X) \in \mathscr{F}(X)$. Por lema de Yoneda, Θ es biyectiva, por tanto $s = \Theta \circ \theta(s)$, $\alpha = \theta \circ \Theta(\alpha)$. Asi que cuando $\mathscr{F}$ es representado por X_0, existe un elemento $s_0 \in F(X_0)$ con la propiedad de que para cada $(Y,t) \in \mathbf{C}_{\mathscr{F}}$ existe un único $\mathbf{C}_{\mathscr{F}}$-morfismo. Y viceversa, si existe $s_0 \in \mathscr{F}(X_0)$ tal que θ_s es un isomorfismo natural, entonces $\mathscr{F}$ es representado por X_0.

Proposición 1.5.4 Un funtor $\mathscr{F}: C \to \mathbf{Set}$ es representable si y sólo si $\mathbf{C}_{\mathscr{F}}$ tiene objeto terminal.

1.6. Propiedades Universales y Funtores Adjuntos.

Definición 1.6.1 — Objeto Universal. Sea $\mathscr{F}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor y $B \in \mathbf{B}$ definimos un objeto universal de B como la pareja $(U_B, j_B: B \to \mathscr{F}(U_B))$ tal que para toda pareja $(X, f: B \to \mathscr{F}(X))$ existe un único morfismo $h: U_B \to X$ en $\mathbf{A}$ tal que el siguiente diagrama conmuta



Ejercicio 1.9 — Una caracterización de objetos universales. Sea $\mathscr{F}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor y $B \in \mathbf{B}$ un objeto. Considera el funtor representable $\mathscr{S}_B := \mathscr{H}(B) \circ \mathscr{F}: \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$, es decir para todo objeto $A \in \mathbf{A}$, $\mathscr{S}_B(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(B, \mathscr{F}(A))$. Denotamos $\Psi_B: \mathbf{A}_{\mathscr{S}_B} \to \mathbf{A}$ al funtor proyección que va desde la categoría de elementos (2.3) hacia $\mathbf{A}$, es decir $\Psi_B(A,a) = A$. Prueba que son equivalentes:

1. El objeto B tiene objeto universal sobre $\mathscr{F}$.
2. El funtor Ψ_B tiene límite $L \in \mathbf{A}$ y es preservado por $\mathscr{F}$, es decir $\mathscr{F}(L) \in \mathbf{B}$ es el límite de $\mathscr{F}$.

■

Alternativamente, usando la noción de categoría coma (2.2.1), si denotamos $\mathscr{F}_B$ como la categoría $(\triangle_B \downarrow \mathscr{F})$, entonces un objeto universal en B es un objeto terminal en $\mathscr{F}_B$, obteniendo el siguiente resultado.

Proposición 1.6.1 El objeto universal de B, en caso de existir, es único salvo isomorfismos.

Dualmente tenemos el concepto del objeto co-universal de B como el objeto inicial en $\mathscr{F}^B = (\mathscr{F} \downarrow \triangle_B)$.

Teorema 1.6.2 — Caracterización de Funtores Adjuntos. Sea $\mathscr{F}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtor, entonces son equivalentes:

1. Para cada objeto $B \in \mathbf{B}$ existe el objeto universal de B.
2. Existe un funtor $\mathscr{G}: \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ y una transformación natural $\eta: \mathrm{Id}_{\mathbf{B}} \Rightarrow \mathscr{F}\mathscr{G}$ tal que $(\mathscr{G}(B), \eta_B)$ es un objeto universal del B.
3. Existe un funtor $\mathscr{G}: \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tal que para todo objeto $A \in \mathbf{A}$ y todo objeto $B \in \mathbf{B}$ existen biyecciones naturales en ambas variables:
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathscr{G}(B), A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(B, \mathscr{F}(A))$$
4. Existe un funtor $\mathscr{G}: \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tal que existen transformaciones naturales $\eta: \mathrm{Id}_{\mathbf{B}} \to \mathscr{F}\mathscr{G}$ y $\varepsilon: \mathscr{G}\mathscr{F} \to \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$ que cumplen las siguientes propiedades:
$$(\mathrm{Id}_{\mathscr{F}} * \varepsilon) \circ (\eta * \mathrm{Id}_{\mathscr{F}}) = \mathrm{Id}_{\mathscr{F}}, \ (\varepsilon * \mathrm{Id}_{\mathscr{G}}) \circ (\mathrm{Id}_{\mathscr{F}} * \eta) = \mathrm{Id}_{\mathscr{G}}$$
5. Para cada objeto $A \in \mathbf{A}$ existe el objeto couniversal de A.

Definición 1.6.2 — Funtores adjuntos. Consideremos los funtores $\mathscr{F}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ y $\mathscr{G}: \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ decimos que la pareja $(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ es una pareja de funtores adjuntos si satisface alguna de las afirmaciones equivalentes del teorema (1.6.2). En esta situación, también decimos que:

1. $\mathscr{F}$ es el adjunto izquierdo de $\mathscr{G}$.
2. $\mathscr{G}$ es el adjunto derecho de $\mathscr{F}$.

Gracias al teorema (1.5.1) tenemos que el adjunto derecho e izquierdo son únicos salvo isomorfismos.

Demostración. Del teorema (1.6.2). Para el caso $1 \Rightarrow 2$, por el axioma de elección, construimos la asignación $\mathbf{B}_0 \to \mathbf{A}_0$ donde a cada objeto B es enviado a $\mathscr{G}(B) \in \mathbf{A}_0$ con $(\mathscr{G}(B), \eta_B)$ el objeto universal de B, esta asignación es funtorial, pues si $f: B \to B'$ en $\mathbf{B}$ entonces por la definición (1.6.1), existe un único morfismo denotado $\mathscr{G}(f): \mathscr{G}(B) \to \mathscr{G}(B')$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta_B} & \mathscr{F}\mathscr{G}(B) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}\mathscr{G}(f)} \\ B' & \xrightarrow[\eta_{B'}]{} & \mathscr{F}\mathscr{G}(B') \end{array}$$

de esta manera se puede probar que $\mathscr{G}$ es un funtor, además la familia $\eta := \{\eta_B\}_{B \in \mathbf{B}}$ es una transformación universal. Para el caso $2 \Rightarrow 3$, tomemos $A \in \mathbf{A}$ y $B \in \mathbf{B}$, definimos

$$\phi_{A,B}: \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathscr{G}(B), A) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(B, \mathscr{F}A)$$

como sigue $\phi_{A,B}(f\colon \mathscr{G}(B)\to A)=\mathscr{F}(f)\circ\eta_B$. Y también definimos

$$\psi_{A,B}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(B,\mathscr{F}(A))\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathscr{G}(B),A)$$

como sigue $\psi_{A,B}(a\colon B\to\mathscr{F}(A))=h$ donde, por hipótesis, $h\colon \mathscr{G}(B)\to A$ es el único morfismo (según la definición (1.6.1) en $\mathbf{A}$ tal que $a=\mathscr{F}(h)\circ\eta_B$. Con estas dos definiciones tenemos dos transformaciones naturales y además $\phi_{A,B}$ y $\psi_{A,B}$ son inversos. Para el caso $3\Rightarrow 2$ definimos las familias

$$\eta := \{\eta_B\colon B\to\mathscr{F}\mathscr{G}(B)\}_{B\in\mathbf{B}},\ \eta_B=\phi_{\mathscr{G}(B),B}(\mathrm{Id}_{\mathscr{G}(B)})$$
$$\varepsilon := \{\varepsilon_A\colon \mathscr{G}\mathscr{F}(A)\to A\}_{A\in\mathbf{A}}.\ \varepsilon_A=\psi_{A,\mathscr{F}(A)}(\mathrm{Id}_{\mathscr{F}(A)})$$

Por la hipótesis de 2, se tiene la naturalidad de η y ε. Para el caso $4\Rightarrow 5$ tenemos que para cada $A\in\mathbf{A}$ la pareja $(\mathscr{F}(A),\varepsilon_A)$ es el objeto co-universal. Para el caso $5\Rightarrow 1$, se sigue probando que $5\Rightarrow 3$ con un razonamiento similar a la prueba de $1\Rightarrow 3$ y es fácil probar que $3\Rightarrow 1$. ■

Proposición 1.6.3 Si las siguientes parejas $(\mathscr{G},\mathscr{F})\colon \mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B}$ y $(\mathscr{K},\mathscr{H})\colon \mathbf{B}\leftrightarrow\mathbf{C}$ son parejas de funtores adjuntos entonces la pareja $(\mathscr{G}\mathscr{K},\mathscr{H}\mathscr{F})\colon \mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{C}$ es una pareja de funtores adjuntos.

Ejercicio 1.10 Probar (1.6.3) usando (1.6.2). ■

Proposición 1.6.4 Sea $(\mathscr{G},\mathscr{F})\colon \mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B}$ una pareja de funtores adjuntos con $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}\Rightarrow\mathscr{F}\mathscr{G}$ y $\varepsilon\colon \mathscr{G}\mathscr{F}\Rightarrow\mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$ sus correspondientes transformaciones naturales, entonces son equivalentes:

1. $\mathscr{F}$ es fiel y pleno.
2. ε es un isomorfismo.

Bajo estas condiciones $\eta*\mathrm{Id}_{\mathscr{F}}$ y $\mathrm{Id}_{\mathscr{G}}*\eta$ son isomorfismos naturales.

De manera dual tenemos:

Proposición 1.6.5 Sea $(\mathscr{G},\mathscr{F})\colon \mathbf{A}\leftrightarrow\mathbf{B}$ una pareja de funtores adjuntos con $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}\Rightarrow\mathscr{F}\mathscr{G}$ y $\varepsilon\colon \mathscr{G}\mathscr{F}\Rightarrow\mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$ sus correspondientes transformaciones naturales, entonces son equivalentes:

1. $\mathscr{G}$ es fiel y pleno.
2. η es un isomorfismo.

Bajo estas condiciones $\mathrm{Id}_{\mathscr{F}}*\varepsilon$ y $\varepsilon*\mathrm{Id}_{\mathscr{G}}$ son isomorfismos naturales.

Proposición 1.6.6 Sea $\mathscr{F}\colon \mathbf{A}\to\mathbf{B}$ un funtor con $\mathscr{G}$ como su adjunto izquierdo y $\mathscr{H}$ como su adjunto derecho. Si uno de estos adjuntos es fiel y pleno entonces el otro funtor adjunto tambien lo es.

Teorema 1.6.7 — Equivalencias y funtores adjuntos. Sea $\mathscr{F}\colon \mathbf{A}\to\mathbf{B}$ un funtor, entonces son equivalentes:

1. $\mathscr{F}$ es fiel y pleno y tiene un adjunto izquierdo $\mathscr{G}$ que es fiel y pleno.
2. $\mathscr{F}$ tiene adjunto izquierdo $\mathscr{G}$ tal que sus transformaciones naturales correspondientes η y ε son isomorfismos naturales. Es decir $\mathscr{F}$ es una equivalencia de categorías.
3. $\mathscr{F}$ es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo.
4. El dual de (1).
5. El dual de (2).

Capítulo 2

Construcciones categóricas.

2.1. Producto de Categorías.

Definición 2.1.1 — Producto de Categorías. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dos categorías, definimos la categoría producto $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ como sigue:

1. Los objetos son parejas (A, B) donde $A \in \mathbf{A}_0$ y $B \in \mathbf{B}_0$.
2. Un morfismo es una pareja $(f, g)\colon (A, B) \times (A', B')$ en donde $f \in \mathbf{A}_1$ y $g \in \mathbf{B}_1$.
3. La composición de morfismos está dada por la regla $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$.

Proposición 2.1.1 Hay una equivalencia de categorías

$$\mathbf{Fun}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}, \mathbf{C}) \cong \mathbf{Fun}(\mathbf{A}, \mathbf{Fun}(\mathbf{B}, \mathbf{C}))$$

2.2. Categoría Coma.

Definición 2.2.1 — Categoría Coma. Sean $\mathscr{F}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ y $\mathscr{G}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ dos funtores, definimos la categoría coma $(\mathscr{F} \downarrow \mathscr{G})$ como sigue:

1. Los objetos son ternas (A, f, B), en donde $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$ y $f\colon \mathscr{F}(A) \to \mathscr{G}(B)$ es un morfismo en $\mathbf{C}$.
2. Un morfismo de (A, f, B) a (A', f', B') es una pareja (u, v) en donde $u\colon A \to A'$ es un morfismo en $\mathbf{A}$ y $v\colon B \to B'$ es un morfismo en $\mathbf{B}$ tal que el siguiente diagrama conmuta en $\mathbf{C}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(A) & \xrightarrow{\mathscr{F}(f)} & \mathscr{F}(A') \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ \mathscr{G}(B) & \xrightarrow[\mathscr{G}(f')]{} & \mathscr{G}(B') \end{array}$$

■ **Ejemplo 2.1** El ejemplo (1.9) se puede ver como la categoría coma $(\mathrm{Id}_{\mathbf{C}} \downarrow \triangle_I)$, donde $\triangle_I\colon \mathbf{1} \to \mathbf{C}$ es el funtor constante $I \in \mathbf{C}$. ■

■ **Ejemplo 2.2** El ejemplo (1.8) se puede ver como la categoría coma $(\mathrm{Id}_{\mathbf{C}} \downarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{C}})$. ■

■ **Ejemplo 2.3 — Categoría de Elementos..** Usando la biyección natural, para todo conjunto $X \in \mathbf{Set}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{*\}, X) \cong X$$

Para cada funtor $\mathscr{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$, definimos la categoría de elementos $\mathbf{C}_{\mathscr{F}}$ como sigue:

1. Los objetos son parejas (A, a) en donde $a \in \mathscr{F}(A)$.
2. Un morfismo $f\colon (A, a) \to (B, b)$ es un morfismo $f\colon A \to B$ en $\mathbf{C}$ tal que $\mathscr{F}(f)(a) = b$.

Se puede ver que hay una equivalencia de categorías:

$$\mathbf{C}_{\mathscr{F}} \cong \left(\triangle_{\{*\}} \downarrow \mathscr{F}\right)$$

■

En la categoría coma $(\mathscr{F} \downarrow \mathscr{G})$ tenemos:

1. Dos funtores proyección $\pi_{\mathscr{F}} \colon (\mathscr{F} \downarrow \mathscr{G}) \to \mathbf{A}$ y $\pi_{\mathscr{G}} \colon (\mathscr{F} \downarrow \mathscr{G}) \to \mathbf{B}$.
2. Una transformación natural $\alpha \colon \mathscr{F} \circ \pi_{\mathscr{F}} \Rightarrow \mathscr{G} \circ \pi_{\mathscr{G}}$ definido como $\alpha_{(A,f,B)} = f$.

Proposición 2.2.1 — Propiedad universal de la categoría coma. Consideremos dos funtores $\mathscr{U} : \mathbf{D} \to \mathbf{A}$, $\mathscr{V} : \mathbf{D} \to \mathbf{B}$ y una transformación natural $\beta \colon \mathscr{F}\mathscr{U} \Rightarrow \mathscr{G}\mathscr{V}$, entonces existe un único funtor(salvo isomorfismo natural) tal que:

1. $\mathscr{U} = \pi_{\mathscr{F}}\mathscr{W}$.
2. $\mathscr{V} = \pi_{\mathscr{G}}\mathscr{W}$.
3. $\beta = \alpha * \mathrm{Id}_{\mathscr{W}}$.

Demostración. Consideremos $\mathscr{W} : \mathbf{D} \to (\mathscr{F} \downarrow \mathscr{G})$ como sigue:

1. Para cada $A \in \mathbf{D}$ lo enviamos a $(\mathscr{U}(A), \beta_A, \mathscr{V}(A))$.
2. Para cada $f \colon A \to B$ lo enviamos a $(\mathscr{U}(f), \mathscr{V}(f))$.

Es fácil ver que este funtor es único y cumple las primeras dos pripiedades. Luego, notemos que para cada $A \in \mathbf{D}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(\alpha * \mathrm{Id}_{\mathscr{W}})_A &= \alpha_{\mathscr{W}(A)} \circ (\mathscr{F}\pi_{\mathscr{F}})((\mathrm{Id}_{\mathscr{W}})_A) \\ &= \alpha_{\mathscr{W}(A)} \circ \mathrm{Id}_{\mathscr{F}\mathscr{U}(A)} = \alpha_{\mathscr{W}(A)} \\ &= \beta_A\end{aligned}$$

■

$$\begin{array}{ccc} (\mathscr{F} \downarrow \mathscr{G}) & \xrightarrow{\pi_{\mathscr{F}}} & \mathbf{A} \\ {\scriptstyle \pi_{\mathscr{G}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{F}} \\ \mathbf{B} & \xrightarrow[\mathscr{G}]{} & \mathbf{C} \end{array}$$

2.3. Límites

Definición 2.3.1 — Primera definición de límites. Sea $\beta \in \mathbf{Fun}(\mathbf{I}^{op}, \mathbf{Set})$, definimos el límite

$$\lim \beta := Nat(\triangle_{\{*\}}, \beta)$$

Proposición 2.3.1 Sea $\beta \in \mathbf{Fun}(\mathbf{I}^{op}, \mathbf{Set})$ entonces los siguientes conjuntos son canónicamente isomorfos

$$\lim \beta \cong \left\{ (x_i) \in \prod_{i \in I} \beta(i) \,|\, \forall f \colon i \to j \in \mathbf{I}_1 \; \beta(f)(x_j) = x_i \right\}$$

Demostración. Sea $h \colon \lim \beta \to \prod_{i \in I} \beta(i)$ definido como $h(\alpha) = (\alpha_i)$ en donde α_i, por abuso de notación, es la imagen de la función $\alpha_i \colon \{*\} \to \beta(i)$. Entonces si $f \colon \beta \to \hat{\beta}$ es una transformación natural de funtores $\mathbf{Fun}(\mathbf{I}^{op}, \mathbf{Set})$ entonces el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \lim \beta & \xrightarrow{h} & \prod_{i \in I} \beta(i) \\ {\scriptstyle f^* = Nat(\triangle_{\{*\}}, f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \prod f_i} \\ \lim \hat{\beta} & \xrightarrow[h]{} & \prod_{i \in I} \hat{\beta}(i) \end{array}$$

es fácil ver que h es inyectivo y su imagen es el deseado, obteniendo el isomorfismo natural. ■

Ejercicio 2.1 Probar (2.3.1). Un hint, es considerar la función para cada $i \in I$,

$$p_i \colon Nat(\triangle_{\{*\}}, \beta) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{*\}, \beta(i))$$

como $\beta(\alpha) = \alpha_i$, formando una familia de funciones y por la propiedad universal del producto en conjuntos, existe una única función $h \colon \varprojlim \beta \to \prod_{i \in I} \beta(i)$. Basta mostrar que h induce una biyección entre los conjuntos de (2.3.1). ■

Proposición 2.3.2 Sea $\beta \in \mathbf{Fun}(\mathbf{I}^{op}, \mathbf{Set})$ y $X \in \mathbf{Set}$ entonces existe un isomorfismo natural:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, \varprojlim \beta) \cong \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, \beta(-)) = \varprojlim \mathscr{H}(X) \circ \beta$$

De esta manera, cuando $\mathscr{R} \colon \mathbf{J} \to \mathbf{I}$ es un funtor y $\beta \colon \mathbf{I}^{op} \to \mathbf{Set}$ entonces por (2.3.2) tenemos una función natural

$$\varprojlim \beta \to \varprojlim(\beta \circ \mathscr{R}^{op})$$

Definición 2.3.2 — Funtor límite. Sea $\mathscr{F} \colon \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ un funtor covariante $\mathscr{U} \colon \mathbf{I}^{op} \to \mathbf{C}$ un funtor contravariante, definimos los funtores límite:

1. Inductivo como $\varinjlim \mathscr{F} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{Set})$ como el funtor que envía X a $\varprojlim \mathscr{K}(X) \circ \mathscr{F}$.
2. Proyectivo como $\varprojlim \mathscr{U} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{C}^{op}, \mathbf{Set})$ como el funtor que envia X a $\varprojlim \mathscr{H}(X) \circ \mathscr{U}$.

Más aún si estos funtores son representables, sus objetos representables serán llamados límite inductivo e límite proyectivo, respectivamente.

Definición 2.3.3 — Completitud. Sea $\mathbf{C}$ una categoría y $\mathbf{I}$ otra categoría, decimos que $\mathbf{C}$:

1. admite límites inductivos indexados por $\mathbf{I}$ si para cada funtor $\mathscr{F} \colon \mathbf{I} \to \mathbf{C}$, el funtor límite es representable.
2. admite límites proyectivos idexados por $\mathbf{I}$ si para cada funtor $\mathscr{U} \colon \mathbf{I}^{op} \to \mathbf{C}$, el funtor límite es representable.
3. es completo si admite límites proyectivos indexados por $\mathbf{I}$ para cada categoría $\mathbf{I}$ pequeña.
4. es co-completo, si admite límites inductivos indexados por $\mathbf{I}$ para cada categoría $\mathbf{I}$ pequeña.

Usando la notación de la definición (2.3.2), si $\varinjlim \mathscr{F}$ y $\varprojlim \mathscr{U}$ son representables, entonces para cada $X \in \mathbf{C}$ tenemos las biyecciones naturales:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathrm{colim}_{i \in I} \mathscr{F}, X) \cong \varprojlim \mathscr{K}(X) \circ \mathscr{F} = \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathscr{F}(i), X)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}\left(X, \varprojlim_{i \in I} \mathscr{U}\right) \cong \varprojlim \mathscr{H}(X) \circ \mathscr{U} = \varprojlim_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \mathscr{U}(i))$$

Vamos a dar una segunda descripción más practica de límites, usando una categoría coma.

Definición 2.3.4 — Categoría de Conos. Sea $\mathbf{I}$ una categoría, definimos el funtor diagonal:

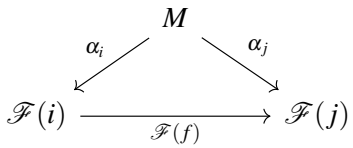
$$\triangle \colon \mathbf{C} \to \mathbf{Fun}(\mathbf{I}, \mathbf{C})$$

donde a cada objeto $X \in \mathbf{C}$ es enviado al funtor constante $\triangle_X$ y para cada morfismo $f \colon X \to Y$ a la transformación natural $\triangle_f$ que está definido como la familia $\{f\}_{i \in I}$. Para cada funtor $\mathscr{F} \colon \mathbf{I} \to \mathbf{C}$, definimos la categoría de conos de $\mathscr{F}$ como la categoría coma $\left(\triangle \downarrow \widehat{\mathscr{F}}\right)$, donde $\widehat{\mathscr{F}} \colon \{*\} \to \mathbf{Fun}(\mathbf{I}, \mathbf{C})$ es el funtor cuya imagen es $\mathscr{F}$.

Entonces un elemento de $\left(\triangle \downarrow \widehat{\mathscr{F}}\right)$ es de la forma $(\triangle_M, \alpha, \mathscr{F})$ con $M \in \mathbf{C}$ y equivalentemente consiste en una familia de morfismos

$$\{\alpha_i : M \to \mathscr{F}(i)\}_{i \in I}$$

con la propiedad de que si $f : i \to j$ es un morfismo en $\mathbf{I}$ entonces el siguiente diagrama conmuta:



Proposición 2.3.3 — Segunda definición de límite. Usando la notación de (2.3.2), si $\varprojlim \mathscr{U}$ es representable por $\lim_{i \in \mathbf{I}} \mathscr{U}$ entonces existe una familia de morfismos $p := \{p_i : \lim_{i \in I} \mathscr{U} \to \mathscr{U}(i)\}_{i \in I}$ tal que $(\lim_{i \in I} \mathscr{U}, p)$ es un objeto terminal en la categoría de conos de $\mathscr{U}$. Conversamente si la categoría de conos de $\mathscr{U}$ tiene un objeto terminal entonces el funtor $\varprojlim \mathscr{U}$ es representable por dicho objeto.

Para terminar de conciliar ambas definiciones tenemos este pequeño resultado:

Proposición 2.3.4 Sea $\beta \in \mathbf{Fun}(\mathbf{I}^{op}, \mathbf{Set})$ entonces

$$\lim \beta = \varprojlim_{i \in I} \beta$$

Proposición 2.3.5 Supongamos que $\mathbf{C}$ es completo entonces existe un funtor $\mathscr{L} : \mathbf{Fun}(\mathbf{I}, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ tal que a cada $\mathscr{U}$ es enviado a $\lim_{i \in I} \mathscr{U}$. Más aún $(\triangle, \mathscr{L})$ es una pareja de funtores adjuntos, es decir para todo $N \in \mathbf{C}$ y todo $\mathscr{U} \in \mathbf{Fun}(\mathbf{I}, \mathbf{C})$ tenemos la biyección natural:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}\left(N, \varprojlim_{i \in I} \mathscr{U}\right) \cong Nat(\triangle_N, \mathscr{F})$$

Tenemos su versión dual

Definición 2.3.5 — Categoría de Coconos. Sea $\mathscr{F} : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$, definimos la categoría de coconos de $\mathscr{F}$ como la categoría coma $\left(\widehat{\mathscr{F}} \downarrow \triangle\right)$.

Entonces de manera dual a la afirmación (2.3.3), tenemos que son equivalentes:

1. $\varinjlim \mathscr{F}$ es representable.
2. La categoría de coconos de $\mathscr{F}$ tiene objeto inicial.

Además $\mathbf{C}$ es co-completa si y sólamente si $\triangle$ tiene adjunto izquierdo.

Definición 2.3.6 — Funtores y límites. Sea $\mathscr{F} : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ decimos que $\mathscr{F}$:

1. preserva límites si para cualquier funtor $\mathscr{G} : \mathbf{J} \to \mathbf{I}$ con límite $\lim_{j \in J} \mathscr{G}$ entonces $\mathscr{F}(\lim_{j \in J} \mathscr{G})$ es el límite de $\mathscr{F}\mathscr{G}$. Tambien se le dice que $\mathscr{F}$ es continuo.
2. refleja límites si para cualquier funtor $\mathscr{G} : \mathbf{J} \to \mathbf{I}$ y cono (L, ρ) de $\mathscr{G}$ tal que $\mathscr{F}(L)$ es el límite de $\mathscr{F}\mathscr{G}$ entonces L es el límite de $\mathscr{G}$.

Proposición 2.3.6 — Límites y funtores adjuntos. Sea $(\mathscr{G}, \mathscr{F}) : \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ una pareja de funtores adjuntos entonces:

1. $\mathscr{F}$ preserva todos los límites existentes.
2. $\mathscr{G}$ preserva todos los colímites existentes.

Proposición 2.3.7 Sea $(\mathscr{G}, \mathscr{F}) : \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ una pareja de adjuntos y $\mathbf{C}$ una categoría pequeña, entonces $(\mathscr{G}^*, \mathscr{F}^*) : \mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{A}) \leftrightarrow \mathbf{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{B})$ es una pareja de adjuntos.

Corolario 2.3.8 Sea $\mathscr{F}\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ una equivalencia de categorías, si $\mathbf{A}$ es completo entonces $\mathbf{B}$ también lo es.

2.4. Cálculo de límites en algunas categorías.

2.4.1. Algunos límites importantes.

En esta sección vamos a presentar algunos límites y co-límites importantes y como se describen sus propiedades universales.

Productos y Coproductos. Consideremos I un conjunto, visto como categoría discreta (1.7) lo denotaremos como $\mathbf{I}$, para cada funtor $\mathscr{F}\colon \mathbf{I} \to \mathbf{C}$, denotamos $X_i := \mathscr{F}(i)$ para cada $i \in I$, y el funtor induce a una familia de objetos $\{X_i\}_{i\in I}$ cuyo límite es el producto categórico de la familia y colímite es el coproducto categórico de la familia.

Definición 2.4.1 — Producto y Coproducto. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos en $\mathbf{C}$, definimos:

1. El producto de la familia como la pareja $(P, \{\pi_i\colon P \to X_i\}_{i\in I})$ que consiste en un objeto P y una familia de morfismos en $\mathbf{C}$ tal que para otra pareja $(E, \{f_i\colon E \to X_i\}_{i\in I})$ existe un único morfismo $h\colon P \to E$ tal que para toda $i \in I$ se cumple:
$$f_i = h \circ \pi_i$$
2. El coproducto de la familia como la pareja $(Q, \{u_i\colon X_i \to Q\}_{i\in \mathbf{I}})$ tal que para cada pareja $(F, \{g_i\colon X_i \to F\})_{i\in I}$ existe un único morfismo $h\colon F \to Q$ tal que para toda $i \in I$ se cumple:
$$g_i = u_i \circ h$$

Igualadores y co-igualadores. Consideremos $\mathbf{I}$ como la siguiente categoría:

1. Objetos de $\mathbf{I}$: $\{A, B\}$.
2. Morfismos de $\mathbf{I}$: $\{f\colon A \to B, g\colon A \to B, \mathrm{Id}_A, \mathrm{Id}_B\}$.

y sea $\mathscr{I}\colon \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ un funtor. Por abuso de notación, denotamos $X = \mathscr{F}(X)$, para cada objeto y morfismo X en $\mathbf{I}$. Definimos los igualadores y co-igualadores de $f, g \in \mathbf{C}$ como el límite y colímite de $\mathscr{F}$ respectivamente.

Definición 2.4.2 — Igualadores y Coigualadores. Dados dos morfismos $f, g\colon A \to B$ en $\mathbf{C}$, definimos:

1. El igualador de f, g como la pareja (E, i_E) en donde $E \in \mathbf{C}$ y $i_E\colon E \to A$ es un $\mathbf{C}$-morfismo tal que:
$$f \circ i_E = g \circ i_E$$
con la propiedad de que para toda pareja (M, μ) con $\mu\colon M \to A$ y con la propiedad de $f \circ \mu = g \circ \mu$, entonces existe un único morfismo $h\colon M \to E$ tal que:
$$\mu = i_E \circ h$$
2. El coigualador de f, g como la pareja (Q, q_Q) en donde $Q \in \mathbf{C}$ y $q_Q\colon B \to Q$ es un $\mathbf{C}$-morfismo tal que:
$$q_Q \circ f = q_Q \circ g$$

con la propiedad de que para toda pareja (N,ν) con $\nu\colon B\to N$ y $\nu\circ f=\nu\circ g$, entonces existe un único morfismo $h\colon Q\to N$ tal que:

$$\nu = h\circ q_Q$$

Producto fibrado y suma fibrada. Consideremos $\mathbf{I}$ como la siguiente categoría:

1. Objetos de $\mathbf{I}$:$\{A,B,C\}$.
2. Morfismos de $\mathbf{I}$: $\{\mathrm{Id}_A,\mathrm{Id}_B,\mathrm{Id}_C,f\colon A\to C,g\colon B\to C\}$.

Consideremos el funtor $\mathscr{F}\colon \mathbf{I}\to\mathbf{C}$ y como el caso anterior, denotamos $X=\mathscr{F}(X)$ para cada objeto y morfismos en $\mathbf{I}$. Definimos el producto fibrado.

Definición 2.4.3 — Producto fibrado. El producto fibrado de $f\colon A\to C$ y $g\colon B\to C$ es la pareja $(P,\{\pi_f\colon P\to A,\pi_g\colon P\to B\})$ tal que:

$$f\circ\pi_f = g\circ\pi_g$$

y con la propiedad de que para toda pareja $(M,\mu\colon M\to A,\nu\colon M\to B)$ que satisface $f\circ\mu=g\circ\nu$, entonces existe un único morfismo $h\colon N\to P$ tal que:

Límite proyectivo y limite directo clásico.

2.4.2. Sobre la categoría coma

Proposición 2.4.1 Sea $\mathscr{F}\colon\mathbf{A}\to\mathbf{C}$ un funtor y $\mathscr{G}\colon\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ un funtor continuo, y supongamos que $\mathbf{C}$ es completa entonces la categoría coma $(\mathscr{F}\downarrow\mathscr{G})$ es completa.

Demostración. Consideremos $\mathscr{H}\colon\mathbf{I}\to(\mathscr{F}\downarrow\mathscr{G})$, y denotemos $\mathscr{H}(i)=(A_i,f_i,B_i)$, entonces tenemos para cada $i\in I$ el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{F}(\lim\pi_{\mathscr{F}}\mathscr{H}) & \xrightarrow{\mathscr{F}p_i} & \mathscr{F}(A_i) \\
{\scriptstyle \lim\mathscr{H}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_i} \\
\mathscr{G}(\lim\pi_{\mathscr{G}}\mathscr{H}) & \xrightarrow{\mathscr{G}(q_i)} & \mathscr{G}(B_i)
\end{array}$$

Entonces el fácil ver que

$$\lim\mathscr{H} = (\lim\pi_{\mathscr{F}}\mathscr{H},\lim\mathscr{H},\lim\pi_{\mathscr{G}}\mathscr{H})$$

con $\{(p_i,q_i)\}_{i\in\mathbf{I}}$ como los morfismos canónicos. ■

2.4.3. Sobre la categoría de Funtores

Consideremos $\mathbf{C}$ una categoria y $\mathbf{I}$ una categoría pequeña. Nuestro primer objetivo es construir el límite de funtores. Si fijamos $\mathbf{D}$ otra categoría pequeña y sea $\mathscr{H}\colon\mathbf{D}\to\mathbf{Fun}(\mathbf{I},\mathbf{C})$ un funtor, para cada $i\in\mathbf{I}$ fija albitraria tenemos un funtor:

$$\mathbf{D}\xrightarrow{\mathscr{H}^{(i)}}\mathbf{C}$$

$$\begin{array}{ccc}
d & \dashrightarrow & \mathscr{H}_d(i) \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{H}(f)_i} \\
d' & \dashrightarrow & \mathscr{H}_{d'}(i)
\end{array}$$

Si $\mathbf{C}$ es completo, es decir, admite límites, para el funtor $\mathscr{H}^{(i)}\colon \mathbf{D}\to\mathbf{C}$ tenemos un límite denotado como $(\lim_{d\in D}\mathscr{H}^{(i)},\{\rho_d^{(i)}\}_{d\in\mathbf{D}})$. Con esto en mente, definimos el funtor límite como sigue:

$$\mathbf{I}\xrightarrow{\lim_{d\in D}\mathscr{H}}\mathbf{C}$$

$$\begin{array}{ccc} i & \dashrightarrow & \lim_{d\in D}\mathscr{H}^{(i)} \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lim\mathscr{H}(\phi)} \\ i' & \dashrightarrow & \lim_{d\in D}\mathscr{H}^{(i')} \end{array}$$

En donde $\lim\mathscr{H}(\phi)$ es el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama para toda $d\in D$:

$$\begin{array}{ccc} \lim_{d\in D}\mathscr{H}^{(i)} & \xrightarrow{\lim\mathscr{H}(\phi)} & \lim_{d\in D}\mathscr{H}^{(i')} \\ {\scriptstyle\rho_d^{(i)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho_d^{(i')}} \\ \mathscr{H}_d(i) & \xrightarrow[\mathscr{H}_d(\phi)]{} & \mathscr{H}_d(i') \end{array}$$

Y para cada $d\in\mathbf{D}$ se tiene que la familia de morfismos $\{\rho_d^{(i)}\colon \lim_{d\in D}\mathscr{H}^{(i)}\to\mathscr{H}_d(i)\}_{i\in I}$ es una transformación natural denotada como $\rho_d\colon \lim_{d\in D}\mathscr{H}\to\mathscr{H}_d$.

Proposición 2.4.2 — Límites en la categoría de funtores. La pareja $(\lim_{d\in D}\mathscr{H},\{\rho_d\}_{d\in D})$ es el límite de $\mathscr{H}$. Concluyendo que cuando $\mathbf{C}$ es completa, entonces $\mathbf{Fun}(\mathbf{I},\mathbf{C})$ es completa.

De manera dual, se puede construir el colímite de funtores. Concluyendo que si $\mathbf{C}$ es cocompleta entonces $\mathbf{Fun}(\mathbf{I},\mathbf{C})$ es cocompleta.

2.5. Existencia de Límites.

Teorema 2.5.1 — Teorema de Completitud en Categorías. Sea $\mathbf{C}$ una categoría, entonces $\mathbf{C}$ es completa si y sólo si $\mathbf{C}$ admite igualadores y productos albitrarios.

Definición 2.5.1 — Funtores continuos y cocontinuos. Sea $\mathscr{F}\colon\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ un funtor, decimos que:

1. $\mathscr{F}$ es continuo si para cada $\mathscr{H}\colon\mathbf{I}\to\mathbf{A}$ funtor con límite $(L,\{p_i\}_{i\in I})$ entonces $(\mathscr{F}(L),\{\mathscr{F}p_i\})$ es el límite de $\mathscr{F}\mathscr{H}$.
2. Es cocontinuo si preserva colímites.
3. $\mathscr{F}$ refleja los límites si para cada $\mathscr{H}\colon\mathbf{I}\to\mathbf{A}$ funtor existe un cono $(L,\{p_i\}_{i\in I})$ tal que $(\mathscr{F}(L),\{\mathscr{F}p_i\})$ es el límite de $\mathscr{F}\mathscr{H}$ entonces L es el límite de $\mathscr{H}$.

Proposición 2.5.2 Si $\mathscr{F}\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ preserva pullbacks entonces tambien preserva monomorfismos.

Proposición 2.5.3 El funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C,-)$ preserva los límites.

Proposición 2.5.4 Si $\mathscr{F}\colon\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ preserva limites , $\mathbf{A}$ es completa y $\mathscr{F}$ refleja isomorfismos entonces $\mathscr{F}$ refleja límites.

Proposición 2.5.5 Un funtor fiel y pleno refleja límites.

2.6. Conmutatividad de límites.

Proposición 2.6.1 Sea $\mathscr{F} : \mathbf{C} \times \mathbf{D} \to \mathbf{A}$ un funtor con $\mathbf{A}$ completa, entonces:

$$\lim_{C \in \mathbf{C}} \lim_{D \in \mathbf{D}} \mathscr{F}(C,D) \cong \lim_{D \in \mathbf{D}} \lim_{C \in \mathbf{D}} \mathscr{F}(C,D)$$

2.7. Subobjetos e Imágenes. Sistemas de Factorización.

2.8. Subcategorías Reflectivas.

2.9. Localización de Categorías

Capítulo 3

Categorías con estructura

3.1. Categorías con Cero y categorias semiaditivas.

3.2. Categorías Regulares y Exactas.

3.3. Categorías Aditivas y Abelianas.

Capítulo 4

Categorías monoidales.

Bibliografía

[FIS14] Stephen H Friedberg, Arnold J Insel y Lawrence E Spence. *Linear algebra*. Volumen 4. Pearson Essex, NJ, USA, 2014 (véase página 10).