GUÍA: "Las matemáticas volvieron… en forma de Olimpiadas"

Prof. Vicente Araya

I.- ¿Por qué decidieron hacer esto?

Desde este momento en adelante, ustedes, los lectores de este documento serán parte de un camino arduo, espinoso, complejo, pero sin dudas ampliamente satisfactorio y realizador como lo es el aprender matemática al más alto nivel, fijando como objetivo incrementar el conocimiento matemático, tanto como sea posible. Para ello, se explicarán contenidos variados (en algunas ocasiones también dispersos) que serán las herramientas útiles para enfrentas los problemas que se encontrarán al final de cada documento, los cuales serán extraídos directamente de olimpiadas matemáticas realizadas a nivel nacional (Chile) como internacional.

II. LOS CALCETINES, LUEGO EL ZAPATO: MODELACIÓN MATEMÁTICA

Uno de los errores más frecuentes al enfrentar un problema matemático complejo consiste en comenzar a calcular demasiado pronto. Esta tendencia suele nacer de una intuición escolar comprensible: si el problema contiene números, entonces la tarea consiste en operar con ellos. Sin embargo, en matemáticas de nivel olímpico, los números rara vez constituyen el problema central. En muchos casos, son simplemente la superficie visible de una estructura mucho más profunda. **Antes de calcular, debe comprenderse qué fenómeno matemático se está describiendo**, dicho proceso recibe el nombre de **modelación matemática**. Cuando un problema se presenta en lenguaje cotidiano —ya sea mediante una historia, una figura geométrica, una secuencia o una situación abstracta— el matemático debe traducir esa narrativa a un objeto manipulable: relaciones, estructuras, variables, restricciones o patrones. En otras palabras, modelar consiste en responder una pregunta esencial:

¿Qué estructura matemática está escondida detrás del lenguaje del problema?

Una vez descubrimos la estructura matemática, luego debemos seguir la lógica de dicha modelación. Toda matemática formal depende de relaciones lógicas, cada vez que inferimos una consecuencia a partir de una condición, estamos razonando lógicamente, cada vez que descartamos una posibilidad incompatible con una restricción, estamos razonando lógicamente. En formación olímpica, esto se vuelve especialmente relevante porque muchos problemas no se resuelven calculando, sino deduciendo.

III. COMBINATORIA: EL ARTE DE CONTAR ESTRUCTURAS

Existe una idea muy extendida en matemáticas escolares según la cual contar consiste simplemente en enumerar elementos uno por uno hasta obtener una cantidad final, en matemática avanzada, esa visión resulta insuficiente, pues muchos problemas contienen demasiadas posibilidades como para revisarlas individualmente. En esos casos, el desafío no consiste en contar objetos aislados, sino en comprender la estructura que organiza esas posibilidades. Ese territorio corresponde a la **combinatoria**.

La combinatoria estudia configuraciones posibles bajo determinadas reglas. Su pregunta fundamental no es: **"¿cuántos objetos hay?"** sino más bien: **"¿de cuántas formas distintas puede organizarse una situación?"** Por eso la combinatoria exige una forma de pensamiento distinta a la aritmética tradicional, ya que aquí no siempre se calcula directamente, sino que muchas veces se construye, se clasifica, se agrupa o se descarta.

Ya que no todas las configuraciones matemáticas son equivalentes, pues en algunos contextos, intercambiar dos elementos no altera la situación, mientras que en otros, cambia completamente su significado. Para resumir el cómo obtener cada valor según nos interese, se presenta la siguiente tabla.

Concepto	Fórmula / Relación	Qué representa	Cuándo usarla
Permutaciones simples	$P(n) = n!$	Número de ordenamientos de (n) elementos distintos	Cuando importa completamente el orden
Permutaciones parciales	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	Número de formas de ordenar (r) elementos tomados de (n)	Cuando se ordena solo una parte
Combinaciones	$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	Selección sin importar orden	Cuando solo interesa elegir

IV. SISTEMAS DE ECUACIONES: PENSAR RELACIONES INTERDEPENDIENTES

Una sola ecuación describe una relación, mientras que unn sistema describe una red de relaciones simultáneas, que naturalmente, trabajan con las mismas variables. En muchos problemas, ninguna condición individual contiene toda la información necesaria, de forma que cada pieza aporta solo una perspectiva parcial, así la solución emerge precisamente al hacer convivir todas esas restricciones al mismo tiempo, esto obliga a pensar estructuralmente.
Ya no se trata de resolver una ecuación aislada, sino de comprender cómo varias relaciones interactúan entre sí.

Para adquirir la capacidad de resolver sistemas de ecuaciones solo debemos percatarnos que con la variadas ecuaciones y variables existentes podemos, por ejemplo, encontrar el valor de la variable 1 (v1) en la ecuación 1, en función de una v2. Dicho valor lo puedo reemplazar a posteriori en la ecuación 2. Este mismo principio debo utilizarlo para resolver cualquier sistema de ecuaciones.

V. RESTRICCIONES EN LAS SOLUCIONES: INTERPRETAR CORRECTAMENTE EL ENUNCIADO

No toda solución algebraica tiene sentido, En muchos problemas, el universo permitido no incluye cualquier número real, por ejemplo, cuando se trabaja con conteos, distribuciones o repeticiones, aparecen restricciones naturales, las cantidades suelen pertenecer a los enteros y muchas veces, además solo enteros positivos, esto cambia profundamente el problema y su solución, resolver una ecuación sobre los reales puede ser sencillo, resolverla bajo restricciones discretas puede requerir razonamiento adicional.

Aquí aparece una conexión muy rica entre álgebra y matemática discreta, la solución ya no depende solo del cálculo formal, sino también de interpretar qué respuestas son estructuralmente posibles, este tipo de validación es esencial en problemas matemáticos, en especial en combinatoria.

VI. NO TODO DIBUJO ES UNA FIGURA: GEOMETRÍA

Uno de los errores más frecuentes al enfrentar problemas geométricos consiste en asumir que la figura entregada representa simplemente una ilustración del problema. En matemáticas olímpicas, una figura rara vez cumple una función decorativa. Cada segmento, cada marca angular, cada paralelismo insinuado o cada simetría visual suele contener información estructural, por ello, el primer cambio mental importante consiste en dejar de "mirar el dibujo" y comenzar a **leerlo matemáticamente**.

La mayoría de los problemas geométricos olímpicos se desarrollan dentro del marco de la geometría euclidiana.
Este es el sistema geométrico clásico construido sobre conceptos fundamentales como:

- punto,
- recta,
- plano,
- distancia,
- ángulo,
- paralelismo,

- perpendicularidad.

Sin embargo, lo verdaderamente importante no es memorizar definiciones, es comprender cómo interactúan estas entidades, la geometría euclidiana funciona como una red lógica, raramente una propiedad aparece sola, pues una perpendicularidad puede generar congruencias, un paralelismo puede inducir igualdad angular, una simetría puede revelar distancias equivalentes. No basta reconocer objetos geométricos. Hay que comprender qué consecuencias producen.

VI.I. POLÍGONOS REGULARES: ESTRUCTURA Y REPETICIÓN

Un polígono regular es una figura con una característica profundamente poderosa, pues no se trata simplemente de una figura con lados iguales, si no que su regularidad implica simultáneamente:

- igualdad de lados,
- igualdad angular,
- simetrías internas,
- periodicidad estructural,
- invariancia bajo ciertas rotaciones.

Esto convierte a los polígonos regulares en herramientas extremadamente fértiles para resolución geométrica, cuando aparece una figura regular, rara vez es casual.

VI.II. HEXÁGONOS REGULARES: UNA FIGURA ESPECIAL

Dentro de los polígonos regulares, el hexágono ocupa una posición especialmente importante. Esto ocurre porque posee una relación geométrica extraordinariamente conveniente con triángulos equiláteros. Eso facilita transformar figuras aparentemente complejas en configuraciones mucho más manejables.

El hexágono también posee:

- múltiples ejes de simetría,
- relaciones diagonales particularmente elegantes,
- paralelismos estructurales evidentes,
- subdivisiones naturales en regiones equivalentes.

En geometría olímpica, algunas figuras aparecen recurrentemente precisamente porque ofrecen atajos estructurales.

VI.III. PERPENDICULARIDAD: RESTRICCIÓN DIRECCIONAL

Cuando dos rectas son perpendiculares, no solo forman noventa grados, si no que se nos entrega una cantidad más que relevante de información, pues.

La perpendicularidad suele permitir:

- generar triángulos rectángulos,
- activar teoremas métricos,
- construir relaciones ortogonales,
- inducir proyecciones útiles,
- **reorganizar trayectorias (medir desplazamientos).**

En muchos problemas, una simple marca de ángulo recto contiene mucha más información de la que parece.

FÓRMULAS IMPORTANTES — GEOMETRÍA OLÍMPICA

(Esto complementa la parte conceptual.)

Ángulos

Suma de ángulos interiores de un polígono

$$(n-2)\cdot 180^\circ$$

Ángulo interior de polígono regular

$$\frac{(n-2)180^\circ}{n}$$

Ángulo exterior de polígono regular

$$\frac{360^\circ}{n}$$

Triángulos
Suma angular

$$180^\circ$$

Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hexágono regular
Diagonal mayor

$$2L$$

Áreas útiles
Triángulo

$$A = \frac{bh}{2}$$

Equilátero

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Polígono regular

$$A = \frac{P \cdot ap}{2}$$

VII. NO SON NÚMEROS AISLADOS: SON ESTRUCTURAS ARITMÉTICAS

Uno de los errores más frecuentes al abordar problemas aritméticos consiste en interpretar los números como objetos independientes, dicho enfoque funciona razonablemente bien en aritmética elemental, donde muchas tareas consisten en operar cantidades concretas, sin embargo, en matemáticas olímpicas, rara vez importa un número individual por sí mismo. Lo que realmente interesa es el patrón al que pertenece, su comportamiento estructural, sus relaciones con otros números, su posición dentro de un sistema de regularidades. Por eso, el cambio mental fundamental consiste en dejar de pensar: **"¿qué número es este?"** y comenzar a pensar: **"¿qué propiedades estructurales tiene este número?"**

VII.I. PARIDAD: LA FORMA MÁS SIMPLE DE ESTRUCTURA

La paridad constituye probablemente la herramienta más elemental y, al mismo tiempo, una de las más poderosas. Clasifica enteros en solo dos categorías:

- pares,
- impares.

Esta simplicidad es precisamente su fortaleza, reducir un universo complejo a dos clases permite detectar rápidamente imposibilidades y restricciones. Problemas aparentemente sofisticados colapsan cuando se analiza correctamente la paridad, porque la paridad no describe solo una propiedad superficial, determina comportamiento algebraico.

Por ejemplo:

- suma de pares,
- suma de impares,
- producto entre distintas clases,
- restricciones sobre cuadrados,
- imposibilidades en ecuaciones enteras.

Es una herramienta de descarte extremadamente eficiente.

VII. ARITMÉTICA MODULAR: CAMBIAR EL LENGUAJE DEL PROBLEMA

La aritmética modular es una de las herramientas más poderosas y recurrentes en olimpiadas.
Su idea fundamental consiste en clasificar números según el residuo que dejan al dividirse por un valor fijo, Esto puede parecer inicialmente una técnica artificial, pero en realidad representa un cambio extraordinariamente profundo de perspectiva. En vez de trabajar con números exactos, trabajamos con clases de comportamiento.

La modularidad permite:

- detectar periodicidad,
- construir contradicciones,
- descartar soluciones,
- demostrar imposibilidades,
- estudiar divisibilidad estructural.

Es una herramienta indispensable.

XI. FACTORIZACIÓN COMO REVELACIÓN ESTRUCTURAL

Factorizar no es simplemente reescribir expresiones, es revelar estructura oculta. una expresión aparentemente complicada puede transformarse radicalmente al exponerse como producto.

Esto permite:

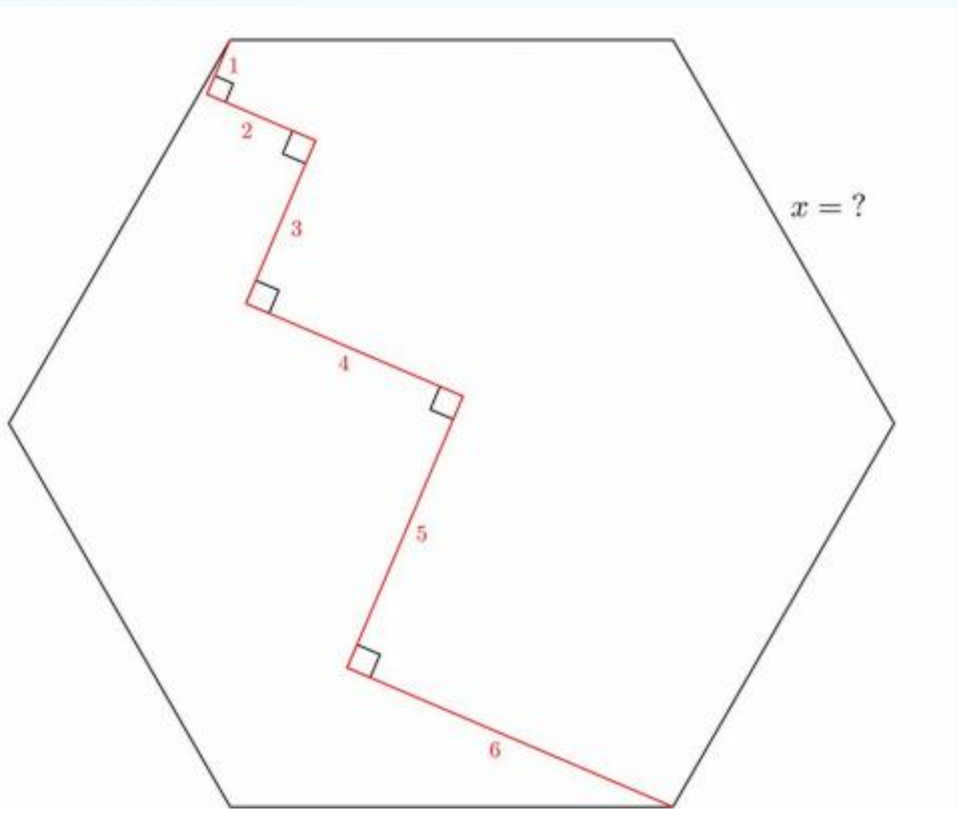
- detectar divisibilidad,
- aislar restricciones,
- construir contradicciones,
- simplificar relaciones.

Muchos problemas olímpicos dependen precisamente de descubrir la factorización correcta. por eso factorizar debe entenderse como herramienta conceptual, no solo técnica algebraica.

<u>VII ACTIVIDAD:</u> Aplica lo enseñado en esta guía y resuelve los siguientes problemas

<u>1)</u>

En la figura, los ángulos marcados son rectos, y el hexágono considerado es regular. ¿Cuánto mide su lado?



2) Demuestre que el teorema de Pitágoras siempre se cumple para

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2.$$

3) Lala, Flor Bovina y Patana han competido corriendo 20 veces. Cada vez que lo hicieron anotaron su orden de llegada. No hubo ningún empate y llegaron en todos los órdenes posibles. Lala llegó antes que Flor Bovina 12 veces, Flor Bovina antes que Patana 11 veces, y Patana antes que Lala 14 veces. ¿Cuántas carreras ganó cada una?

4) ¿Cuál es la cantidad máxima de números primos que puede haber entre 20 números consecutivos? ¿Para qué secuencia(s) se logra esta cantidad?