Variables aléatoires discrètes

1 Lois usuelles

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, 20]\!]$. Déterminer la loi de $Y = \left\lfloor \sqrt{X} \right\rfloor$.

Exercice 2 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in [\![0, n]\!]$ la probabilité $P(X = k)$ est-elle maximale ?

Exercice 3 Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On effectue $n \in \mathbb{N}^*$ tirages avec remise. Soit X le nombre de jetons tirés qui portent un numéro multiple de 3.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X.
2. Déterminer l'espérance de $(-1)^X$.
3. Calculer la probabilité que X soit pair.

Exercice 4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer $P(X \neq Y)$.

Exercice 5 Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X_n suivant la loi $\mathscr{B}(n, p_n)$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\lambda^k}{k\,!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

Exercice 6 Un puce se déplace sur l'axe des abscisses à partir de l'origine. À chaque seconde, elle saute d'une unité vers la droite avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou vers la gauche avec une probabilité $1 - p$. Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n le nombre de sauts vers la droite effectués et X_n la position de la puce après n secondes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la loi de Y_n.
2. Donner le lien entre Y_n et X_n. En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.
3. Pour quelles valeurs de p la variable X_n est-elle centrée ?

Exercice 7 Soit N un entier supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard un nombre entier X dans l'intervalle $[\![1, N]\!]$ puis un nombre entier Y dans l'intervalle $[\![1, X]\!]$.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi et l'espérance de Y.
3. Calculer la covariance du couple (X, Y). En utilisant deux méthodes différentes, étudier l'indépendance des variables aléatoires X et Y.

Exercice 8 Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1[$ et $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{X + 1}$.

Exercice 9 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{X(X + 1)}$.

2 Calculs de lois

Exercice 10 Soient X, Y et Z trois variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Calculer $P(X + Y = Z)$.

Exercice 11

1. Montrer que, pour tout $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q \leqslant r$, on a :

$$\sum_{k=q}^{r} \binom{k}{q} = \binom{r+1}{q+1}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On les tire une à une et sans remise. Soit X la variable aléatoire réelle égale au rang de la première boule blanche obtenue.
   (a) Démontrer que la loi de X est donnée par :

$$\forall k \in X(\Omega), \qquad \mathrm{P}(X = k) = n\frac{n\,!\,(2n - k)\,!}{(n - k + 1)\,!\,(2n)\,!}$$

   (b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire $2n + 1 - X$ à l'aide du changement d'indice $k = 2n + 1 - i$. En déduire l'espérance de X.

Exercice 12 Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire simultanément un échantillon de n boules de l'urne (où $1 < n < N$). Soit X le plus grand des numéros des boules de cet échantillon et Y le plus petit.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. On pose $Z = N+1-X$. Montrer que les variables aléatoires Y et Z suivent la même loi.
3. Démontrer que :
$$\sum_{i=n}^{N} \binom{i}{n} = \binom{N+1}{n+1}$$
4. En déduire les espérances des variables aléatoires X et Y.

Exercice 13 (loi trinomiale) Soient $(p,q,r) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tel que $p+q+r=1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le vecteur aléatoire $Y_n = (U_n, V_n)$ dont la loi conjointe, appelée *loi trinomiale*, est définie comme suit. Pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leqslant k+\ell \leqslant n$, on a :
$$\mathrm{P}(Y_n = (k,\ell)) = \frac{n\,!}{k\,!\,\ell\,!\,(n-k-\ell)\,!} p^k q^\ell r^{n-k-\ell}$$
et, si la condition $0 \leqslant k+\ell \leqslant n$ n'est pas satisfaite, on a $\mathrm{P}(Y_n = (k,\ell)) = 0$.

1. Démontrer que les lois marginales de Y_n sont des lois binomiales à préciser.
2. Les variables aléatoires U_n et V_n sont-elles indépendantes ? Justifier.
3. (a) Déterminer la loi de $W_n = U_n + V_n$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Cov}(U_n, V_n) = -npq$. Que peut-on en déduire ?
4. Soit $\ell \in [\![0,n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de U_n sachant $(V_n = \ell)$.

Exercice 14 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On pose :
$$Y = \min(X_1, X_2) \qquad \text{et} \qquad Z = \max(X_1, X_2)$$

1. Déterminer les lois de Y et Z.
2. Calculer leurs espérances et variances.
3. Déterminer des équivalents simples de $E(Y)$, $E(Z)$, $V(Y)$ et $V(Z)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Une secrétaire effectue n appels vers n correspondants distincts. À chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est de $\frac{1}{3}$. On note X le nombre de clients obtenus. Après ces n recherches, la secrétaire rappelle une deuxième fois chacun des $n-X$ clients qu'elle n'a pas obtenu la première fois. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus lors de la deuxième série d'appels, et Z le nombre total de correspondants obtenus au cours des deux séries d'appels, c'est-à-dire $Z = X+Y$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.
2. Soit $i \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = i)$.
3. Montrer que Z suit une loi binomiale de paramètres à déterminer.
4. Déterminer la loi de Y.

Exercice 16 (fonction génératrice) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (d'univers image fini). On définit la fonction polynomiale G_X par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$$

1. (a) Que vaut $G_X(1)$?
   (b) Montrer que $E(X) = G'_X(1)$.
   (c) Montrer que $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.
2. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, d'univers image fini et indépendante de X. Montrer que $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
3. Déterminer une expression factorisée de G_X lorsque X suit une loi binomiale. Retrouver la valeur de l'espérance et de la variance de X à l'aide de ce qui précède.

Exercice 17 Soient $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $k \in [\![2,n]\!]$. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire k jetons avec remise et on note X (respectivement Y) la variable aléatoire réelle égale au plus petit (respectivement plus grand) des numéros obtenus.

1. (a) Soit Z une variable aléatoire (quelconque) d'univers image égal à $[\![1,n]\!]$. Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a l'égalité $\mathrm{P}(Z=k) = \mathrm{P}(Z \geqslant k) - \mathrm{P}(Z \geqslant k+1)$.
   (b) Déterminer la loi de X.
2. Montrer que $n^k E(X) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^k$ puis déterminer un équivalent de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Déterminer la loi de Y et montrer que X et $n+1-Y$ suivent la même loi.
4. En déduire un équivalent de l'espérance de Y quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18 Soit $(b,n,r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Une urne contient b boules blanches, n boules noires et r boules rouges. Un joueur tire une boule.

— Si elle est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage (avant le deuxième tirage, il reste donc $r-1$ boules rouges dans l'urne).

— Dans ce dernier cas, si la deuxième boule tirée est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un troisième tirage.

— *etc.*

1. Pour tout entier naturel i non nul, on note B_i (respectivement N_i, R_i) l'événement : « le joueur tire une boule blanche (respectivement noire, rouge) lors du i^{e} tirage ». On note aussi G_r l'événement : « le joueur gagne en commençant ses tirages dans une urne contenant r boules rouges ».
   (a) Calculer $\mathrm{P}(G_0)$ et $\mathrm{P}(G_1)$.
   (b) Trouver une relation entre $\mathrm{P}(G_r)$ et $\mathrm{P}(G_{r-1})$.
   (c) Calculer $\mathrm{P}(G_r)$.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie s'achève (sur une victoire ou une défaite), l'urne contenant initialement 2 boules rouges. Déterminer la loi de X.

3 Inégalités probabilistes

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Déterminer une valeur de n pour que la fréquence d'apparition de *face* soit comprise entre $0,45$ et $0,55$ avec une probabilité au moins égale à $0,9$.

Exercice 20 Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue $p \in]0,1[$ est défectueuse et on souhaite avoir une estimation de p. On effectue un prélèvement de $n \in \mathbb{N}^*$ pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que $\dfrac{X_n}{n}$ approche p.

1. Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.
2. Démontrer que :
$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$
3. En déduire une condition sur n pour que $\dfrac{X_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à $0,95$.