

TRIGONOMETRIE

(corrigés)

Exercice 1

1. On a $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ donc, en utilisant la formule d'addition du cosinus :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

d'où :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

d'où :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

On a donc :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

2. On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 - 1$$

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$ donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

On a $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$ donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

On en déduit que :

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$$

Exercice 2

On note $\mathcal{S}$ les ensembles de solutions. On trouve :

- $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$
- $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$
- $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

Exercice 3

On note $\mathcal{S}$ chaque ensemble de solutions.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\cos(2x) = \sin(x) &\iff 1 - 2\sin(x)^2 = \sin(x) \\ &\iff 2\sin(x)^2 + \sin(x) - 1 = 0 \\ &\iff \sin(x) = -1 \text{ ou } \sin(x) = \frac{1}{2} \\ &\iff x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathcal{S} = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$$

2. Le domaine de validité de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. On a :

$$\begin{aligned} \cos(x) + \sin(x) = 1 + \tan(x) &\iff \cos(x) + \sin(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &\iff \cos(x) - 1 + \sin(x) \left(\frac{\cos(x) - 1}{\cos(x)} \right) = 0 \\ &\iff (\cos(x) - 1) \left(1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right) = 0 \\ &\iff \cos(x) = 1 \text{ ou } \tan(x) = -1 \\ &\iff x \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } x \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

donc (les solutions obtenues appartiennent à $\mathcal{D}_{\tan}$) :

$$\mathcal{S} = 2\pi\mathbb{Z} \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right)$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \sin(x) + \sin(2x) = 0 &\iff \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0 \\ &\iff \sin(x)(1 + 2\cos(x)) = 0 \\ &\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2} \\ &\iff x \in \pi\mathbb{Z} \text{ ou } x \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \pi\mathbb{Z} \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$$

4. Le domaine de validité de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$. On a (d'après la formule de duplication de la tangente, qui s'applique car $\tan(x)^2 \neq 1$) :

$$\begin{aligned} \tan(2x) = 3\tan(x) &\iff \frac{2\tan(x)}{1 - \tan(x)^2} = 3\tan(x) \\ &\iff \tan(x) \left(\frac{2}{1 - \tan(x)^2} - 3 \right) = 0 \\ &\iff \tan(x) = 0 \text{ ou } \tan(x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &\iff x \in \pi\mathbb{Z} \text{ ou } x \in -\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z} \text{ ou } x \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \pi\mathbb{Z} \cup \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)$$

5. fait en TD

6. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. On a :

$$\begin{aligned} 3\tan(x) = 2\cos(x) &\iff 3\sin(x) = 2\cos(x)^2 \\ &\iff 3\sin(x) = 2 - 2\sin(x)^2 \\ &\iff 2\sin(x)^2 + 3\sin(x) - 2 = 0 \\ &\iff \sin(x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin(x) = -2 \text{ (impossible)} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\mathcal{S} = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$$

7. Fait en TD

- 8.

9. Fait en TD

10. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \cos(2x) + \sin(2x) &= \sqrt{2} \left(\cos(2x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(2x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \cos(2x) + \sin(2x) > \sqrt{\frac{3}{2}} &\iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x - \frac{\pi}{4} \in \left] -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right[\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2x \in \left] \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \right[\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x \in \left] \frac{\pi}{24} + k\pi, \frac{5\pi}{24} + k\pi \right[\end{aligned}$$

et donc :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{24} + k\pi, \frac{5\pi}{24} + k\pi \right[$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2^k} - \frac{3\pi}{2^k}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2^k} + \frac{3\pi}{2^k}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2^{k-2}}\right) \end{aligned}$$

La somme S_n est donc télescopique :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\cos\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2^{k-2}}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) - \cos(2\pi) \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) - 1}{2}$$

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie par $u_2 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Alors, pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ racines carrées})$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad u_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

★ On a $u_2 = \sqrt{2}$ et $2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ donc l'égalité est vérifiée pour $n = 2$.

★ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose que $u_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. Montrons que $u_{n+1} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. Par définition de u_{n+1} , on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{2 + u_n} = \sqrt{2 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \sqrt{2 + 2 \left[2 \cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2^n}\right)^2 - 1 \right]} \\ &= \sqrt{4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} \\ &= 2 \left| \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \right| \\ &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

En effet, $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \geq 0$ car $\frac{\pi}{2^{n+1}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

★ Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad u_n = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

Exercice 6

1. La fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ comme différence de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) > 0$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$f(x) > f(0) \quad \text{i.e.} \quad \tan(x) - x > 0 \quad \text{soit encore} \quad \tan(x) > x$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan(x) > x}$$

2. La fonction f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f'(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sin^2(x)}$$

La fonction $g : x \mapsto \sin(x) - x \cos(x)$ est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad g'(x) = \cos(x) - \cos(x) + x \sin(x) = x \sin(x) > 0$$

donc g est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. En particulier :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad g(x) > g(0) = 0$$

On en déduit que f' est strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc que f est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

De plus, f est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc, d'après le théorème de la bijection :

f réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur :

$$\left[\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) \right[= \left] 1, \frac{2}{\pi} \right[$$

Exercice 7

1. Soit $x \in]0, 2\pi[$. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{x}{2^n} \in]0, \pi[$ donc $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$.

★ On a $\prod_{k=1}^1 \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$. De plus :

$$\frac{\sin(x)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$. Montrons que :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

On a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) &= \left(\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \end{aligned}$$

Or :

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sin\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

donc $\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$. L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

2. La fonction sinus est dérivable en 0 (elle l'est en fait sur $\mathbb{R}$) donc :

$$\frac{\sin(t) - \sin(0)}{t - 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \sin'(0)$$

i.e. :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = \cos(0) = 1$$

3. Soit $x \in]0, +\infty[$. Comme $x \neq 0$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{x} \times \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}\right)^{-1}$$

Or $\frac{x}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, d'après la question précédente :

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

On conclut donc que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Exercice 8 On note $\mathcal{S}$ chaque ensemble de solutions.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\frac{1}{4} \in [-1, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \sin(x) = \frac{1}{4} &\iff \sin(x) = \sin\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right)\right) \\ &\iff x \equiv \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) [2\pi] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathcal{S} = \left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup \left(\pi - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi\mathbb{Z} \right)$$

2. Comme $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, l'équation admet des solutions. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{cases} \cos(x) = -\frac{3}{5} \\ \sin(x) = \frac{4}{5} \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{3}{5}\right) + 2k\pi$$

donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \operatorname{Arccos}\left(-\frac{3}{5}\right) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi\mathbb{Z}$$

Exercice 9

1. (a) On a :

$$\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

donc :

$$\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right) = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

(b) On a :

$$\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

donc :

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

(c) On a :

$$\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{11\pi}{4} + 3\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

donc :

$$\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

(d) On a :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc :

$$\operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(e) On a :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{17\pi}{5}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{17\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{29\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{29\pi}{10}\right) \\ &= \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right) \end{aligned}$$

Or $\frac{9\pi}{10} \in [0, \pi]$ et $\operatorname{Arccos} \circ \cos = \operatorname{Id}_{[0, \pi]}$ donc :

$$\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)\right) = \frac{9\pi}{10}$$

2. On note f chaque fonction.

(a) On a :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[, \quad f(x) = x - k\pi$$

(b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\forall x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \quad f(x) = x - 2k\pi$$

et :

$$\forall x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi], \quad f(x) = (2k+2)\pi - x$$

(c) Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], \quad f(x) = x - 2k\pi$$

et :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \quad f(x) = (2k+1)\pi - x$$

Exercice 10

1. On démontre séparément les deux inégalités.

★ Inégalité de droite

Considérons la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \operatorname{Arctan}(x) \end{cases}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (elle l'est en fait sur $\mathbb{R}$) comme différence de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$; elle est donc minorée par $f(0) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \operatorname{Arctan}(x) \geq 0 \quad i.e. \quad \operatorname{Arctan}(x) \leq x$$

★ Inégalité de gauche

Considérons la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{Arctan}(x) - \frac{x}{x^2+1} \end{cases}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (elle l'est en fait sur $\mathbb{R}$) comme différence de fonctions qui le sont et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1+x^2+x^2-1}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$; en particulier, g est minorée sur $\mathbb{R}_+$ par $g(0) = 0$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \text{Arctan}(x) - \frac{x}{x^2+1} \geq 0 \quad i.e. \quad \text{Arctan}(x) \geq \frac{x}{x^2+1}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{x^2+1} \leq \text{Arctan}(x) \leq x}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. On doit donc montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Étudions la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables (avec Arctan dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$) et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction f est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = f(1) = 2 \text{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2},$$

ce qui prouve l'identité demandée sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors $-x \in \mathbb{R}_+^*$ et donc, d'après ce qui précède :

$$\text{Arctan}(-x) + \text{Arctan}\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

La fonction Arctan est impaire sur $\mathbb{R}$ donc :

$$-\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2},$$

i.e. :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{|x|}{x} \times \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 11 Fait en TD.

Exercice 12

1. Le domaine de validité de l'inéquation est $[-1, 1]$ (car la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in [-1, 1]$.

★ Si $x \in [-1, 0[$, alors $x < 0$ et $\sqrt{1-x^2} \geq 0$ donc x n'est pas solution.

★ Supposons maintenant que $x \in [0, 1]$. Les nombres $\sqrt{1-x^2}$ et x sont positifs et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\sqrt{1-x^2} \leq x \iff 1-x^2 \leq x^2 \iff x^2 \geq \frac{1}{2} \iff x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

car $x \geq 0$.

Par conséquent :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation est } \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]}$$

2. La fonction f est définie sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in] -1, 1[, \quad f'(x) &= \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right) e^{\text{Arcsin}(x)} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\text{Arcsin}(x)} \end{aligned}$$

On déduit de la question précédente le tableau de variations de f suivant sur $[-1, 1]$.

x	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
f	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}$	0

Exercice 13**Exercice 14**

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\text{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(\text{Arctan}(x)) > 0$ et :

$$\cos(\text{Arctan}(x)) = \sqrt{\cos(\text{Arctan}(x))^2} = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan(\text{Arctan}(x))^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + x^2}}$$

car $\tan \circ \text{Arctan} = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Ainsi :

$$\cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

On en déduit que :

$$\sin(\text{Arctan}(x)) = \tan(\text{Arctan}(x)) \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

2. (a) Soit $x \in [-1, 1]$. On a :

$$\sin(2 \text{Arccos}(x)) = 2 \sin(\text{Arccos}(x)) \cos(\text{Arccos}(x))$$

Comme $\cos \circ \text{Arccos} = \text{Id}_{[-1, 1]}$, on a $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$. De plus, $\text{Arccos}(x) \in [0, \pi]$ donc $\sin(\text{Arccos}(x)) \geq 0$. On en déduit que :

$$\sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{\sin(\text{Arccos}(x))^2} = \sqrt{1 - \cos(\text{Arccos}(x))^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

Ainsi :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(2 \text{Arccos}(x)) = 2x\sqrt{1 - x^2}$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \sin(2 \text{Arctan}(x)) &= 2 \sin(\text{Arctan}(x)) \cos(\text{Arctan}(x)) \\ &= 2 \times \frac{\sin(\text{Arctan}(x))}{\cos(\text{Arctan}(x))} \times \cos(\text{Arctan}(x))^2 \\ &= 2 \tan(\text{Arctan}(x)) \cos(\text{Arctan}(x))^2 \end{aligned}$$

Or $\tan \circ \text{Arctan} = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ donc $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$. De plus, on a vu à la question

1. que $\cos(\text{Arctan}(x))^2 = \frac{1}{1 + x^2}$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(2 \text{Arctan}(x)) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

- (c) Soit $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$. On a $\text{Arccos}(x) \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ donc :

$$\cos(\text{Arccos}(x))^2 = \frac{1}{1 + \tan(\text{Arccos}(x))^2}$$

Comme $\cos \circ \text{Arccos} = \text{Id}_{[-1, 1]}$, on a $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$ donc, comme $x \neq 0$, on a :

$$\tan(\text{Arccos}(x))^2 = \frac{1}{x^2} - 1$$

- ★ Si $x \in [-1, 0[$, alors $\text{Arccos}(x) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et donc $\tan(\text{Arccos}(x)) \leq 0$. On en déduit que $\tan(\text{Arccos}(x)) = -\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$.

- ★ Si $x \in]0, 1]$, alors $\text{Arccos}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\tan(\text{Arccos}(x)) \geq 0$. On en déduit que $\tan(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$.

Ainsi :

$$\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \quad \tan(\text{Arccos}(x)) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$$

- (d) Soit $x \in [-1, 1]$. Posons $\theta = \text{Arccos}(x)$. On a :

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos(2\theta + \theta) = \cos(2\theta) \cos(\theta) - \sin(2\theta) \sin(\theta) \\ &= (2 \cos(\theta)^2 - 1) \cos(\theta) - 2 \sin(\theta)^2 \cos(\theta) \\ &= 2 \cos(\theta)^3 - \cos(\theta) - 2(1 - \cos(\theta)^2) \cos(\theta) \\ &= 4 \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta) \end{aligned}$$

Comme $\cos \circ \text{Arccos} = \text{Id}_{[-1, 1]}$, on a $\cos(\theta) = x$ et donc :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(3 \text{Arccos}(x)) = 4x^3 - 3x$$

3. Soit $x \in [-1, 1]$. On a $\text{Arctan}(2x), \text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc, comme la fonction $\sin$ est injective sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\text{Arctan}(2x) = \text{Arcsin}(x) \iff \sin(\text{Arctan}(2x)) = \sin(\text{Arcsin}(x))$$

Or $\sin \circ \text{Arcsin} = \text{Id}_{[-1,1]}$ et, d'après la question 1., on a :

$$\sin(\text{Arctan}(2x)) = \frac{2x}{\sqrt{1+(2x)^2}}$$

donc :

$$\begin{aligned} \text{Arctan}(x) = \text{Arcsin}(x) &\iff \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} = x \\ &\iff x \left(\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - 1 \right) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } \sqrt{1+4x^2} = 2 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

en utilisant l'injectivité de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\text{l'ensemble des solutions est } \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

Exercice 15

1. La fonction $f : x \mapsto \text{Arccos}(-x) + \text{Arccos}(x)$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

La fonction f est donc constante sur l'intervalle $] -1, 1[$. Ainsi :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f(x) = f(0) = 2 \text{Arccos}(0) = \pi$$

On vérifie facilement que ces égalités restent valables pour $x = \pm 1$ donc :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \text{Arccos}(-x) + \text{Arccos}(x) = \pi$$

2. En étudiant la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \text{Arctan}'(x)$$

La fonction $f - \text{Arctan}$ est donc constante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. En calculant $f(0)$ pour le premier intervalle et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f - \text{Arctan})(x)$ pour le second, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \text{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \text{Arctan}(x) & \text{si } x < 1 \\ -\frac{3\pi}{4} + \text{Arctan}(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

3. La fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et dérivable sur $] -1, 1[$ et la fonction Arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ est définie et dérivable sur $] -1, 1[$ et, pour tout $x \in] -1, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \\ &= \frac{(1-x^2) + x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1-x^2}{(1-x^2) + x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \text{Arcsin}'(x) \end{aligned}$$

La fonction $f - \text{Arcsin}$ est donc constante sur $] -1, 1[$. On a donc :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f(x) - \text{Arcsin}(x) = f(0) - \text{Arcsin}(0) = 0$$

donc :

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad \text{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \text{Arcsin}(x)$$

4. La fonction $f : x \mapsto \text{Arccos}(\text{th}(x)) + 2 \text{Arctan}(e^x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \text{th}'(x) \text{Arccos}'(\text{th}(x)) + 2e^x \text{Arctan}'(e^x) \\ &= -\frac{1 - \text{th}(x)^2}{\sqrt{1 - \text{th}(x)^2}} + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} \\ &= -\sqrt{1 - \text{th}(x)^2} + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} \\ &= -\frac{1}{\text{ch}(x)} + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} \\ &= -\frac{2}{e^x + e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$. Or :

$$f(0) = \operatorname{Arccos}(0) + 2 \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2} + 2 \times \frac{\pi}{4}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x)) + 2 \operatorname{Arctan}(e^x) = \frac{\pi}{2}$$

5. La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de composition des fonctions dérivables (en effet, la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[1, +\infty[$ où la fonction racine carrée est dérivable). La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right) \times \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2} \\ &= \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{2\sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{1}{x^2 + 1 - x\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{2(\sqrt{x^2 + 1})^2} \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \\ &= -\frac{1}{2(x^2 + 1)} \\ &= -\frac{\operatorname{Arctan}'(x)}{2} \end{aligned}$$

La fonction $f + \frac{\operatorname{Arctan}}{2}$ est donc constante sur $\mathbb{R}$. Or :

$$f(0) + \frac{\operatorname{Arctan}(0)}{2} = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{2}$$

6.

Exercice 16

1. On a $\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \in [0, 1[$ donc, par croissance stricte de la fonction Arctan sur $\mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) < \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad 0 \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$$

On en déduit que $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a aussi $\frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Comme la fonction $\tan$ est injective sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) \iff \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

Or, d'après la formule d'addition de la tangente, on a :

$$\begin{aligned} \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right) &= \frac{\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{1 - \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} \\ &= 1 \\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$$

2. On a $\frac{3}{4} \in [0, 1]$ donc $\operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $2 \operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right) \in [0, \pi]$. De même, on a $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{8}\right) \in [0, \pi]$ et la fonction $\cos$ est injective sur $[0, \pi]$ donc :

$$2 \operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{8}\right) \iff \cos\left(2 \operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{8}\right)\right)$$

Or :

$$\begin{aligned} \cos\left(2 \operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right)\right) &= 2 \cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2 - 1 \\ &= 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{9}{8} - 1 \quad (\text{car } \cos \circ \operatorname{Arccos} = \operatorname{Id}_{[0, \pi]}) \\ &= \frac{1}{8} \\ &= \cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{8}\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{2 \operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{8}\right)}$$

3. ★ Commençons par calculer $x = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$. On a $\frac{1}{2}, \frac{1}{5} \in [0, 1[$ donc $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right), \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$. On peut donc appliquer la formule d'addition de la tangente :

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1 - \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} \quad (\text{car } \tan \circ \operatorname{Arctan} = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}) \\ &= \frac{7}{9} \\ &= \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right)\right) \end{aligned}$$

Comme $\frac{7}{9} \in [0, 1]$, on a $\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$. De même, on sait d'après le début du raisonnement que $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction $\tan$ est injective sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc l'égalité précédente entraîne que $x = \operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right)$.

- ★ De la même manière, on a $\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right), \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ donc la formule d'addition de la tangente nous donne :

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \times \frac{1}{8}} = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

La fonction $\tan$ est injective sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right), \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

donc :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Finalement :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}}$$

4. (a) Comme $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ (car $\frac{1}{5} \in [0, 1[$), on a (d'après la formule de duplication de la tangente) :

$$\begin{aligned} \tan\left(2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) &= \frac{2 \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1 - \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)^2} \\ &= \frac{2 \times \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{25}{24} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\tan\left(2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{5}{12}}$$

Comme $\frac{5}{12} \in [0, 1[$, on a :

$$2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)\right) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$$

On peut donc appliquer la formule d'addition et on a, en posant $x = 2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$:

$$\begin{aligned} \tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) &= \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan(x)^2} = \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{144}{119} \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{120}{119}}$$

- (b) On a $\frac{\pi}{4}, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ donc, d'après la formule d'addition de la tan-

gente :

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right) &= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right)} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{239}}{1 - 1 \times \frac{1}{239}} \\ &= \frac{240}{238} \\ &= \frac{120}{119} \\ &= \tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)\end{aligned}$$

L'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \operatorname{Arctan}(x) \leq x,$$

que l'on peut pas exemple obtenir en étudiant la fonction $x \mapsto x - \operatorname{Arctan}(x)$ (cf. exercice 10) nous donne $4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \leq \frac{4}{5}$. Comme $\frac{4}{5} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, on a $4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On a aussi $\frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'injectivité de la fonction $\tan$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et l'égalité précédemment obtenue nous donnent :

$$\frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) = 4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)}$$

Exercice 17

1. Considérons la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \arccos(\operatorname{th}(x)) \end{cases}$. On sait que les fonctions $\arctan$ et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $\arctan \circ \operatorname{sh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $] -1, 1[$ où la fonction $\arccos$ est dérivable. Donc $\arccos \circ \operatorname{th}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{1 + \operatorname{sh}(x)^2} - \frac{\operatorname{th}'(x)}{\sqrt{1 - \operatorname{th}(x)^2}}$$

Or on sait que $1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$, $\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$ et $1 + \operatorname{sh}^2 = \operatorname{ch}^2$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dots = 0$$

La fonction f a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ (qui est un intervalle) donc f est constante sur $\mathbb{R}$. Or :

$$f(0) = \arctan(0) + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \arccos(\operatorname{th}(x)) = \frac{\pi}{2}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{th}(x) = \frac{5}{13} &\iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{5}{13} \iff 13e^{2x} - 13 = 5e^{2x} + 5 \\ &\iff e^{2x} = \frac{9}{4} \\ &\iff x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

par injectivité de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions réelles de l'équation } \operatorname{th}(x) = \frac{5}{13} \text{ est } \left\{ \ln\left(\frac{3}{2}\right) \right\}}$$

3. On a :

$$\operatorname{sh}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{e^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} - e^{-\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}{2} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{2} = \frac{5}{12}$$

En choisissant la valeur $x = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \in \mathbb{R}$ dans l'identité obtenue à la question 1., on a :

$$\boxed{\arctan\left(\frac{5}{12}\right) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 18 Fait en TD.

Exercice 19

1. Il suffit d'utiliser les formules de duplication.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^*$ est bijective donc il existe $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{0\}$ tel que $x = \tan(t)$. On en déduit que :

$$f(x) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos(t)^2} - 1}}{\tan(t)} \right) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{\frac{1}{\cos(t)} - 1}{\tan(t)} \right)$$

car la fonction $\cos$ est positive sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{Arctan} \left(\frac{1 - \cos(t)}{\sin(t)} \right) = \operatorname{Arctan} \left(\tan \left(\frac{t}{2} \right) \right) \\ &= \frac{t}{2} \end{aligned}$$

car $\frac{t}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et puisque $\operatorname{Arctan} \circ \tan = \operatorname{Id}]_{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.

On conclut donc que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{2}$$

Exercice 20

1. Le domaine de validité de l'équation est $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ car $\mathcal{D}_{\operatorname{Arccos}} = \mathcal{D}_{\operatorname{Arcsin}} = [-1, 1]$.

On résout l'équation en raisonnant par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : soit $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tel que $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arccos}(x)$. Alors :

$$\sin(\operatorname{Arcsin}(2x)) = \sin(\operatorname{Arccos}(x)) \quad i.e. \quad 2x = \sin(\operatorname{Arccos}(x))$$

car $\sin \circ \operatorname{Arcsin} = \operatorname{Id}_{[-1,1]}$. Comme $\operatorname{Arccos}(x) \in [0, \pi]$, on a $\sin(\operatorname{Arccos}(x)) \geq 0$. La dernière égalité implique donc que $2x \geq 0$, *i.e.* que $x \geq 0$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \sin(\operatorname{Arccos}(x)) &= \sqrt{\sin(\operatorname{Arccos}(x))^2} = \sqrt{1 - \cos(\operatorname{Arccos}(x))^2} \\ &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

car $\cos \circ \operatorname{Arccos} = \operatorname{Id}_{[-1,1]}$. On a donc l'égalité :

$$2x = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{puis} \quad 4x^2 = 1 - x^2,$$

i.e. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$. Or $x \geq 0$ donc $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

★ **Synthèse** : vérifions que $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ est bien solution de l'équation. On a bien

$x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et on peut remonter les égalités pour obtenir $2x = \sin(\operatorname{Arccos}(x))$.

On en déduit que $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arcsin}(\sin(\operatorname{Arccos}(x)))$. Comme $\frac{1}{\sqrt{5}} \in [0, 1]$, on a $\operatorname{Arccos}(x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Or $\operatorname{Arcsin} \circ \sin = \operatorname{Id}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$, on a $\operatorname{Arcsin}(\sin(\operatorname{Arccos}(x))) = \operatorname{Arccos}(x)$. Autrement dit, x est solution de l'équation.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}}$$

2. On note $\mathcal{D}$ le domaine de validité de l'équation. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D} &\iff \begin{cases} x \in \mathcal{D}_{\tan} \\ \tan(x) \in \mathcal{D}_{\operatorname{Arcsin}} \in [-1, 1] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right) \\ |\tan(x)| \leq 1 \end{cases} \\ &\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right] \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$.

Soit $x \in \mathcal{D}$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas** : $x \notin \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$.

Alors $|x| \geq \frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{2}$ donc $x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$. Par ailleurs, $\operatorname{Arcsin}(\tan(x)) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ donc $\operatorname{Arcsin}(\tan(x)) \neq x$. Ainsi, x n'est pas solution de l'équation.

★ **Deuxième cas** : $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$.

Comme $x, \operatorname{Arcsin}(\tan(x)) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$, on a par injectivité de la fonction $\sin$ sur

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] :$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin}(\tan(x)) = x &\iff \sin(\operatorname{Arcsin}(\tan(x))) = \sin(x) \\ &\iff \tan(x) = \sin(x) \quad (\text{car } \sin \circ \operatorname{Arcsin} = \operatorname{Id}_{[-1,1]}) \\ &\iff \sin(x) \left(\frac{1}{\cos(x)} - 1 \right) = 0 \\ &\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

$$\text{car } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation est } \{0\}}$$

3. L'ensemble de validité de l'équation est $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue trois cas.

★ **Premier cas** : $x \leq 0$

Alors $\operatorname{Arctan}(x) \leq 0$ et $\operatorname{Arctan}(2x) \leq 0$. Ainsi, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(2x) \leq 0$ et donc x n'est pas solution de l'équation.

★ **Deuxième cas** : $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

On a :

$$0 \leq \operatorname{Arctan}(x) < \operatorname{Arctan}(2x) \leq \frac{\pi}{4}$$

Ainsi, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(2x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et comme la fonction $\tan$ est injective sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{4} &\iff \tan(\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(2x)) = 1 \\ &\iff \frac{\tan(\operatorname{Arctan}(x)) + \tan(\operatorname{Arctan}(2x))}{1 - \tan(\operatorname{Arctan}(x))\tan(\operatorname{Arctan}(2x))} = 1 \\ &\iff \frac{3x}{1 - 2x^2} = 1 \\ &\iff 2x^2 + 3x - 1 = 0 \\ &\iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} \\ &\iff x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \end{aligned}$$

car $x \geq 0$. On a bien $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ car $4 \leq \sqrt{17} \leq 5$.

★ **Troisième cas** : $x > \frac{1}{2}$

Alors $\operatorname{Arctan}(2x) > \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{Arctan}(x) \geq 0$ donc $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(2x) \neq \frac{\pi}{4}$. On en déduit que x n'est pas solution de l'équation.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \left\{ \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}}$$

Exercice 21

1. On considère la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas (son discriminant étant strictement négatif). La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ est donc bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme composition de fonctions qui le sont). De même, la fonction $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Finalement, la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}}{1+\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2+1} \\ &= \frac{(1+x^2) - [1+(x^2+2x+1)]}{(1+x^2)(2+2x+x^2)} + \frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} \\ &= -\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} + \frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$. Or :

$$f(0) = \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}(0) - \operatorname{Arctan}(1) = 0$$

donc la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k)) = \text{Arctan}(n+1) - \underbrace{\text{Arctan}(0)}_{=0}$$

car la somme obtenue est télescopique. Or :

$$\text{Arctan}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \text{Arctan}(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

Ainsi :

la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $\frac{\pi}{2}$

Exercice 22

1. On raisonne par récurrence.

★ On a $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_2 = F_0 + F_1 = 1$ donc :

$$F_1^2 - F_0 F_2 = 1 = (-1)^0$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$. Montrons que $F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+3} = (-1)^{n+1}$. On a $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$ donc :

$$\begin{aligned} F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+3} &= F_{n+2}^2 - F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) \\ &= F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+2} - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+2}(F_{n+2} - F_{n+1}) - (F_n F_{n+2} + (-1)^n) \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. Comme $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, on a :

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+3} = F_{n+2} F_n - F_n F_{n+2} - (-1)^n = (-1)^{n+1}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$

2. Une récurrence double permet de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n \geq 1$$

On en déduit que $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n} \geq 2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi :

$$0 \leq \frac{1}{F_{2n}} \leq 1, \quad 0 \leq \frac{1}{F_{2n+1}} < 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{1}{F_{2n+2}} < 1$$

Par croissance stricte de la fonction Arctan sur $\mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) < \frac{\pi}{4}$$

et $0 \leq \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) < \frac{\pi}{4}$. En particulier, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc, d'après la formule d'addition de la tangente, on a :

$$\begin{aligned} \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right) &= \frac{\frac{1}{F_{2n+1}} + \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+1}} \times \frac{1}{F_{2n+2}}} \\ &= \frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+1} F_{2n+2} - 1} \\ &= \frac{1}{F_{2n}} \times \frac{F_{2n+1} F_{2n} + F_{2n+2} F_{2n}}{F_{2n+1} F_{2n+2} - 1} \end{aligned}$$

Or, d'après la question 1., on a :

$$F_{2n+1}^2 - F_{2n} F_{2n+2} = (-1)^{2n} = 1$$

donc :

$$\begin{aligned} F_{2n+1} F_{2n} + F_{2n+2} F_{2n} &= F_{2n+1} F_{2n} + F_{2n+1}^2 - 1 \\ &= F_{2n+1}(F_{2n+2} - F_{2n+1}) + F_{2n+1}^2 - 1 \\ &= F_{2n+1} F_{2n+2} - 1 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right) &= \frac{1}{F_{2n}} \\ &= \tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)\right) \end{aligned}$$

Or $\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right), \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction tan est injective sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc l'égalité précédente implique que :

$\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$

3. Commençons par montrer que la suite $F_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. La suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs positives (cf. question 2.) donc la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. En effet, $F_1 \geq F_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + \underbrace{F_n}_{\geq 0} \geq F_{n+1}$$

D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ou bien convergente, ou bien divergente de limite $+\infty$. Si la limite de la suite est finie (notée ℓ), alors en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence vérifiée par la suite, on a $\ell = \ell + \ell$, i.e. $\ell = 0$. Ceci est absurde car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $F_n \geq F_1$, i.e. $F_n \geq 1$ donc $\ell \geq 1$. Ainsi, $F_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{F_{2k+1}} \right) &= \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{F_1} \right) + \sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{F_{2k+1}} \right) \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{F_{2k}} \right) - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{F_{2(k+1)}} \right) \right] \quad (\text{question 2.}) \\ &= \frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{F_2} \right) - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{F_{2(n+1)}} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{F_{2(n+1)}} \right) \quad (\text{car } F_2 = 1) \end{aligned}$$

Or $F_{2(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{F_{2(n+1)}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Arctan}(0) = 0$. On en déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{F_{2k+1}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}}$$