Trigonométrie

(corrigés)

Exercice 1

1. On a $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$ donc, en utilisant la formule d'addition du cosinus :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$$

De la même manière :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2},\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

On a donc :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}$$

2. On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 - 1$$

Comme $\dfrac{\pi}{8} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$ donc :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

On a $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$ donc :

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}}$$

Exercice 2

On note $\mathscr{S}$ les ensembles de solutions. On trouve :

1. $\mathscr{S} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right]$
2. $\mathscr{S} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[$
3. $\mathscr{S} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

Exercice 3

On note $\mathscr{S}$ chaque ensemble de solutions.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\cos(2x) = \sin(x) &\iff 1 - 2\sin(x)^2 = \sin(x)\\ &\iff 2\sin(x)^2 + \sin(x) - 1 = 0\\ &\iff \sin(x) = -1 \text{ ou } \sin(x) = \frac{1}{2}\\ &\iff x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)}$$

2. Le domaine de validité de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. On a :

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \sin(x) = 1 + \tan(x) &\iff \cos(x) + \sin(x) = 1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&\iff \cos(x) - 1 + \sin(x)\left(\frac{\cos(x) - 1}{\cos(x)}\right) = 0 \\
&\iff (\cos(x) - 1)\left(1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right) = 0 \\
&\iff \cos(x) = 1 \text{ ou } \tan(x) = -1 \\
&\iff x \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } x \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

donc (les solutions obtenues appartement à $\mathscr{D}_{\tan}$) :

$$\boxed{\mathscr{S} = 2\pi\mathbb{Z} \cup \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right)}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(2x) = 0 &\iff \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0 \\
&\iff \sin(x)(1 + 2\cos(x)) = 0 \\
&\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2} \\
&\iff x \in \pi\mathbb{Z} \text{ ou } x \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{S} = \pi\mathbb{Z} \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right)}$$

4. Le domaine de validité de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$. On a (d'après la formule de duplication de la tangente, qui s'applique car $\tan(x)^2 \neq 1$) :

$$\begin{aligned}
\tan(2x) = 3\tan(x) &\iff \frac{2\tan(x)}{1 - \tan(x)^2} = 3\tan(x) \\
&\iff \tan(x)\left(\frac{2}{1 - \tan(x)^2} - 3\right) = 0 \\
&\iff \tan(x) = 0 \text{ ou } \tan(x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\
&\iff x \in \pi\mathbb{Z} \text{ ou } x \in -\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z} \text{ ou } x \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{S} = \pi\mathbb{Z} \cup \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)}$$

5. fait en TD
6. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. On a :

$$\begin{aligned}
3\tan(x) = 2\cos(x) &\iff 3\sin(x) = 2\cos(x)^2 \\
&\iff 3\sin(x) = 2 - 2\sin(x)^2 \\
&\iff 2\sin(x)^2 + 3\sin(x) - 2 = 0 \\
&\iff \sin(x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin(x) = -2 \text{ (impossible)}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)}$$

7. Fait en TD
8.
9. Fait en TD
10. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\cos(2x) + \sin(2x) &= \sqrt{2}\left(\cos(2x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(2x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\cos(2x) + \sin(2x) > \sqrt{\frac{3}{2}} &\iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ 2x - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[\\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ 2x \in \left]\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{5\pi}{12} + 2k\pi\right[\\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x \in \left]\frac{\pi}{24} + k\pi, \frac{5\pi}{24} + k\pi\right[
\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{24} + k\pi, \frac{5\pi}{24} + k\pi\right[}$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}2\sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2^k}-\frac{3\pi}{2^k}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2^k}+\frac{3\pi}{2^k}\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2^{k-2}}\right)\end{aligned}$$

La somme S_n est donc télescopique :

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2^{k-2}}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)-\cos(2\pi)\right)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{S_n = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)-1}{2}}$$

Exercice 5 On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_2=\sqrt{2}$ et $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Alors, pour tout $n\geqslant 2$,

$$u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} \qquad (n-1 \text{ racines carrées})$$

Montrons par récurrence que :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\qquad u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

- ⋆ On a $u_2=\sqrt{2}$ et $2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ donc l'égalité est vérifiée pour $n=2$.
- ⋆ Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On suppose que $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$. Montrons que $u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. Par définition de u_{n+1}, on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1}=\sqrt{2+u_n} &= \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}\\ &= \sqrt{2+2\left[2\cos\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2^n}\right)^2-1\right]}\\ &= \sqrt{4\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2}\\ &= 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right|\\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

En effet, $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\geqslant 0$ car $\frac{\pi}{2^{n+1}}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

- ⋆ Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\qquad u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

Exercice 6

1. La fonction $f : x\longmapsto \tan(x)-x$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ comme différence de fonctions qui le sont et :

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\qquad f'(x)=1+\tan(x)^2-1=\tan(x)^2>0$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Pour tout $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$f(x)>f(0) \qquad i.e \qquad \tan(x)-x>0 \qquad \text{soit encore} \qquad \tan(x)>x$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\qquad \tan(x)>x}$$

2. La fonction f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\qquad f'(x)=\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\sin(x)^2}$$

La fonction $g : x\longmapsto \sin(x)-x\cos(x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\qquad g'(x)=\cos(x)-\cos(x)+x\sin(x)=x\sin(x)>0$$

donc g est strictement croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. En particulier :

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\qquad g(x)>g(0)=0$$

On en déduit que f' est strictement positive sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc que f est strictement croissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

De plus, f est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc, d'après le théorème de la bijection :

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ réalise une bijection de } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ sur :} \\ \left] \lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) \right[= \left]1, \frac{2}{\pi}\right[\end{array}}$$

Exercice 7

1. Soit $x \in]0, 2\pi[$. Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{x}{2^n} \in]0, \pi[$ donc $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \neq 0$.

★ On a $\prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$. De plus :

$$\frac{\sin(x)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$. Montrons que :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

On a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) &= \left(\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} \times \cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

Or :

$$\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sin\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

donc $\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^{n+1} \sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$. L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}}$$

2. La fonction sinus est dérivable en 0 (elle l'est en fait sur $\mathbb{R}$) donc :

$$\frac{\sin(t) - \sin(0)}{t - 0} \xrightarrow[t\to 0]{} \sin'(0)$$

i.e. :

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = \cos(0) = 1}$$

3. Soit $x \in]0, +\infty[$. Comme $x \neq 0$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{x} \times \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}\right)^{-1}$$

Or $\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, d'après la question précédente :

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On conclut donc que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{x}}$$

Exercice 8

On note $\mathscr{S}$ chaque ensemble de solutions.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\frac{1}{4} \in [-1, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} \sin(x) = \frac{1}{4} &\iff \sin(x) = \sin\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right)\right) \\ &\iff x \equiv \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) \ [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) \ [2\pi] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\pi - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi\mathbb{Z}\right)}$$

2. Comme $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, l'équation admet des solutions. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{cases} \cos(x) = -\frac{3}{5} \\ \sin(x) = \frac{4}{5} \end{cases} \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{3}{5}\right) + 2k\pi$$

donc :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \operatorname{Arccos}\left(-\frac{3}{5}\right) + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi\mathbb{Z}}$$

Exercice 9

1. (a) On a :

$$\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

donc :

$$\boxed{\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right) = \operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}}$$

(b) On a :

$$\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

donc :

$$\boxed{\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}}$$

(c) On a :

$$\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{11\pi}{4} + 3\pi\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

donc :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}}$$

(d) On a :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc :

$$\boxed{\operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}}$$

(e) On a :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{17\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{29\pi}{10}\right) &= \cos\left(\frac{29\pi}{10}\right) \\ &= \cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)\end{aligned}$$

Or $\frac{9\pi}{10} \in [0, \pi]$ et $\operatorname{Arccos} \circ \cos = \mathrm{Id}_{[0,\pi]}$ donc :

$$\boxed{\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)\right) = \frac{9\pi}{10}}$$

2. On note f chaque fonction.

(a) On a :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \qquad f(x) = x - k\pi$$

(b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\forall x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \qquad f(x) = x - 2k\pi$$

et :

$$\forall x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi], \qquad f(x) = (2k+2)\pi - x$$

(c) Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], \qquad f(x) = x - 2k\pi$$

et :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], \qquad f(x) = (2k+1)\pi - x$$

Exercice 10

1. On démontre séparément les deux inégalités.

⋆ **Inégalité de droite**

Considérons la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \operatorname{Arctan}(x) \end{cases}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (elle l'est en fait sur $\mathbb{R}$) comme différence de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geqslant 0$$

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$; elle est donc minorée par $f(0) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x - \operatorname{Arctan}(x) \geqslant 0 \qquad \textit{i.e.} \qquad \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$$

- ⋆ **Inégalité de gauche**

  Considérons la fonction $g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan}(x) - \dfrac{x}{x^2+1} \end{array}\right.$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (elle l'est en fait sur $\mathbb{R}$) comme différence de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1+x^2+x^2-1}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2} \geqslant 0$$

  La fonction g est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$; en particulier, g est minorée sur $\mathbb{R}_+$ par $g(0) = 0$. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \operatorname{Arctan}(x) - \frac{x}{x^2+1} \geqslant 0 \qquad \textit{i.e.} \qquad \operatorname{Arctan}(x) \geqslant \frac{x}{x^2+1}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\dfrac{|x|}{x} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{array}\right.$. On doit donc montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{array}\right.$$

Étudions la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables (avec Arctan dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto \frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

La fonction f est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(x) = f(1) = 2\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2},$$

ce qui prouve l'identité demandée sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors $-x \in \mathbb{R}_+^*$ et donc, d'après ce qui précède :

$$\operatorname{Arctan}(-x) + \operatorname{Arctan}\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

La fonction Arctan est impaire sur $\mathbb{R}$ donc :

$$-\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2},$$

i.e. :

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{|x|}{x} \times \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 11 Fait en TD.

Exercice 12

1. Le domaine de validité de l'inéquation est $[-1, 1]$ (car la fonction $t \longrightarrow \sqrt{t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in [-1, 1]$.
   - ⋆ Si $x \in [-1, 0[$, alors $x < 0$ et $\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$ donc x n'est pas solution.
   - ⋆ Supposons maintenant que $x \in [0, 1]$. Les nombres $\sqrt{1-x^2}$ et x sont positifs et la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\sqrt{1-x^2} \leqslant x \iff 1 - x^2 \leqslant x^2 \iff x^2 \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

     car $x \geqslant 0$.

   Par conséquent :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation est } \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]}$$

2. La fonction f est définie sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et :

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad f'(x) = \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right) \mathrm{e}^{\operatorname{Arcsin}(x)} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{e}^{\operatorname{Arcsin}(x)}$$

   On déduit de la question précédente le tableau de variations de f suivant sur $[-1, 1]$.

x	-1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
f	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	0

Exercice 13

Exercice 14

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos(\mathrm{Arctan}(x)) > 0$ et :

$$\cos(\mathrm{Arctan}(x)) = \sqrt{\cos(\mathrm{Arctan}(x))^2} = \sqrt{\frac{1}{1+\tan(\mathrm{Arctan}(x))^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$$

car $\tan \circ \mathrm{Arctan} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Ainsi :

$$\boxed{\cos(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\sin(\mathrm{Arctan}(x)) = \tan(\mathrm{Arctan}(x))\cos(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

2. (a) Soit $x \in [-1,1]$. On a :

$$\sin(2\,\mathrm{Arccos}(x)) = 2\sin(\mathrm{Arccos}(x))\cos(\mathrm{Arccos}(x))$$

Comme $\cos \circ \mathrm{Arccos} = \mathrm{Id}_{[-1,1]}$, on a $\cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x$. De plus, $\mathrm{Arccos}(x) \in [0,\pi]$ donc $\sin(\mathrm{Arccos}(x)) \geqslant 0$. On en déduit que :

$$\sin(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{\sin(\mathrm{Arccos}(x))^2} = \sqrt{1-\cos(\mathrm{Arccos}(x))^2} = \sqrt{1-x^2}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \qquad \sin(2\,\mathrm{Arccos}(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\sin(2\,\mathrm{Arctan}(x)) &= 2\sin(\mathrm{Arctan}(x))\cos(\mathrm{Arctan}(x)) \\ &= 2 \times \frac{\sin(\mathrm{Arctan}(x))}{\cos(\mathrm{Arctan}(x))} \times \cos(\mathrm{Arctan}(x))^2 \\ &= 2\tan(\mathrm{Arctan}(x))\cos(\mathrm{Arctan}(x))^2\end{aligned}$$

Or $\tan \circ \mathrm{Arctan} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ donc $\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$. De plus, on a vu à la question 1. que $\cos(\mathrm{Arctan}(x))^2 = \dfrac{1}{1+x^2}$ donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(2\,\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{2x}{1+x^2}}$$

(c) Soit $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$. On a $\mathrm{Arccos}(x) \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ donc :

$$\cos(\mathrm{Arccos}(x))^2 = \frac{1}{1+\tan(\mathrm{Arccos}(x))^2}$$

Comme $\cos \circ \mathrm{Arccos} = \mathrm{Id}_{[-1,1]}$, on a $\cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x$ donc, comme $x \neq 0$, on a :

$$\tan(\mathrm{Arccos}(x))^2 = \frac{1}{x^2} - 1$$

- ⋆ Si $x \in [-1,0[$, alors $\mathrm{Arccos}(x) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et donc $\tan(\mathrm{Arccos}(x)) \leqslant 0$. On en déduit que $\tan(\mathrm{Arccos}(x)) = -\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$.
- ⋆ Si $x \in]0,1]$, alors $\mathrm{Arccos}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\tan(\mathrm{Arccos}(x)) \geqslant 0$. On en déduit que $\tan(\mathrm{Arccos}(x)) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$.

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \qquad \tan(\mathrm{Arccos}(x)) = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1} & \text{si } x \in [-1,0[\\ \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1} & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}}$$

(d) Soit $x \in [-1,1]$. Posons $\theta = \mathrm{Arccos}(x)$. On a :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta) &= \cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta) \\ &= (2\cos(\theta)^2 - 1)\cos(\theta) - 2\sin(\theta)^2\cos(\theta) \\ &= 2\cos(\theta)^3 - \cos(\theta) - 2(1-\cos(\theta)^2)\cos(\theta) \\ &= 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\end{aligned}$$

Comme $\cos \circ \mathrm{Arctan} = \mathrm{Id}_{[-1,1]}$, on a $\cos(\theta) = x$ et donc :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \qquad \cos(3\,\mathrm{Arccos}(x)) = 4x^3 - 3x}$$

3. Soit $x \in [-1,1]$. On a $\operatorname{Arctan}(2x), \operatorname{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc, comme la fonction sin est injective sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\operatorname{Arctan}(2x) = \operatorname{Arcsin}(x) \iff \sin(\operatorname{Arctan}(2x)) = \sin(\operatorname{Arcsin}(x))$$

Or $\sin \circ \operatorname{Arcsin} = \operatorname{Id}_{[-1,1]}$ et, d'après la question 1., on a :

$$\sin(\operatorname{Arctan}(2x)) = \frac{2x}{\sqrt{1+(2x)^2}}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arcsin}(x) &\iff \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} = x \\
&\iff x\left(\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - 1\right) = 0 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } \sqrt{1+4x^2} = 2 \\
&\iff x = 0 \text{ ou } x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

en utilisant l'injectivité de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

Exercice 15

1. La fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arccos}(-x) + \operatorname{Arccos}(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

La fonction f est donc constante sur l'intervalle $]-1,1[$. Ainsi :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = f(0) = 2\operatorname{Arccos}(0) = \pi$$

On vérifie facilement que ces égalités restent valables pour $x = \pm 1$ donc :

$$\boxed{\forall x \in [-1,1], \qquad \operatorname{Arccos}(-x) + \operatorname{Arccos}(x) = \pi}$$

2. En étudiant la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{Arctan}'(x)$$

La fonction $f - \operatorname{Arctan}$ est donc constante sur chacun des deux intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. En calculant $f(0)$ pour le premier intervalle et $\lim_{x\to+\infty} (f - \operatorname{Arctan})(x)$ pour le second, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}, \qquad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x < 1 \\ -\frac{3\pi}{4} + \operatorname{Arctan}(x) & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

3. La fonction $x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et dérivable sur $]-1,1[$ et la fonction Arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ est définie et dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} \\
&= \frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1-x^2}{(1-x^2)+x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \operatorname{Arcsin}'(x)
\end{aligned}$$

La fonction $f - \operatorname{Arcsin}$ est donc constante sur $]-1,1[$. On a donc :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) - \operatorname{Arcsin}(x) = f(0) - \operatorname{Arcsin}(0) = 0$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{Arcsin}(x)}$$

4. La fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x)) + 2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$) et :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) &= \operatorname{th}'(x)\operatorname{Arccos}'(\operatorname{th}(x)) + 2\,\mathrm{e}^x \operatorname{Arctan}'(\mathrm{e}^x) \\
&= -\frac{1-\operatorname{th}(x)^2}{\sqrt{1-\operatorname{th}(x)^2}} + \frac{2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} \\
&= -\sqrt{1-\operatorname{th}(x)^2} + \frac{2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} \\
&= -\frac{1}{\operatorname{ch}(x)} + \frac{2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} \\
&= -\frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}} \times \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} + \frac{2\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$. Or :

$$f(0) = \operatorname{Arccos}(0) + 2\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{2} + 2 \times \frac{\pi}{4}$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x)) + 2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x) = \frac{\pi}{2}}$$

5. La fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de composition des fonctions dérivables (en effet, la fonction $x \longmapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[1, +\infty[$ où la fonction racine carrée est dérivable). La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) \times \frac{1}{1 + \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2} \\
&= \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{x^2+1 - x\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \\
&= -\frac{1}{2(x^2+1)} \\
&= -\frac{\operatorname{Arctan}'(x)}{2}
\end{aligned}$$

La fonction $f + \dfrac{\operatorname{Arctan}}{2}$ est donc constante sur $\mathbb{R}$. Or :

$$f(0) + \frac{\operatorname{Arctan}(0)}{2} = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$$

donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{2}}$$

6.

Exercice 16

1. On a $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3} \in [0, 1[$ donc, par croissance stricte de la fonction Arctan sur $\mathbb{R}$, on a :

$$0 \leqslant \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) < \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$$

On en déduit que $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{3}\right) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a aussi $\dfrac{\pi}{4} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
Comme la fonction tan est injective sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right) \iff \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

Or, d'après la formule d'addition de la tangente, on a :

$$\begin{aligned}
\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)\right) &= \frac{\tan\left(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{2})\right) + \tan\left(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{3})\right)}{1 - \tan\left(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{2})\right)\tan\left(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{3})\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} \\
&= \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} \\
&= 1 \\
&= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)}$$

2. On a $\dfrac{3}{4} \in [0, 1]$ donc $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{3}{4}\right) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $2\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{3}{4}\right) \in [0, \pi]$. De même, on a $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{8}\right) \in [0, \pi]$ et la fonction cos est injective sur $[0, \pi]$ donc :

$$2\operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{8}\right) \iff \cos\left(2\operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{8}\right)\right)$$

Or :

$$\begin{aligned}
\cos\left(2\operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right)\right) &= 2\cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2 - 1 \\
&= 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 \\
&= \frac{9}{8} - 1 \qquad (\text{car } \cos \circ \operatorname{Arccos} = \operatorname{Id}_{[0,\pi]}) \\
&= \frac{1}{8} \\
&= \cos\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{8}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{2\operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{8}\right)}$$

3. ⋆ Commençons par calculer $x = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$. On a $\frac{1}{2}, \frac{1}{5} \in [0,1[$ donc $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right), \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$. On peut donc appliquer la formule d'addition de la tangente :

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \frac{\tan\left(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{2})\right) + \tan\left(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{5})\right)}{1 - \tan\left(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{2})\right)\tan\left(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{5})\right)}\\ &= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}} \qquad (\text{car } \tan\circ\operatorname{Arctan} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})\\ &= \frac{7}{9}\\ &= \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right)\right)\end{aligned}$$

Comme $\frac{7}{9} \in [0,1]$, on a $\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$. De même, on sait d'après le début du raisonnement que $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction tan est injective sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc l'égalité précédente entraîne que $x = \operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right)$.

⋆ De la même manière, on a $\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right), \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ donc la formule d'addition de la tangente nous donne :

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}} = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

La fonction tan est injective sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right), \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

donc :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Finalement :

$$\boxed{\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}}$$

4. (a) Comme $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ (car $\frac{1}{2} \in [0,1[$), on a (d'après la formule de duplication de la tangente) :

$$\begin{aligned}\tan\left(2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) &= \frac{2\tan\left(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{5})\right)}{1-\tan\left(\operatorname{Arctan}(\frac{1}{5})\right)^2}\\ &= \frac{2\times\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}\\ &= \frac{2}{5}\times\frac{25}{24}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\tan\left(2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{5}{12}}$$

Comme $\frac{5}{12} \in [0,1[$, on a :

$$2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)\right) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$$

On peut donc appliquer la formule d'addition et on a, en posant $x = 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$:

$$\begin{aligned}\tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2} &= \frac{2\times\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}\\ &= \frac{5}{6}\times\frac{144}{119}\end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{120}{119}}$$

(b) On a $\frac{\pi}{4}, \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ donc, d'après la formule d'addition de la tangente :

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right) &= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right)}\\ &= \frac{1+\frac{1}{239}}{1-1\times\frac{1}{239}}\\ &= \frac{240}{238}\\ &= \frac{120}{119}\\ &= \tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)\end{aligned}$$

L'inégalité :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\qquad \operatorname{Arctan}(x)\leqslant x,$$

que l'on peut pas exemple obtenir en étudiant la fonction $x\longmapsto x-\operatorname{Arctan}(x)$ (*cf.* exercice 10) nous donne $4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\leqslant\frac{4}{5}$. Comme $\frac{4}{5}\leqslant 1<\frac{\pi}{2}$, on a $4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$. On a aussi $\frac{\pi}{4}+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc l'injectivité de la fonction tan sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et l'égalité précédemment obtenue nous donnent :

$$\frac{\pi}{4}+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)=4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{\pi}{4}=4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)}$$

Exercice 17

1. Considérons la fonction $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \arctan(\operatorname{sh}(x))+\arccos(\operatorname{th}(x))\end{array}\right.$. On sait que les fonctions arctan et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $\arctan\circ\operatorname{sh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-1,1[$ où la fonction arccos est dérivable. Donc $\arccos\circ\operatorname{th}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Finalement, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f'(x)=\frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}(x)^2}-\frac{\operatorname{th}'(x)}{\sqrt{1-\operatorname{th}(x)^2}}$$

Or on sait que $1-\operatorname{th}^2=\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$, $\operatorname{th}'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$ et $1+\operatorname{sh}^2=\operatorname{ch}^2$ donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad f'(x)=\cdots=0$$

La fonction f a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$ (qui est un intervalle) donc f est constante sur $\mathbb{R}$. Or :

$$f(0)=\arctan(0)+\arccos(0)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\qquad f(x)=\arctan(\operatorname{sh}(x))+\arccos(\operatorname{th}(x))=\frac{\pi}{2}}$$

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{th}(x)=\frac{5}{13}\iff\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}=\frac{5}{13} &\iff 13\,\mathrm{e}^{2x}-13=5\,\mathrm{e}^{2x}+5\\ &\iff \mathrm{e}^{2x}=\frac{9}{4}\\ &\iff x=\ln\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

par injectivité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions réelles de l'équation } \operatorname{th}(x)=\frac{5}{13} \text{ est } \left\{\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right\}}$$

3. On a :

$$\operatorname{sh}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\frac{\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}-\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{3}{2}\right)}}{2}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{2}=\frac{5}{12}$$

En choisissant la valeur $x=\ln\left(\frac{3}{2}\right)\in\mathbb{R}$ dans l'identité obtenue à la question 1., on a :

$$\boxed{\arctan\left(\frac{5}{12}\right)+\arccos\left(\frac{5}{13}\right)=\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 18

Fait en TD.

Exercice 19

1. Il suffit d'utiliser les formules de duplication.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. La fonction tan : $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ est bijective donc il existe $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ tel que $x = \tan(t)$. On en déduit que :

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos(t)^2}} - 1}{\tan(t)}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{1}{\cos(t)} - 1}{\tan(t)}\right)$$

car la fontion cos est positive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-\cos(t)}{\sin(t)}\right) &= \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right) \\ &= \frac{t}{2} \end{aligned}$$

car $\dfrac{t}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et puisque $\operatorname{Arctan} \circ \tan = \operatorname{Id}_{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$.

On conclut donc que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{2}}$$

Exercice 20

1. Le domaine de validité de l'équation est $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ car $\mathscr{D}_{\operatorname{Arccos}} = \mathscr{D}_{\operatorname{Arcsin}} = [-1,1]$. On résout l'équation en raisonnant par analyse-synthèse.

   ⋆ **Analyse :** soit $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ tel que $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arccos}(x)$. Alors :

   $$\sin(\operatorname{Arcsin}(2x)) = \sin(\operatorname{Arccos}(x)) \qquad \textit{i.e.} \qquad 2x = \sin(\operatorname{Arccos}(x))$$

   car $\sin \circ \operatorname{Arcsin} = \operatorname{Id}_{[-1,1]}$. Comme $\operatorname{Arccos}(x) \in [0,\pi]$, on a $\sin(\operatorname{Arccos}(x)) \geqslant 0$. La dernière égalité implique donc que $2x \geqslant 0$, *i.e.* que $x \geqslant 0$. D'autre part :

   $$\begin{aligned} \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{\sin(\operatorname{Arccos}(x))^2} &= \sqrt{1 - \cos(\operatorname{Arccos}(x))^2} \\ &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

   car $\cos \circ \operatorname{Arccos} = \operatorname{Id}_{[-1,1]}$. On a donc l'égalité :

   $$2x = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{puis} \qquad 4x^2 = 1 - x^2,$$

   i.e. $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Or $x \geqslant 0$ donc $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

   ⋆ **Synthèse :** vérifions que $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ est bien solution de l'équation. On a bien $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ et on peut remonter les égalités pour obtenir $2x = \sin(\operatorname{Arccos}(x))$. On en déduit que $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arcsin}(\sin(\operatorname{Arccos}(x)))$. Comme $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \in [0,1]$, on a $\operatorname{Arccos}(x) \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Or $\operatorname{Arcsin} \circ \sin = \operatorname{Id}_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$, on a $\operatorname{Arcsin}(\sin(\operatorname{Arccos}(x))) = \operatorname{Arccos}(x)$. Autrement dit, x est solution de l'équation.

   Ainsi :

   $$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}}$$

2. On note $\mathscr{D}$ le domaine de validité de l'équation. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

   $$\begin{aligned} x \in \mathscr{D} &\iff \begin{cases} x \in \mathscr{D}_{\tan} \\ \tan(x) \in \mathscr{D}_{\operatorname{Arcsin}} \in [-1,1] \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \\ |\tan(x)| \leqslant 1 \end{cases} \\ &\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right] \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathscr{D} = \displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$.

   Soit $x \in \mathscr{D}$. On distingue deux cas.

   ⋆ **Premier cas :** $x \notin \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

   Alors $|x| \geqslant \dfrac{3\pi}{4} > \dfrac{\pi}{2}$ donc $x \notin \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Par ailleurs, $\operatorname{Arcsin}(\tan(x)) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\operatorname{Arcsin}(\tan(x)) \neq x$. Ainsi, x n'est pas solution de l'équation.

   ⋆ **Deuxième cas :** $x \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

   Comme $x, \operatorname{Arcsin}(\tan(x)) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a par injectivité de la fonction sin sur

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin}(\tan(x)) = x &\iff \sin(\operatorname{Arcsin}(\tan(x))) = \sin(x) \\
&\iff \tan(x) = \sin(x) \qquad (\text{car } \sin\circ\operatorname{Arcsin} = \operatorname{Id}_{[-1,1]}) \\
&\iff \sin(x)\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right) = 0 \\
&\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 1 \\
&\iff x = 0
\end{aligned}$$

car $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation est } \{0\}}$$

3. L'ensemble de validité de l'équation est $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue trois cas.
   - ⋆ **Premier cas :** $x \leqslant 0$
     Alors $\operatorname{Arctan}(x) \leqslant 0$ et $\operatorname{Arctan}(2x) \leqslant 0$. Ainsi, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(2x) \leqslant 0$ et donc x n'est pas solution de l'équation.
   - ⋆ **Deuxième cas :** $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
     On a :
     $$0 \leqslant \operatorname{Arctan}(x) < \operatorname{Arctan}(2x) \leqslant \frac{\pi}{4}$$
     Ainsi, $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(2x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et comme la fonction tan est injective sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :
     $$\begin{aligned}
     \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{4} &\iff \tan(\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(2x)) = 1 \\
     &\iff \frac{\tan(\operatorname{Arctan}(x)) + \tan(\operatorname{Arctan}(2x))}{1 - \tan(\operatorname{Arctan}(x))\tan(\operatorname{Arctan}(2x))} = 1 \\
     &\iff \frac{3x}{1-2x^2} = 1 \\
     &\iff 2x^2 + 3x - 1 = 0 \\
     &\iff x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} \\
     &\iff x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}
     \end{aligned}$$
     car $x \geqslant 0$. On a bien $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ car $4 \leqslant \sqrt{17} \leqslant 5$.
   - ⋆ **Troisième cas :** $x > \frac{1}{2}$
     Alors $\operatorname{Arctan}(2x) > \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$ et $\operatorname{Arctan}(x) \geqslant 0$ donc $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(2x) \neq \frac{\pi}{4}$. On en déduit que x n'est pas solution de l'équation.

   Ainsi :

   $$\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \left\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}}$$

Exercice 21

1. On considère la fonction :
   $$f : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right) \end{array}\right.$$
   La fonction $x \longmapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas (son discriminant étant strictement négatif). La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ est donc bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme composition de fonctions qui le sont). De même, la fonction $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Finalement, la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$\begin{aligned}
   f'(x) &= \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}}{1+\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)^2} \\
   &= \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2+1} \\
   &= \frac{(1+x^2) - \left[1 + (x^2+2x+1)\right]}{(1+x^2)(2+2x+x^2)} + \frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} \\
   &= -\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} + \frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} \\
   &= 0
   \end{aligned}$$
   On en déduit que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$. Or :
   $$f(0) = \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}(0) - \operatorname{Arctan}(1) = 0$$
   donc la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi :
   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \big(\mathrm{Arctan}(k+1) - \mathrm{Arctan}(k)\big) = \mathrm{Arctan}(n+1) - \underbrace{\mathrm{Arctan}(0)}_{=0}$$

car la somme obtenue est télescopique. Or :

$$\mathrm{Arctan}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{Arctan}(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente de limite } \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 22

1. On raisonne par récurrence.
   - ⋆ On a $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_2 = F_0 + F_1 = 1$ donc :

   $$F_1^2 - F_0F_2 = 1 = (-1)^0$$

   L'égalité est donc vérifiée au rang $n = 0$.
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n$. Montrons que $F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} = (-1)^{n+1}$. On a $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$ donc :

   $$\begin{aligned} F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} &= F_{n+2}^2 - F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) \\ &= F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+2}(F_{n+2} - F_{n+1}) - (F_nF_{n+2} + (-1)^n) \end{aligned}$$

   par hypothèse de récurrence. Comme $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, on a :

   $$F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} = F_{n+2}F_n - F_nF_{n+2} - (-1)^n = (-1)^{n+1}$$

   L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

   Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n}$$

2. Une récurrence double permet de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad F_n \geqslant 1$$

On en déduit que $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n} \geqslant 2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi :

$$0 \leqslant \frac{1}{F_{2n}} \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \frac{1}{F_{2n+1}} < 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \frac{1}{F_{2n+2}} < 1$$

Par croissance stricte de la fonction Arctan sur $\mathbb{R}$, on a :

$$0 \leqslant \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) \leqslant \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \leqslant \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) < \frac{\pi}{4}$$

et $0 \leqslant \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) < \frac{\pi}{4}$. En particulier, $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc, d'après la formule d'addition de la tangente, on a :

$$\begin{aligned} \tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right) &= \frac{\frac{1}{F_{2n+1}} + \frac{1}{F_{2n+2}}}{1 - \frac{1}{F_{2n+1}} \times \frac{1}{F_{2n+2}}} \\ &= \frac{F_{2n+1} + F_{2n+2}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1} \\ &= \frac{1}{F_{2n}} \times \frac{F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n+2}F_{2n}}{F_{2n+1}F_{2n+2} - 1} \end{aligned}$$

Or, d'après la question 1., on a :

$$F_{2n+1}^2 - F_{2n}F_{2n+2} = (-1)^{2n} = 1$$

donc :

$$\begin{aligned} F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n+2}F_{2n} &= F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n+1}^2 - 1 \\ &= F_{2n+1}(F_{2n+2} - F_{2n+1}) + F_{2n+1}^2 - 1 \\ &= F_{2n+1}F_{2n+2} - 1 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right) &= \frac{1}{F_{2n}} \\ &= \tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)\right) \end{aligned}$$

Or $\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right), \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et la fonction tan est injective sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc l'égalité précédente implique que :

$$\boxed{\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)}$$

3. Commençons par montrer que la suite $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positives (*cf.* question 2.) donc la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En effet, $F_1 \geqslant F_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + \underbrace{F_n}_{\geqslant 0} \geqslant F_{n+1}$$

D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ou bien convergente, ou bien divergente de limite $+\infty$. Si la limite de la suite est finie (notée ℓ), alors en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence vérifiée par la suite, on a $\ell = \ell + \ell$, *i.e.* $\ell = 0$. Ceci est absurde car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $F_n \geqslant F_1$, *i.e.* $F_n \geqslant 1$ donc $\ell \geqslant 1$. Ainsi, $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_1}\right) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) \\
&= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2(k+1)}}\right)\right] \quad \text{(question 2.)} \\
&= \frac{\pi}{4} + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2(n+1)}}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2(n+1)}}\right) \qquad \text{(car } F_2 = 1\text{)}
\end{aligned}$$

Or $F_{2(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2(n+1)}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Arctan}(0) = 0$. On en déduit que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}}$$