Trigonométrie

1 Cosinus, sinus, tangente

Exercice 1 1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 2 Résoudre les inéquations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\sin(x) > -\frac{1}{2}$
3. $|\tan(x)| \leqslant 1$

Exercice 3 Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(2x) = \sin(x)$
2. $\cos(x) + \sin(x) = 1 + \tan(x)$
3. $\sin(x) + \sin(2x) = 0$
4. $\tan(2x) = 3\tan(x)$
5. $2\sin(x) + \sin(3x) = 0$
6. $3\tan(x) = 2\cos(x)$
7. $\cos(x) = \sqrt{3}\sin(x)$
8. $2\cos(4x) + \sin(x) = \sqrt{3}\cos(x)$
9. $\cos(2x) - \sqrt{3}\sin(2x) = 1$
10. $\cos(2x) + \sin(2x) > \sqrt{\frac{3}{2}}$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right)$$

puis déterminer son signe.

Exercice 5 Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a l'égalité :

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} \qquad (n-1 \text{ racines carrées})$$

Exercice 6 *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) > x$$

2. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{x}{\sin(x)}$ est bijective de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on précisera.

Exercice 7 1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0, 2\pi[, \qquad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

2. Rappeler la valeur de $\lim_{t \to 0} \frac{\sin(t)}{t}$.
3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{x}$$

2 Arccos, Arccsin et Arctan

Exercice 8 1. Résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{1}{4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2. Résoudre le système $\begin{cases} \cos(x) = -\frac{3}{5} \\ \sin(x) = \frac{4}{5} \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 1. Donner les valeurs de :

(a) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right)$ (b) $\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)\right)$ (c) $\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right)$

(d) $\operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$ (e) $\operatorname{Arccos}\left(\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)\right)$

2. Tracer le graphe des fonctions :

(a) $x \longmapsto \operatorname{Arctan}(\tan(x))$ (b) $x \longmapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x))$ (c) $x \longmapsto \operatorname{Arcsin}(\sin(x))$

Exercice 10 *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \frac{x}{x^2+1} \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant x$$

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{|x|}{x} \times \frac{\pi}{2}$$

Exercice 11 Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 12 1. Résoudre l'inéquation $\sqrt{1-x^2} \leqslant x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2. Étudier la fonction $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{e}^{\operatorname{Arcsin}(x)}$ (sens de variation et graphe).

Exercice 13 Étudier les variations et préciser les limites aux bornes du domaine des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $g : x \longmapsto x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x-1}\right)$

Exercice 14 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. Simplifier les expressions suivantes :
   (a) $\sin(2\operatorname{Arccos}(x))$ $(x \in [-1,1])$
   (b) $\sin(2\operatorname{Arctan}(x))$ $(x \in \mathbb{R})$
   (c) $\tan(\operatorname{Arccos}(x))$ $(x \in [-1,1] \setminus \{0\})$
   (d) $\cos(3\operatorname{Arccos}(x))$ $(x \in [-1,1])$

3. Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(2x) = \operatorname{Arcsin}(x)$ d'inconnue $x \in [-1,1]$.

Exercice 15 En dérivant, simplifier les expressions suivantes :

1. $\operatorname{Arccos}(-x) + \operatorname{Arccos}(x)$
2. $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
3. $\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$
4. $\operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x)) + 2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)$
5. $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$
6. $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

Exercice 16 1. Montrer que $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$.

2. Montrer que $2\operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{8}\right)$.
3. Calculer $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$.
4. (a) Calculer $\tan\left(2\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$ puis $\tan\left(4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$.
   (b) En déduire la *formule de Machin* :

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$$

Exercice 17 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\operatorname{Arctan}\big(\operatorname{sh}(x)\big) + \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))$.

2. Résoudre l'équation $\operatorname{th}(x) = \frac{5}{13}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 18 Soit f la fonction d'expression :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. En posant $x = \sin(t)$, simplifier l'expression de f.

Exercice 19 1. Montrer que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}, \qquad \frac{1-\cos(t)}{\sin(t)} = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

2. En déduire une expression plus simple de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) \end{cases}$$

Exercice 20 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arccos}(x)$
2. $\operatorname{Arcsin}(\tan(x)) = x$
3. $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 21 1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 22 On appelle suite de Finonacci la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$$
2. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)$.

Exercice 23 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les fonctions :

$$f_n : x \longmapsto \cos(n \operatorname{Arccos}(x)) \qquad \text{et} \qquad g_n : x \longmapsto \frac{\sin(n \operatorname{Arccos}(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que les fonctions f_n et g_n sont polynomiales.