

# TRIGONOMETRIE

## 1 Cosinus, sinus, tangente

**Exercice 1** 1. Calculer  $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$  et en déduire  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ,  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

2. Calculer  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

**Exercice 2** Résoudre les inéquations suivantes d'inconnues  $x \in \mathbb{R}$  :

$$1. \cos(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad 2. \sin(x) > -\frac{1}{2} \qquad 3. |\tan(x)| \leq 1$$

**Exercice 3** Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnues  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{array}{ll} 1. \cos(2x) = \sin(x) & 2. \cos(x) + \sin(x) = 1 + \tan(x) \\ 3. \sin(x) + \sin(2x) = 0 & 4. \tan(2x) = 3 \tan(x) \\ 5. 2 \sin(x) + \sin(3x) = 0 & 6. 3 \tan(x) = 2 \cos(x) \\ 7. \cos(x) = \sqrt{3} \sin(x) & 8. 2 \cos(4x) + \sin(x) = \sqrt{3} \cos(x) \\ 9. \cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = 1 & 10. \cos(2x) + \sin(2x) > \sqrt{\frac{3}{2}} \end{array}$$

**Exercice 4** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right)$$

puis déterminer son signe.

**Exercice 5** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on a l'égalité :

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ racines carrées})$$

**Exercice 6** Les trois questions sont indépendantes.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan(x) > x$$

2. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$  est bijective de l'intervalle  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  sur un intervalle que l'on précisera.

**Exercice 7** 1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

2. Rappeler la valeur de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ .

3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{x}$$

## 2 Arccos, Arccsin et Arctan

**Exercice 8** 1. Résoudre l'équation  $\sin(x) = \frac{1}{4}$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

2. Résoudre le système  $\begin{cases} \cos(x) = -\frac{3}{5} \\ \sin(x) = \frac{4}{5} \end{cases}$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 9** 1. Donner les valeurs de :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \arccos\left(\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right) & \text{(b)} \arcsin\left(\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)\right) & \text{(c)} \arctan\left(\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right) \\ \text{(d)} \arcsin\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) & \text{(e)} \arccos\left(\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)\right) & \end{array}$$

2. Tracer le graphe des fonctions :

$$\text{(a)} x \mapsto \arctan(\tan(x)) \quad \text{(b)} x \mapsto \arccos(\cos(x)) \quad \text{(c)} x \mapsto \arcsin(\sin(x))$$

**Exercice 10** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{x^2 + 1} \leq \arctan(x) \leq x$$

**Exercice 11** Étudier les variations et préciser les limites aux bornes du domaine des fonctions suivantes :

1.  $f : x \mapsto x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$
2.  $g : x \mapsto x \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$

**Exercice 12** 1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. Simplifier les expressions suivantes :

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| (a) $\sin(2 \arccos(x))$ | (b) $\sin(2 \arctan(x))$ |
| (c) $\tan(\arccos(x))$   | (d) $\cos(3 \arccos(x))$ |

3. Résoudre l'équation  $\arctan(2x) = \arcsin(x)$  d'inconnue  $x \in [-1, 1]$ .

**Exercice 13** En dérivant, simplifier les expressions suivantes :

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\arccos(-x) + \arccos(x)$                   | 2. $\arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$            |
| 3. $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ | 4. $\arccos(\operatorname{th}(x)) + 2 \arctan(e^x)$ |
| 5. $\arctan(\sqrt{x^2+1}-x)$                    | 6. $\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$     |

**Exercice 14** 1. Montrer que  $\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ .

2. Montrer que  $2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$ .

3. Calculer  $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$ .

4. (a) Calculer  $\tan\left(2 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)$  puis  $\tan\left(4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right)$ .

(b) En déduire la *formule de Machin* :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

**Exercice 15** 1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , simplifier  $\arctan(\operatorname{sh}(x)) + \arccos(\operatorname{th}(x))$ .

2. Résoudre l'équation  $\operatorname{th}(x) = \frac{5}{13}$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

3. En déduire que :

$$\arctan\left(\frac{5}{12}\right) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}$$

**Exercice 16** Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

1.  $\arcsin(2x) = \arccos(x)$

2.  $\arcsin(\tan(x)) = x$

3.  $\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$

4.  $\arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right) + \arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{\pi}{4}$

**Exercice 17** 1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$ . Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 18** On appelle suite de Fibonacci la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $F_0 = 0, F_1 = 1$  et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \arctan\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)$ .