

TRIGONOMETRIE

1 Cosinus, sinus, tangente

- Exercice 1**
1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
 2. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 2 Résoudre les inéquations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\sin(x) > -\frac{1}{2}$
3. $|\tan(x)| \leq 1$

Exercice 3 Résoudre les (in)équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(2x) = \sin(x)$
2. $\cos(x) + \sin(x) = 1 + \tan(x)$
3. $\sin(x) + \sin(2x) = 0$
4. $\tan(2x) = 3 \tan(x)$
5. $2 \sin(x) + \sin(3x) = 0$
6. $3 \tan(x) = 2 \cos(x)$
7. $\cos(x) = \sqrt{3} \sin(x)$
8. $2 \cos(4x) + \sin(x) = \sqrt{3} \cos(x)$
9. $\cos(2x) - \sqrt{3} \sin(2x) = 1$
10. $\cos(2x) + \sin(2x) > \sqrt{\frac{3}{2}}$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2^k}\right)$$

puis déterminer son signe.

Exercice 5 Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a l'égalité :

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ racines carrées})$$

Exercice 6 Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan(x) > x$$

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$ est bijective de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on précisera.

Exercice 7 1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, 2\pi[, \quad \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

2. Rappeler la valeur de $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t}$.
3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{x}$$

2 Arccos, Arccsin et Arctan

Exercice 8 1. Résoudre l'équation $\sin(x) = \frac{1}{4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2. Résoudre le système $\begin{cases} \cos(x) = -\frac{3}{5} \\ \sin(x) = \frac{4}{5} \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 1. Donner les valeurs de :

$$\begin{aligned} \text{(a) } \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right) & \quad \text{(b) } \operatorname{Arccsin}\left(\sin\left(\frac{17\pi}{6}\right)\right) & \quad \text{(c) } \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right) \\ \text{(d) } \operatorname{Arccsin}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) & \quad \text{(e) } \operatorname{Arccos}\left(\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)\right) \end{aligned}$$

2. Tracer le graphe des fonctions :

$$\text{(a) } x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan(x)) \quad \text{(b) } x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x)) \quad \text{(c) } x \mapsto \operatorname{Arccsin}(\sin(x))$$

Exercice 10 Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{x^2 + 1} \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq x$$

2. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{|x|}{x} \times \frac{\pi}{2}$$

Exercice 11 Montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 12 1. Résoudre l'inéquation $\sqrt{1-x^2} \leq x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2. Étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2} e^{\operatorname{Arcsin}(x)}$ (sens de variation et graphe).

Exercice 13 Étudier les variations et préciser les limites aux bornes du domaine des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $g : x \mapsto x \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x-1}\right)$

Exercice 14 1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. Simplifier les expressions suivantes :

- | | |
|--|---|
| (a) $\sin(2 \operatorname{Arccos}(x))$ ($x \in [-1, 1]$) | (b) $\sin(2 \operatorname{Arctan}(x))$ ($x \in \mathbb{R}$) |
| (c) $\tan(\operatorname{Arccos}(x))$ ($x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$) | (d) $\cos(3 \operatorname{Arccos}(x))$ ($x \in [-1, 1]$) |

3. Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(2x) = \operatorname{Arcsin}(x)$ d'inconnue $x \in [-1, 1]$.

Exercice 15 En dérivant, simplifier les expressions suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $\operatorname{Arccos}(-x) + \operatorname{Arccos}(x)$ | 2. $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ |
| 3. $\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ | 4. $\operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x)) + 2 \operatorname{Arctan}(e^x)$ |
| 5. $\operatorname{Arctan}(\sqrt{x^2+1}-x)$ | 6. $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ |

Exercice 16 1. Montrer que $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)$.

2. Montrer que $2 \operatorname{Arccos}\left(\frac{3}{4}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{8}\right)$.

3. Calculer $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right)$.

4. (a) Calculer $\tan\left(2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$ puis $\tan\left(4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$.
(b) En déduire la *formule de Machin* :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$$

Exercice 17 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) + \operatorname{Arccos}(\operatorname{th}(x))$.

2. Résoudre l'équation $\operatorname{th}(x) = \frac{5}{13}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

3. En déduire que :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{5}{12}\right) + \operatorname{Arccos}\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 18 Soit f la fonction d'expression :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
2. En posant $x = \sin(t)$, simplifier l'expression de f .

Exercice 19 1. Montrer que :

$$\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}, \quad \frac{1 - \cos(t)}{\sin(t)} = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

2. En déduire une expression plus simple de la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) \end{cases}$$

Exercice 20 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arccos}(x)$
2. $\operatorname{Arcsin}(\tan(x)) = x$
3. $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 21 1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x^2 + x + 1}\right)$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k^2 + k + 1}\right)$. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 22 On appelle suite de Finonacci la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1}^2 - F_n F_{n+2} = (-1)^n$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)$.

Exercice 23 Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les fonctions :

$$f_n : x \mapsto \cos(n \operatorname{Arccos}(x)) \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \frac{\sin(n \operatorname{Arccos}(x))}{\sqrt{1-x^2}}$$

Montrer que les fonctions f_n et g_n sont polynomiales.