Université Lille 1 Sciences et Technologies

Laboratoire Paul Painlevé

Thèse

présentée à

l'Université Lille 1

École Doctorale des Sciences Pour l'Ingénieur Lille

pour obtenir le grade de

Docteur de l'université

Spécialité MATHÉMATIQUES

par

Vincent DEVINCK

Systèmes dynamiques linéaires : vitesse de mélange et spectre ponctuel unimodulaire

---

sous la direction de Catalin Badea et Sophie Grivaux

Soutenue le 29 Juin 2012 devant le Jury composé de :

Catalin Badea	Université Lille 1	(Directeur)
Robert Deville	Université Bordeaux 1	(Rapporteur)
Sophie Grivaux	Université Lille 1	(Directrice)
Karl Grosse-Erdmann	Université de Mons	(Rapporteur)
Étienne Matheron	Université d'Artois	
Maria Roginskaya	Chalmers University	

Laboratoire Paul Painlevé (UMR CNRS 8524)
Université Lille 1
Cité Scientifique
59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX

École Doctorale des Sciences Pour l'Ingénieur Lille
Bâtiment P3 (Bureau 306)
Cité Scientifique
59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX

A mes parents,
à Alicia.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mes directeurs de thèse, Sophie et Catalin, qui ont accepté de m'encadrer durant ces trois années de thèse. Je remercie tout particulièrement Sophie qui m'a principalement dirigé dans mon travail de recherche. Ses encouragements constants, sa patience et son optimisme m'ont beaucoup aidé dans mon travail. Je la remercie également pour le temps et les mathématiques qu'elle a partagés avec moi. Les sujets de recherche qu'elle m'a proposés m'ont passionné et j'ai beaucoup apprécié l'élégance et la clarté avec lesquelles elle m'a transmise son savoir mathématique. Je remercie aussi Catalin pour sa disponibilité, ses encouragements et pour les discussions passionnantes que l'on a pu avoir, essentiellement sur la deuxième partie de la thèse.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Robert Deville et Karl-Goswin Grosse-Erdmann qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de mon travail. Je les remercie pour la rapidité et l'attention avec laquelle ils ont relu mon manuscrit. J'ai également la chance de compter sur Étienne Matheron et Maria Roginskaya parmi les membres du jury et je les remercie vivement d'avoir accepté d'en faire partie.

Je souhaite aussi remercier l'équipe du Laboratoire Paul Painlevé pour leur acceuil. J'ai pu bénéficier de conditions de travail agréables durant mes années de thèse. Je remercie notamment les chaleureuses équipes d'Analyse Fonctionnelle de Lille, Lens et Mons qui offrent un cadre de recherche stimulant par le biais du groupe de travail et des séminaires.

Ces trois années de thèse ont aussi été pour moi la chance d'enseigner à l'université dans le cadre du monitorat. Je tiens à remercier tout particulièrement Stéphane Malek pour sa sympathie et pour le travail d'enseignement fait en commun.

Je remercie également mes amis, mathématiciens ou non, lillois et dunkerquois, qui m'ont de près ou de loin entouré pendant ces trois années de recherche.

Cette thèse, aboutissement de longues années d'études, je la dois à ma famille et plus particulièrement à mes parents qui m'ont toujours soutenu et offert un cadre de vie agréable, et je souhaite les remercier pour tout ce qu'ils font pour moi.

Enfin, et surtout, merci à toi, Alicia, pour ta compréhension, merci pour tout.

Résumé

Résumé (français)

Dans cette thèse, décomposée en deux parties, nous nous intéressons à l'étude des vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach séparable.

La première partie de la thèse fait suite à un travail réalisé par F. Bayart et S. Grivaux dans lequel ils donnent une condition portant sur les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 d'un opérateur sur un espace de Hilbert complexe séparable pour qu'il admette une mesure gaussienne non dégénérée pour laquelle il est fortement mélangeant. En exploitant cette condition sur les vecteurs propres, nous cherchons à estimer la vitesse de mélange de l'opérateur en question. Nous montrons qu'il n'y a pas de vitesse de mélange en général puis nous démontrons que si les vecteurs propres de l'opérateur sont paramétrés par des champs de vecteurs propres réguliers, alors on a une vitesse de mélange si on travaille avec des classes de fonctions suffisamment régulières.

Dans la deuxième partie de la thèse, on étudie le spectre ponctuel unimodulaire d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach séparable. En nous appuyant sur les résultats connus sur les suites de Jamison, nous étudions l'analogue de ces suites pour les semi-groupes d'opérateurs fortement continus et nous en donnons une caractérisation. Nous nous intéressons également à des problèmes de construction d'espaces de Banach et d'opérateurs sur ces espaces pour des suites qui ne sont pas des suites de Jamison. Nous généralisons ensuite la notion de suite de Jamison en étudiant le spectre ponctuel unimodulaire d'une représentation d'un groupe donné qui est borné par rapport à une suite d'éléments de ce groupe. En particulier, on caractérise les suites de Jamison d'un groupe abélien de type fini.

Mots-clefs

Théorie ergodique, Transformation fortement mélangeante, Vitesse de mélange, Mesure gaussienne, Spectre ponctuel unimodulaire, Suites de Jamison.

Linear dynamical systems : speed of mixing and unimodular point spectrum

Abstract

In this thesis, we study into two different parts the eigenvectors associated to unimodular eigenvalues of an operator on a separable Banach space.

The first part of the thesis follows a work of F. Bayart and S. Grivaux where they give condition on the eigenvectors associated to unimodular eigenvalues of an operator on a complex separable Hilbert space to admit a Gaussian measure for which the operator defines a strongly mixing transformation. With this condition on the eigenvectors, we investigate the subject of speed of mixing of the strongly mixing operator. We prove that there is no way to obtain a uniform speed of mixing in general. Then we prove that if the eigenvectors associated to unimodular eigenvalues of the operator are parametrized by a countable family of regular eigenvector fields then we have a speed of mixing by considering regular classes of functions.

In the second part of the thesis, we study the unimodular point spectrum of an operator on a separable Banach space. By using the results on Jamison sequences, we give a characterization of Jamison sequences for strongly continuous semigroups. We are also concerned in the problem of construction of Banach space and operator on this space when the sequences are not Jamison sequences. Then we generalize the notion of Jamison sequence by studying the unimodular point spectrum of a group representation which is bounded with respect to some sequence of this group. In particular, we characterize Jamison sequences of a finitely generated abelian group.

Keywords

Ergodic theory, Strongly mixing transformation, Speed of mixing, Gaussian measure, Unimodular point spectrum, Jamison sequences.

Table des matières

Introduction

Cette thèse est composée de dix chapitres, que nous pouvons regrouper en deux parties. La première partie, constituée des chapitres 1 à 6, porte sur l'étude de la vitesse de mélange des opérateurs fortement mélangeants sur les espaces de Hilbert par rapport à une mesure gaussienne. Dans la deuxième partie, qui regroupe les chapitres 7 à 10, il est question des suites de Jamison et de sujets connexes autour de ce thème. Bien que les deux parties soient différentes tant par la nature des résultats obtenus que par les techniques utilisées, celles-ci ont en commun l'étude des vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach séparable et plus particulièrement l'étude de la taille du spectre ponctuel unimodulaire d'un opérateur. Après ces deux parties, on trouve en annexe des résultats techniques utilisés tout au long des chapitres précédents et qui ont été volontairement isolés pour ne pas alourdir certaines démonstrations.

La première partie de la thèse s'inscrit dans la continuité d'une étude réalisée par F. Bayart et S. Grivaux en 2006 dans [4] et [5]. Dans ce travail, ils ont trouvé une condition (portant sur les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1) pour qu'un opérateur linéaire borné T sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ complexe séparable de dimension infinie admette une mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$ telle que la transformation $T : (\mathcal{H}, \mathcal{B}, m) \longrightarrow (\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ soit fortement mélangeante par rapport à la mesure m, ce qui signifie que les *corrélations*

$$\mathcal{I}_n(f, g) := \int_{\mathcal{H}} f(T^n x) g(x)\, dm(x) - \int_{\mathcal{H}} f\, dm \int_{\mathcal{H}} g\, dm$$

convergent vers zéro quand n tend vers $+\infty$ pour tous $f, g \in L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. Le problème auquel nous nous intéressons est alors le suivant : à quelle vitesse la suite $(\mathcal{I}_n(f, g))_{n\geq 0}$ converge-t-elle vers zéro ? En particulier, nous commençons par nous poser la question générale suivante : peut-on trouver une suite de nombres réels strictement positifs $(s_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers zéro telle que pour tous $f, g \in L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$, il existe une constante $C_{f,g} > 0$ telle que l'on ait

$$|\mathcal{I}_n(f, g)| \leq C_{f,g}\, s_n \tag{1}$$

pour tout entier naturel n ? Autrement dit, existe-t-il une vitesse de mélange *globale* dans l'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$? Le problème de la vitesse de mélange fait référence à ce type de question générale.

Dans le premier chapitre, nous introduisons les concepts généraux issus de la théorie ergodique qui nous seront utiles dans les chapitres suivants. Nous définissons les notions de mesure invariante, de transformation ergodique ou fortement mélangeante et nous illustrons ces définitions en donnant des exemples concrets très simples issus de la théorie des systèmes dynamiques mesurables *compacts* qui est le cadre dans lequel le problème de la vitesse de mélange est le plus étudié. Avec l'Exemple 1.1.7, on comprend notamment le type de résultat que l'on souhaite obtenir en ce qui concerne le problème de la vitesse de mélange. Nous nous plaçons ensuite dans le cadre des systèmes dynamiques mesurables *linéaires* en considérant un opérateur linéaire borné T sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ complexe séparable de dimension infinie. Avant de parler de vitesse de mélange, il faut que T définisse une transformation fortement mélangeante par rapport à une certaine mesure de probabilité m sur $\mathcal{H}$. Ce problème a été étudié en 2006 par F. Bayart et S. Grivaux dans [4].

Dans le chapitre 2, nous commençons par définir les notions de mesure gaussienne sur un espace de Hilbert et d'opérateur de covariance R associé à une mesure gaussienne puis nous expliquons les idées du résultat de F. Bayart et S. Grivaux assurant l'existence d'une mesure gaussienne m sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ pour que la transformation $T : (\mathcal{H}, \mathcal{B}, m) \longrightarrow (\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ soit fortement mélangeante. La condition sur l'opérateur T pour qu'une telle mesure existe est qu'il y ait « suffisamment » de vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1. Nous expliquons les principales articulations de la preuve, notamment l'existence d'une *équation d'entrelacement* qui sera fondamentale dans notre étude. Le paramétrage des vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 sera aussi déterminant dans l'étude de la vitesse de mélange. Dans toute la thèse, nous avons choisi de faire nos calculs sous l'hypothèse générale où les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un unique champ de vecteurs propres E afin de ne pas alourdir les calculs. Tous les résultats exposés sur la vitesse de mélange se généralisent aisément au cas où les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par une famille finie ou infinie dénombrable de champs de vecteurs propres et on mentionnera la généralisation pour une famille de champs de vecteurs propres pour chaque résultat établi. Dans la suite du chapitre 2, on remarque que si on fait une hypothèse de régularité sur le champ de vecteurs propres E, à savoir que $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ est une fonction α-hölderienne, alors la suite des corrélations $(\mathcal{I}_n(f, \overline{g}))_{n \geq 0}$ converge vers zéro à la vitesse $n^{-\alpha}$ lorsque f et g sont des formes linéaires continues sur $\mathcal{H}$. On note f_x la forme linéaire continue $y \longmapsto \langle x, y \rangle$ (où x est un vecteur de $\mathcal{H}$). Nous avons obtenu le résultat suivant.

Proposition. (Corollaire 2.3.3) *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module* 1 *sont paramétrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant et α-hölderien* (*où* $\alpha \in (0, 1]$). *Pour tous vecteurs x et y de $\mathcal{H}$, la suite des corrélations $\big(\mathcal{I}_n(f_x, \overline{f_y})\big)_{n \geq 1}$ converge vers zéro à la* *vitesse* $n^{-\alpha}$ *et plus précisément :*

$$\left|\mathcal{I}_n(f_x, \overline{f_y})\right| \leq \frac{C(E,\alpha)\,||x||\,||y||}{n^\alpha}$$

pour tout entier naturel n non nul, où $\overline{f_y}$ *désigne la fonction* $z \longmapsto \overline{f_y(z)}$.

A la suite de ce résultat, on peut par exemple se demander s'il n'y a pas de vitesse de mélange globale dans $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ avec pour vitesse de mélange $n^{-\alpha}$. Autrement dit, il s'agit de répondre à la question posée dans (1) avec $s_n = n^{-\alpha}$. La proposition précédente est la motivation principale de l'étude de la vitesse de mélange. Avant d'aller plus loin dans cette étude (qui englobe les chapitres 3, 4, 5 et 6), nous donnons à la fin du chapitre 2 quelques exemples d'opérateurs fortement mélangeants sur les espaces de Hilbert où nous voyons que les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 sont σ-engendrants (où σ désigne la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$) et paramétrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres qui est régulier (analytique ou hölderien), ce qui légitime la condition de régularité faite sur notre champ de vecteurs propres E (à savoir que E est une fonction α-hölderienne). Les exemples exposés dans la dernière section du chapitre 2 soulèvent naturellement la question suivante.

Question. (Question 2.4.5) Si $\alpha \in (0, 1]$, peut-on trouver un espace de Hilbert séparable et un opérateur linéaire borné sur cet espace qui admette un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres qui soit *exactement* α-hölderien (c'est-à-dire α-hölderien et pas β-hölderien pour $\beta > \alpha$) ?

On donne une réponse partielle à cette question en travaillant avec un opérateur de décalage à poids $B_{\mathbf{w}}$ sur l'espace de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$.

Théorème. (Théorème 2.4.6) *Soit* α *un nombre réel dans* $\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$. *Il existe une suite de nombres réels strictement positifs* $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$ *telle que l'opérateur de décalage pondéré* $B_{\mathbf{w}}$ *sur* $\ell_2(\mathbb{N})$ *admette un champ de* $\mathbb{T}$*-vecteurs propres* σ*-engendrant et exactement* α*-hölderien.*

Nous revenons dans le chapitre 3 à notre problème sur la vitesse de mélange et plus particulièrement au problème évoqué dans (1) concernant la vitesse de mélange globale. Dans ce chapitre, nous revenons à une situation plus générale où les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de vecteurs propres (ou une famille finie ou infinie dénombrable de champs de vecteurs propres) sans hypothèse de régularité sur le(s) champ(s) de vecteurs propres. Après avoir établi quelques propriétés préliminaires, notamment l'existence d'une base hilbertienne $(e_\ell)_{\ell\geq 1}$ de $\mathcal{H}$ dans laquelle l'opérateur de covariance R est diagonal, nous démontrons qu'il n'existe pas de vitesse de mélange globale dans l'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. On montre même que les fonctions f et g qui mettent en défaut (1) peuvent être choisies dans l'*espace gaussien*

$$\mathcal{G}_\mathbb{C} := \overline{\text{vect}}^{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big[\langle e_\ell, \cdot\rangle\,;\,\ell \geq 1\big].$$

Nous démontrons plus précisément le résultat suivant.

Théorème. (Théorème 3.2.2) *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant. Alors, pour toute suite $(s_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs qui converge vers zéro, il existe une fonction f appartenant à l'espace $\mathcal{G}_\mathbb{C}$ tel que*

$$\left|\mathcal{I}_n(\overline{f}, f)\right| \geq s_n$$

pour tout entier naturel n, où $\overline{f}$ désigne la fonction $x \longmapsto \overline{f(x)}$.

On démontre un résultat analogue lorsque les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par une famille (au plus dénombrable) de champs de vecteurs propres $(E_i)_{i\in I}$.

Le chapitre 3 montre donc qu'il n'y a à priori pas de vitesse de convergence vers zéro de la suite des corrélations $(\mathcal{I}_n(f,g))_{n\geq 0}$ pour des fonctions arbitraires f et g dans l'espace $L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$. Ceci nous suggère alors de chercher une vitesse de mélange pour des fonctions f et g *régulières* dans $L^2_\mathbb{R}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$. Autrement dit, la question qui se pose maintenant est la suivante : peut-on trouver des classes de fonctions régulières $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ (contenues dans $L^2_\mathbb{R}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$) telles que si les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de vecteurs propres σ-engendrant et α-höldérien E, alors pour tous $f \in \mathcal{X}$ et $g \in \mathcal{Y}$, il existe une constante $C_{f,g} > 0$ telle que l'on ait

$$|\mathcal{I}_n(f,g)| \leq \frac{C_{f,g}}{n^\alpha} \tag{2}$$

pour tout entier naturel n non nul ? Le but des chapitres 4, 5 et 6 est de répondre à cette question et nous supposons dorénavant que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un unique champ de vecteurs propres σ-engendrant E qui est α-höldérien.

Dans le chapitre 4, nous introduisons la notion de *transformée de Wick* d'un élément de $L^2_\mathbb{R}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$, ce qui nous permet de donner une décomposition orthogonale de l'espace $L^2_\mathbb{R}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ (issue de la théorie des espaces de Fock) :

$$L^2_\mathbb{R}(\mathcal{H},\mathcal{B},m) = \bigoplus_{k\geq 0} :\mathcal{G}^k: .$$

Grâce à cette décomposition, nous pouvons donner une expression manipulable des corrélations $\mathcal{I}_n(f,g)$ entre deux fonctions arbitraires f et g de $L^2_\mathbb{R}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$. En particulier, cette décomposition orthogonale nous permettra d'écrire toute fonction f de cet espace suivant son chaos de Wiener

$$f = \sum_{k\geq 0} \mathcal{P}_{:\mathcal{G}^k:} f.$$

A l'aide de ce chaos de Wiener, nous pourrons ramener l'étude de l'estimation des corrélations $\mathcal{I}_n(f,g)$ à celle des corrélations $\mathcal{I}_n\big(\mathcal{P}_{:\mathcal{G}^k:} f, \mathcal{P}_{:\mathcal{G}^\ell:} g\big)$. Nous donnons une base orthogonale de chaque espace : $\mathcal{G}^k$: ce qui nous permet de décomposer les éléments appartenant à ces espaces et qui simplifie encore notre problème. On donne à la fin du chapitre 4 une expression générale des corrélations entre deux éléments de la base orthogonale de l'espace : $\mathcal{G}^k$:.

Dans les chapitres 5 et 6, nous définissons nos espaces de fonctions régulières $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ pour lesquels nous allons montrer qu'il y a une vitesse de mélange, ce qui nous donnera une réponse au problème (2). Pour définir l'espace de fonctions $\mathcal{X}$, nous remarquons que si $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction infiniment différentiable sur $\mathcal{H}$ (on considère la notion de fonction différentiable au sens de Gâteaux) vérifiant une certaine condition d'intégrabilité, à savoir que

$$\int_{\mathcal{H}} \left|\left|D^k f(x)\right|\right| dm(x) < +\infty \qquad \text{pour tout entier naturel } k,$$

et si $f = \sum_{k\geq 0} f_k$ est le chaos de Wiener de f, alors les coefficients de Fourier (dans la base orthogonale de : $\mathcal{G}^k$:) ont une représentation intégrale (Lemme 5.1.1). Ceci nous amène à définir une forme k-linéaire bornée $\mathcal{B}_{f_k}$ naturellement associée à la composante f_k de f qui s'exprime en fonction des coefficients de Fourier de f_k, ce qui permet de faire le lien entre les composantes f_k de f avec la fonction f elle-même. Plus précisément, l'espace $\mathcal{X}$ est défini de la façon suivante : on dit que $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ appartient à l'espace $\mathcal{X}$ si les applications $\mathcal{B}_{f_k}$ définissent des formes k-linéaires bornées (où $\mathcal{B}_{f_k}$ est l'application naturellement associée à la composante f_k de f dans la décomposition de la fonction f suivant son chaos de Wiener $f = \sum_{k\geq 0} f_k$) et telles que la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ||\mathcal{B}_{f_k}||^2$$

soit convergente. On munit cet espace de la norme $||\cdot||_{\mathcal{X}}$ définie par

$$||f||_{\mathcal{X}} := \left(||f||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} + \sum_{k=0}^{+\infty} ||\mathcal{B}_{f_k}||^2 \right)^{1/2}.$$

On définit l'espace $\mathcal{Y}$ de manière analogue : on dit que $g \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ appartient à l'espace $\mathcal{Y}$ si les applications $\mathcal{B}_{g_k}$ définissent des formes k-linéaires bornées et telles que la quantité

$$\sup_{k\geq 0} k!\, ||\mathcal{B}_{f_k}||$$

soit finie. On munit cet espace de la norme $||\cdot||_{\mathcal{Y}}$ définie par

$$||g||_{\mathcal{Y}} := ||g||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} + \sup_{k\geq 0} k!\, ||\mathcal{B}_{g_k}||.$$

Nous donnons ensuite des exemples de fonctions appartenant aux espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. Nous démontrons notamment que si ϕ est une fonction de type exponentiel (avec un type *suffisamment petit*), alors la fonction $\mathfrak{Re}\big(\phi \circ ||\cdot||^2\big)$ appartient à l'espace $\mathcal{X}$.

Au début du chapitre 6, nous étudions le problème (2) dans le cas particulier où f et g sont des éléments de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ *d'un nombre fini de variables.* Nous introduisons la suite $(\mathfrak{e}_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}^*}$ de vecteurs de $\mathcal{H}$ définie par

$$\mathfrak{e}_\ell = e_\ell \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{e}_\ell = ie_{-\ell} \qquad \text{pour tout entier naturel } \ell \text{ non nul.}$$

Pour tout entier naturel i non nul, nous notons σ_i^2 la variance de la variable aléatoire $\mathfrak{Re}\langle e_i, \cdot\rangle$ dans l'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ (et nous posons $\sigma_{-i}^2 = \sigma_i^2$). Nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème. (Théorème 6.1.1) *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant et α-hölderien (où $\alpha \in (0, 1]$). Soient N un entier naturel non nul et*

$$f = \phi\big(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle, \dots, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle\big), \;\; g = \psi\big(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle, \dots, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle\big)$$

des fonctions à valeurs réelles qui appartiennent à l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. Alors il existe une constante $D_N > 0$ (qui dépend seulement de N et de $\sigma_1, \dots, \sigma_N$) telle que

$$\big|\mathcal{I}_n(f, g)\big| \leq \frac{D_N}{n^\alpha} \, ||f||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \, ||g||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}$$

pour tout entier naturel n non nul.

Nous revenons ensuite au problème général (c'est-à-dire au problème (2)) et nous établissons des estimations complémentaires, comme l'estimation des moments d'ordres pairs d'une mesure gaussienne, qui sont utiles pour aboutir au théorème final sur la vitesse de mélange dans les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. On remarque en particulier que la vitesse de mélange pour la fonction très particulière $|| \cdot ||^2$ est de l'ordre de $n^{-2\alpha}$. La structure hilbertienne de l'espace $\mathcal{H}$ nous permet en effet d'obtenir l'estimation suivante.

Proposition. (Proposition 6.2.1) *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant et α-hölderien (où $\alpha \in (0, 1]$). Pour tout entier naturel n non nul, on a*

$$0 \leq \mathcal{I}_n\big(|| \cdot ||^2, || \cdot ||^2\big) \leq \frac{C(E)^2 \pi^{2\alpha}}{n^{2\alpha}} \, ||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}.$$

C'est cette estimation qui fournit la vitesse de mélange dans le théorème final. Après avoir estimé les corrélations pour des fonctions f_k et g_k appartenant au même espace : $\mathcal{G}^k$:, nous démontrons finalement le résultat suivant.

Théorème. (Théorème 6.4.2) *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant et α-höldérien (où $\alpha \in (0,1]$). Alors il existe une constante $D(E) > 0$ telle que pour tous $f \in \mathcal{X}$ et $g \in \mathcal{Y}$, on ait*

$$\big|\mathcal{I}_n(f,g)\big| \leq \frac{D(E)}{n^\alpha}\,||f||_{\mathcal{X}}\,||g||_{\mathcal{Y}}$$

pour tout entier naturel n non nul.

On peut en particulier énoncer ce résultat pour les exemples de fonctions trouvées dans les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ dans le chapitre 5.

Corollaire. (Corollaire 6.4.3) *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant et α-höldérien (où $\alpha \in (0,1]$). Alors pour toute fonction $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de type exponentiel $\kappa < \big(2||E||_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}\big)^{-1}$ et pour tout polynôme p en les variables $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_i, \cdot\rangle$, on a*

$$\big|\mathcal{I}_n\big(\mathfrak{Re}\big(\phi \circ ||\cdot||^2\big), p\big)\big| \leq \frac{D(E)}{n^\alpha}\big|\big|\mathfrak{Re}\big(\phi \circ ||\cdot||^2\big)\big|\big|_{\mathcal{X}}\,||p||_{\mathcal{Y}}$$

pour tout entier naturel n non nul, où la constante $D(E)$ est celle du théorème précédent.

La deuxième partie de la thèse, constituée des chapitres 7, 8, 9 et 10, est consacrée à l'étude de la taille du spectre ponctuel unimodulaire $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ d'un opérateur linéaire borné T sur un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie. Le premier résultat connu dans cette voie, démontré par B. Jamison [19] en 1965 nous dit qu'un opérateur linéaire borné T sur un espace de Banach complexe séparable qui est à puissances bornées a nécessairement « peu » de valeurs propres de module 1 au sens où l'ensemble $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ est au plus dénombrable. Ransford [29], Ransford et Roginskaya [30] puis Badea et Grivaux [2] ont ensuite étudié le cas où l'opérateur T est à puissances bornées par rapport à une suite d'entiers naturels strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ et ils se sont demandés ce qu'on pouvait conclure sur la taille du spectre ponctuel unimodulaire de T. Les suites de Jamison sont les suites $(n_k)_{k\geq 0}$ d'entiers naturels pour lesquelles l'ensemble $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ est au plus dénombrable lorsque T est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach complexe séparable à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$. Ces auteurs ont notamment montré que le fait d'être une suite de Jamison dépendait de la croissance de la suite et de ses propriétés arithmétiques. Ransford et Roginskaya [30] ont mesuré plus précisément la taille de $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ en donnant une borne supérieure sur sa dimension de Hausdorff qui dépend de la croissance de la suite $(n_k)_{k\geq 0}$. De plus, des résultats analogues ont été démontré dans le cadre des semi-groupes d'opérateurs fortement continus. En 2006,

C. Badea et S. Grivaux ont caractérisé les suites de Jamison dans [1].

Le chapitre 7 est une introduction aux suites de Jamison où nous définissons les différents objets mis en jeu et où nous introduisons les résultats principaux qui seront importants pour les chapitres suivants. On explique notamment l'idée de la preuve de la caractérisation des suites de Jamison. De cette preuve, C. Badea et S. Grivaux ont naturellement dégagé la question suivante.

Question. (Question 7.2.2) Lorsque $(n_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite de Jamison, existe-t-il un opérateur linéaire borné T sur un espace de Hilbert complexe séparable H à puissances bornées par rapport à cette suite et tel que $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ soit non dénombrable ?

T. Eisner et S. Grivaux [14] ont démontré en 2011 qu'on pouvait toujours faire une telle construction sur $\ell_2(\mathbb{N})$ (de manière explicite) et nous expliquons les idées de cette construction dans la suite du chapitre 7, ce qui nous sera utile dans le chapitre suivant. On peut alors se poser la question plus générale suivante.

Question. (Question 7.3.8) Si $(n_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite de Jamison, sur quels espaces de Banach complexes séparables X peut-on construire un opérateur T à puissances bornées par rapport à cette suite et ayant un spectre ponctuel unimodulaire non dénombrable ?

Nous définissons dans le chapitre 8 les espaces Jamison universels, c'est-à-dire les espaces de Banach séparables sur lesquels la construction mentionnée dans la question précédente est possible. En particulier, T. Eisner et S. Grivaux [14] on montré que l'espace $\ell_2(\mathbb{N})$ est un espace Jamison universel. Nous trouvons une large classe d'espaces de Banach qui sont des espaces Jamison universels. Il s'agit de la classe des espaces de Banach admettant une décomposition de Schauder inconditionnelle. En généralisant la preuve de T. Eisner et S. Grivaux, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème. (Théorème 8.3.1) *Soit X un espace de Banach complexe séparable admettant une décomposition de Schauder inconditionnelle. Alors X est un espace Jamison universel.*

Nous donnons ensuite quelques exemples d'espaces de Banach admettant une décomposition de Schauder inconditionnelle (et qui sont donc des espaces Jamison universels). En particulier, nous montrons que l'espace de James $\mathcal{J}$ est un espace Jamison universel. Nous remarquons également qu'en opposition avec les espaces admettant une base inconditionnelle, les espaces héréditairement indécomposables ne sont jamais des espaces Jamison universels.

Dans le chapitre 9, nous donnons une caractérisation des suites $\mathbb{R}_+$-Jamison, c'est-à-dire des suites de nombres réels positifs $(t_k)_{k\geq 0}$ telles que l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ est au plus dénombrable lorsque $(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach complexe séparable (de générateur infinitésimal A) borné par rapport à la suite $(t_k)_{k\geq 0}$. La caractérisation s'exprime de la même manière que pour les suites de Jamison et la preuve reprend essentiellement les idées de la preuve de la caractérisation des suites de Jamison. Nous notons $||\theta||$ la distance du nombre réel θ à l'ensemble des entiers relatifs. Nous démontrons le théorème suivant.

Théorème. (Théorème 9.2.2) *Soit $(t_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement croissante telle que $t_0 = 1$ et $t_k \longrightarrow +\infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *la suite $(t_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison ;*
(2) *il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\theta \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, on ait*

$$\sup_{k\geq 0} ||t_k\theta|| \geq \epsilon.$$

Après avoir défini la notion d'espace Jamison universel dans le cadre des semi-groupes (appelés espaces $\mathbb{R}_+$-Jamison universels), nous démontrons le résultat suivant, qui est l'analogue de celui établi pour les espaces Jamison universels dans le cas discret.

Théorème. (Théorème 9.3.3) *Soit X un espace de Banach complexe séparable admettant une décomposition de Schauder inconditionnelle. Alors X est un espace $\mathbb{R}_+$-Jamison universel.*

C. Badea et S. Grivaux [1] ont étudié la dimension de Hausdorff de $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ lorsque T est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach complexe séparable à puissances bornées par rapport à une suite d'entiers naturels $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que $\frac{n_{k+1}}{n_k} \longrightarrow +\infty$. En nous appuyant sur leur travail, nous avons démontré l'analogue de leur résultat dans le cadre des semi-groupes fortement continus.

Théorème. (Théorème 9.4.3) *Soit $(t_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement croissante telle que $t_0 = 1$ et $\frac{t_{k+1}}{t_k} \longrightarrow +\infty$. Il existe un espace de Banach complexe séparable X et un semi-groupe fortement continu $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X (de générateur infinitésimal noté A) qui est borné par rapport à la suite $(t_k)_{k\geq 0}$ et tel que l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ soit de dimension de Hausdorff égale à 1.*

Dans le chapitre 10, nous généralisons la notion de suite de Jamison en étudiant la taille du spectre ponctuel unimodulaire d'une *représentation d'un groupe* (ou semi-groupe) G. Plus précisément, si G est un groupe et si $\rho : G \longrightarrow \mathcal{GL}(X)$ est un morphisme de groupes continu (*représentation de G*), on étudie la taille de l'ensemble des valeurs propres de ρ (les *caractères de G*) pour les représentations ρ telle que $\sup_{k\geq 0} ||\rho(g_k)|| < +\infty$ où $(g_k)_{k\geq 0}$ est une suite fixée du groupe G. On souhaite trouver une caractérisation pour qu'une telle suite $(g_k)_{k\geq 0}$ soit telle que l'ensemble $\sigma_p(\rho) \cap \mathbb{T}^G$ des *valeurs propres unimodulaires* de ρ soit au plus dénombrable dès que ρ est une représentation de G telle que $\sup_{k\geq 0} ||\rho(g_k)|| < +\infty$ (appelée suite G-Jamison). Cette caractérisation est connue lorsque G est le groupe $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ (ou le semi-groupe $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}_+$). On donne une caractérisation des suites G-Jamison lorsque G est un groupe abélien de type fini. Si G désigne le groupe $\mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$ (où $a_1, \ldots, a_r$ sont des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2), on note e_i $(1 \leq i \leq \ell)$

l'élément de G dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1 :

$$e_i = (\overbrace{\underbrace{0,\ldots,0,1}_{i},0,\ldots,0}^{\ell},0 \bmod a_1,\ldots,0 \bmod a_r) \in G$$

et on note $e_{\ell+i}$ $(1 \leq i \leq r)$ l'élément de G dont toutes les composantes sont nulles sauf la $(\ell+i)^{\text{ème}}$ qui vaut $1 \bmod a_i$:

$$e_{\ell+i} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{\ell},\underbrace{0 \bmod a_1,\ldots,0 \bmod a_{i-1},1 \bmod a_i}_{i},0 \bmod a_{i+1},\ldots,0 \bmod a_r) \in G.$$

Dans l'étude des suites G-Jamison, on peut supposer que les suites $(g_k)_{k\geq 1}$ d'éléments du groupe G vérifient les conditions initiales :

$$g_k = e_k \qquad \text{pour tout } k \in \{1,2,\ldots,\ell+r\}.$$

Pour tout groupe G, on note encore $\mathbf{1}$ le caractère unité $\mathbf{1} : g \in G \longmapsto 1$.

Théorème. (Théorème 10.5.4) *Soit G le groupe abélien de type fini $\mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$. Soit $(g_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de G telle que $g_k = e_k$ pour tout $k \in \{1,2,\ldots,\ell+r\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *la suite $(g_k)_{k\geq 1}$ est une suite G-Jamison ;*
(2) *il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout caractère $\chi \in \hat{G} \setminus \{\mathbf{1}\}$, on ait* $\sup_{k\geq 1} |\chi(g_k) - 1| \geq \epsilon$.

Les résultats démontrés dans cette thèse sont issus des articles suivants :

[α] V. DEVINCK, *Strongly mixing operators on Hilbert spaces and speed of mixing*, à paraître dans London Mathematical Society

[β] V. DEVINCK, *Universal Jamison spaces and Jamison sequences for C_0-semigroups*, en préparation.

Notations

Nous donnons ici la liste des principales notations utilisées dans cette thèse ainsi que quelques conventions adoptées. La plupart d'entre elles seront redéfinies au fil des chapitres. Dans toute la première partie de la thèse, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de norme associée $|| \cdot ||$. L'espace $\mathcal{H}$ sera muni d'une base hilbertienne notée $(e_\ell)_{\ell \geq 1}$. Nous lui associons la suite $(\mathfrak{e}_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}^*}$ définie par

$$\mathfrak{e}_\ell = e_\ell \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{e}_{-\ell} = ie_\ell \qquad \text{pour tout entier naturel } \ell \text{ non nul.}$$

Quelques notations ensemblistes.

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls. On désigne par $\mathbb{T}$ le cercle unité du plan complexe, c'est-à-dire

$$\mathbb{T} = \big\{ \lambda \in \mathbb{C}\,;\, |\lambda| = 1 \big\}.$$

On note $\mathbb{B}$ la boule unité fermée de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, c'est-à-dire

$$\mathbb{B} = \big\{ x \in \mathcal{H}\,;\, ||x|| \leq 1 \big\}.$$

On note $\mathcal{B}(X)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Banach X, $\mathcal{GL}(X)$ le groupe des éléments inversibles de $\mathcal{B}(X)$ et Id_X l'opérateur identité sur X. Le spectre d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$, noté $\sigma(T)$, est l'ensemble des nombres complexes λ tels que l'opérateur $T - \lambda Id_X$ n'est pas un élément de $\mathcal{GL}(X)$ et $r(T)$ désigne le rayon spectral de T :

$$r(T) = \sup \big\{ |\lambda|\,;\, \lambda \in \sigma(T) \big\}.$$

Le spectre ponctuel de T, noté $\sigma_p(T)$, est l'ensemble des valeurs propres de T tandis que $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ désigne le spectre ponctuel unimodulaire de T :

$$\sigma_p(T) \cap \mathbb{T} = \big\{ \lambda \in \mathbb{T}\,;\, \exists\, x \in X \setminus \{0\},\ Tx = \lambda x \big\}.$$

Le groupe dual d'un groupe G, noté $\hat{G}$, est l'ensemble des morphismes de groupes continus $\chi : G \longrightarrow \mathbb{T}$ (appelés *caractères de* G).

Pour tout entier naturel k non nul, on désigne par $\mathfrak{S}_k$ le groupe des permutations de l'ensemble à k éléments $\{1, \ldots, k\}$.

Quelques notations sur les mesures et les fonctions.

Si $\sigma > 0$, on note γ_σ la loi gaussienne centrée sur $\mathbb{R}$ de variance σ^2, c'est-à-dire

$$d\gamma_\sigma = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2} dt.$$

Si t est un nombre réel, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière (inférieure) de t, c'est-à-dire le plus grand entier n tel que $n \leq t$. On note aussi $\{t\}$ la partie fractionnaire de t, de sorte que $t = \lfloor t \rfloor + \{t\}$. On note encore $||t||$ la distance du nombre réel t à l'entier le plus proche, c'est-à-dire

$$||t|| = \inf \big\{ |t - n| \, ; \, n \in \mathbb{Z} \big\}.$$

Si z est un nombre complexe, on note $\mathfrak{Re}\, z$ et $\mathfrak{Im}\, z$ les parties réelle et imaginaire de z respectivement. La fonction $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ (où x est un élément de $\mathcal{H}$) désigne la forme linéaire réelle sur $\mathcal{H}$ définie par $y \longmapsto \mathfrak{Re}\langle x, y \rangle$.

Si m est une mesure gaussienne sur $\mathcal{H}$ et si x est un vecteur de $\mathcal{H}$, on note σ_x^2 la variance de la variable aléatoire $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle$ par rapport à m, c'est-à-dire

$$\sigma_x^2 = \int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle x, z \rangle)^2 \, dm(z)$$

et dans le cas particulier où x est un élément de la base hilbertienne $(e_\ell)_{\ell \geq 1}$ de $\mathcal{H}$, on notera plus simplement σ_ℓ^2 cette variance :

$$\sigma_\ell^2 = \int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle e_\ell, z \rangle)^2 \, dm(z).$$

Pour tout entier naturel k, H_k désigne le $k^{\text{ème}}$ polynôme d'Hermite défini par

$$H_k(t) = (-1)^k e^{t^2/2} \frac{d^k}{dt^k} e^{-t^2/2}.$$

On désigne par σ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ (mesure de Haar), c'est-à-dire définie par

$$d\sigma = \frac{d\theta}{2\pi} \cdot$$

Pour tout ensemble A, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de cet ensemble.
On note Log la détermination principale du logarithme complexe.
Si k et n sont des entiers naturels tels que $k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot$$

Quelques normes et espaces vectoriels normés.

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, $\ell_p(\mathbb{N})$ désigne l'espace des suites de nombres complexes $x = (x_n)_{n\geq 1}$ telles que

$$||x||_p = \left(\sum_{n\geq 1} |x_n|^p \right)^{1/p} < +\infty$$

et $\ell_2(\mathbb{Z}^*, \mathbb{R})$ est l'ensemble des suites de nombres réels $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ telles que

$$||x||_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |x_n|^2 \right)^{1/2} < +\infty.$$

De plus, $c_0(\mathbb{N})$ désigne l'espace des suites de nombres complexes qui convergent vers zéro muni de la norme infinie. Les bases canoniques des espaces $\ell_p(\mathbb{N})$ et $c_0(\mathbb{N})$ seront notées $(e_n)_{n\geq 0}$.
Si $\mathcal{B}_k$ est une forme k-linéaire bornée sur un produit d'espaces vectoriels normés $X_1 \times \cdots \times X_k$, la norme $||\mathcal{B}_k||$ est définie par

$$||\mathcal{B}_k|| = \sup_{||x_1||_{X_1}\leq 1, \ldots, ||x_k||_{X_k}\leq 1} |\mathcal{B}_k(x_1, \ldots, x_k)|.$$

Si $(X, ||\cdot||_X)$ est un espace vectoriel normé, on note $L^2(\mathbb{T}, \sigma, X)$ l'espace des fonctions mesurables $f : \mathbb{T} \longrightarrow X$ telles que

$$\int_{\mathbb{T}} ||f(\lambda)||_X^2 \, d\sigma(\lambda) < +\infty$$

et la norme de f dans cet espace sera notée

$$||f||_{L^2(\mathbb{T},\sigma,X)} = \left(\int_{\mathbb{T}} ||f(\lambda)||_X^2 \, d\sigma(\lambda) \right)^{1/2}.$$

Si $X = \mathbb{C}$, on notera tout simplement $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$ cet espace et $||f||_{L^2(\mathbb{T},\sigma)}$ la norme d'un élément f de $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$.
L'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ est l'ensemble des applications $\mathcal{B}$-mesurables $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ de carré intégrable sur $\mathcal{H}$ et la norme de f sera parfois notée $||f||_{L^2(m)}$ (au lieu de $||f||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}$) pour alléger les notations :

$$||f||_{L^2(m)} = ||f||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \left(\int_{\mathcal{H}} |f(x)|^2 \, dm(x) \right)^{1/2}.$$

On notera aussi $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ l'espace des fonctions $f \in L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ à valeurs réelles (muni de la norme précédente).

Quelques conventions.

Dans toute la thèse, les produits scalaires des espaces de Hilbert considérés (en particulier le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathcal{H}$) sont antilinéaires par rapport à la première variable et linéaires par rapport à la deuxième variable. De plus, l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ sera muni de la σ-algèbre $\mathcal{B}$ engendrée par les formes linéaires réelles $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle$ $(x \in \mathcal{H})$.

Première partie

Vitesse de mélange des opérateurs fortement mélangeants sur les espaces de Hilbert

Chapitre 1

Introdution au problème de vitesse de mélange

Dans ce premier chapitre, nous présentons le problème général qui sera étudié dans les chapitres suivants. On commence par définir quelques concepts importants issus de la théorie ergodique comme celle de transformation ergodique (Définition 1.1.2) ou de transformation fortement mélangeante (Définition 1.1.4) que l'on illustre par deux exemples (Exemple 1.1.3 et Exemples 1.1.5 et 1.1.7). Ceci nous amènera naturellement à la notion de corrélation (Définition 1.1.6) et de vitesse de mélange. Pour comprendre ce qu'on entend par vitesse de mélange, on expose un exemple concret très simple (Exemple 1.1.7) d'étude de la vitesse de mélange qui s'inscrit dans le cadre des systèmes dynamiques mesurables compacts.

1.1 Eléments de théorie ergodique

L'objet d'étude de la théorie ergodique est un triplet $((X,\mathcal{B}),m,T)$ où $(X,\mathcal{B})$ est un espace mesurable, m est une mesure de probabilité sur $(X,\mathcal{B})$ et $T : (X,\mathcal{B}) \longrightarrow (X,\mathcal{B})$ est une application mesurable qui *préserve la mesure* au sens de la Définition 1.1.1 ci-dessous. Un tel triplet $((X,\mathcal{B}),m,T)$ est appelé un système dynamique mesurable. Lorsque l'ensemble X a une structure d'espace métrique compact, on parle de système dynamique mesurable *compact*. Pour plus d'informations sur les notions exposées dans ce chapitre, on renvoit le lecteur aux livres [31] et [22].

Définition 1.1.1. Soit $(X,\mathcal{B},m)$ un espace de probabilité. On dit qu'une application mesurable $T : (X,\mathcal{B},m) \longrightarrow (X,\mathcal{B},m)$ *préserve la mesure* (ou que la mesure m est T-*invariante*) si pour tout ensemble mesurable A de $\mathcal{B}$, on a $m(T^{-1}(A)) = m(A)$.

Pour commencer, on définit la notion fondamentale de transformation ergodique.

Définition 1.1.2. Soit $(X,\mathcal{B},m)$ un espace de probabilité. On dit qu'une application mesurable $T : (X,\mathcal{B},m) \longrightarrow (X,\mathcal{B},m)$ est *ergodique* si elle préserve la mesure et si l'une

des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
(i) pour tous ensembles mesurables $A, B \in \mathcal{B}$ tels que $m(A)m(B) > 0$, il existe un entier naturel n tel que $m(T^{-n}(A) \cap B) > 0$;
(ii) pour tout ensemble mesurable $A \in \mathcal{B}$, si $T^{-1}(A) = A$ à un ensemble de mesure nulle près, alors $m(A) = 0$ ou $m(A) = 1$;
(iii) pour toutes fonctions $f, g \in L^2(X, \mathcal{B}, m)$,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_X f(T^n x) g(x)\, dm(x) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \int_X f\, dm \int_X g\, dm;$$

(iv) pour toute fonction $f \in L^2(X, \mathcal{B}, m)$, si $f \circ T = f$ alors f est constante m-presque sûrement.

Nous donnons deux exemples simples de transformations ergodiques qui s'inscrivent dans le cadre des systèmes dynamiques compacts.

Exemple 1.1.3. On note m la mesure de Lebesgue de l'intervalle $[0, 1]$.
(1) Soit $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. La rotation irrationnelle $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ définie par $T(x) = (x + w) \bmod 1$ est ergodique par rapport à m.
(2) Le doublement d'angle $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ défini par $T(x) = 2x \bmod 1$ est ergodique par rapport à m.

Démonstration. Remarquons que la mesure de Lebesgue m sur $[0, 1]$ est T-invariante pour chacune des deux transformations T. C'est évident pour une rotation (irrationnelle) et pour le doublement d'angle, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(2x \bmod 1)\, dm(x) &= \int_0^{1/2} f(2x)\, dx + \int_{1/2}^1 f(2x - 1)\, dx \\ &= \int_0^1 f(t)\, dt\end{aligned}$$

pour toute fonction $f \in L^2([0, 1])$. En prenant pour f la fonction caractéristique d'un borélien B de $[0, 1]$, on trouve donc que $m(T^{-1}(B)) = m(B)$. Pour montrer l'ergodicité des transformations T, on vérifie la condition (iv) de la Définition 1.1.2 : il est facile de voir en développant un élément f de $L^2([0, 1])$ en série de Fourier que les seules solutions de l'équation $f \circ T = f$ (où T est une rotation irrationnelle ou le doublement d'angle) sont les fonctions constantes. □

Nous introduisons maintenant la notion centrale de notre étude qui est plus forte que celle d'ergodicité.

Définition 1.1.4. Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace de probabilité. On dit qu'une application mesurable $T : (X, \mathcal{B}, m) \longrightarrow (X, \mathcal{B}, m)$ est *fortement mélangeante* si elle préserve la mesure

et si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :
(i) pour tous ensembles mesurables $A, B \in \mathcal{B}$,

$$m(T^{-n}(A) \cap B) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} m(A)m(B) \ ;$$

(ii) pour toutes fonctions $f, g \in L^2(X, \mathcal{B}, m)$,

$$\int_X f(T^n x) g(x) \, dm(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_X f \, dm \int_X g \, dm.$$

Moralement, cela signifie qu'une transformation $T : (X, \mathcal{B}, m) \longrightarrow (X, \mathcal{B}, m)$ est fortement mélangeante lorsque tout ensemble $B \in \mathcal{B}$ devient, sous l'action de T, asymptotiquement indépendant de tout ensemble fixé $A \in \mathcal{B}$ (indépendance par rapport à la mesure de probabilité m). L'exemple suivant montre que la notion de transformation fortement mélangeante est plus forte que celle d'ergodicité.

Exemple 1.1.5. Pour tout $w \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la rotation irrationnelle $T : x \longrightarrow (x + w) \bmod 1$ n'est pas fortement mélangeante par rapport à la mesure de Lebesgue m sur $[0, 1]$.

Démonstration. Soient ϕ et ψ les fonctions définies par $\phi(x) = e^{2i\pi x}$ et $\psi(x) = e^{-2i\pi x}$. Alors $\int_{[0,1]} \phi \, dm = \int_{[0,1]} \psi \, dm = 0$ et pour tout entier naturel n,

$$\int_0^1 \phi(T^n x) \psi(x) \, dm(x) = e^{2i\pi n w}$$

ne converge pas vers zéro quand n tend vers $+\infty$. □

La définition précédente fait apparaître la notion de *corrélation* entre deux fonctions de $L^2(X, \mathcal{B}, m)$.

Définition 1.1.6. Soient $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace de probabilité, $T : (X, \mathcal{B}, m) \longrightarrow (X, \mathcal{B}, m)$ une application fortement mélangeante et soient $f, g \in L^2(X, \mathcal{B}, m)$. Pour tout entier naturel n, on appelle $n^{\text{ème}}$ corrélation entre f et g la quantité

$$\mathcal{I}_n(f, g) := \int_X f(T^n(x)) g(x) \, dm(x) - \int_X f \, dm \int_X g \, dm.$$

Le problème de la vitesse de mélange est alors le suivant. Etant donnés un espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, m)$, une transformation $T : (X, \mathcal{B}, m) \longrightarrow (X, \mathcal{B}, m)$ fortement mélangeante et f, g deux éléments de $L^2(X, \mathcal{B}, m)$, on se demande à quelle vitesse la suite $(\mathcal{I}_n(f, g))_{n \geq 0}$ des corrélations entre f et g tend vers zéro. L'exemple qui suit est une illustration concrète très simple de ce problème.

Exemple 1.1.7. Soient m la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et $T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ la transformation (doublement d'angle) définie par $T(x) = 2x \bmod 1$. La transformation T est fortement mélangeante par rapport à la mesure m. De plus, pour toutes $f \in L^2([0, 1])$ et $g \in C^1([0, 1])$, on a

$$|\mathcal{I}_n(f, g)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{||f||_2 \, ||g'||_\infty}{2^n} \tag{1.1}$$

pour tout entier naturel n.

Démonstration. On a vu dans l'Exemple 1.1.3 que la mesure m est T-invariante. On va maintenant montrer l'estimation (1.1) puis on en déduira que T est fortement mélangeante par rapport à la mesure m. Soient $f \in L^2([0,1])$ et $g \in C^1([0,1])$. Remarquons que pour tout $A \in \mathbb{R}$, on a la formule

$$\mathcal{I}_n(f + A, g) = \mathcal{I}_n(f, g)$$

car la mesure m est T-invariante. On peut donc supposer sans perte de généralité que $\int_{[0,1]} f\, dm = 0$. Pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_n(f,g) &= \int_0^1 f(2^n x \bmod 1) g(x)\, dm(x) \\
&= \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} f(2^n x - k) g(x)\, dx \\
&= 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^1 f(t) g\left(\frac{t+k}{2^n}\right) dt \\
&= 2^{-n} \int_0^1 f(t) \left[\sum_{k=0}^{2^n-1} g\left(\frac{t+k}{2^n}\right)\right] dt.
\end{aligned}$$

On note maintenant g_n l'application définie sur $[0,1]$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} g\left(\frac{t+k}{2^n}\right).$$

En utilisant le fait que $\int_{[0,1]} f\, dm = 0$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}_n(f,g)| = 2^{-n} \left| \int_0^1 f(t) g_n(t)\, dt \right| &= 2^{-n} \left| \int_0^1 f(t)(g_n(t) - g_n(0))\, dt \right| \\
&\leq 2^{-n} ||f||_2 \left(\int_0^1 |g_n(t) - g_n(0)|^2\, dt \right)^{1/2}. \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Comme la fonction g_n est de classe C^1 sur $[0,1]$, l'inégalité des accroissements finis nous dit que $|g_n(t) - g_n(0)| \leq t\, ||g_n'||_\infty$ pour tout $t \in [0,1]$. De plus, on a clairement la majoration $||g_n'||_\infty \leq ||g'||_\infty$. L'estimation (1.2) fournit alors :

$$|\mathcal{I}_n(f,g)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{||f||_2\, ||g'||_\infty}{2^n}.$$

Le fait que la transformation T soit fortement mélangeante par rapport à m découle de ce qui précède et de la densité de $C^1([0,1])$ dans l'espace $L^2([0,1])$. En effet, soient $f, g \in L^2([0,1])$ avec $\int_{[0,1]} f\, dm = 0$ et soit $\epsilon > 0$. Comme $C^1([0,1])$ est dense dans $L^2([0,1])$, il existe $g_\epsilon \in C^1([0,1])$ telle que $||g - g_\epsilon||_2 \leq \epsilon$. On sait aussi d'après ce qui précède qu'il existe un entier naturel n_ϵ tel que pour tout $n \geq n_\epsilon$, on ait $|\mathcal{I}_n(f, g_\epsilon)| \leq \epsilon$. Par conséquent, pour tout entier $n \geq n_\epsilon$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_n(f,g)| &\leq |\mathcal{I}_n(f, g - g_\epsilon)| + |\mathcal{I}_n(f, g_\epsilon)| \\ &\leq |\mathcal{I}_n(f, g - g_\epsilon)| + \epsilon. \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_n(f, g - g_\epsilon)| &= \left| \int_0^1 f(2^n x \bmod 1)(g(x) - g_\epsilon(x))\, dx \right| \\ &\leq ||f||_2 \, ||g - g_\epsilon||_2 \\ &\leq \epsilon \, ||f||_2. \end{aligned}$$

On en conclut donc que pour tout entier $n \geq n_\epsilon$,

$$|\mathcal{I}_n(f,g)| \leq (1 + ||f||_2)\epsilon,$$

d'où le résultat. □

Les notions de transformation ergodique, faiblement mélangeante (voir la définition dans [4]) ou fortement mélangeante en théorie ergodique sont beaucoup étudiées pour des transformations définies sur des ensembles compacts (pour plus d'informations sur les systèmes dynamiques compacts, voir [22]). La notion de vitesse de mélange lorsque T est une transformation fortement mélangeante sur un ensemble compact K est systématiquement étudiée dans ce cadre et la méthode de calcul des corrélations dépend intrinsèquement de la structure de l'ensemble compact K. On renvoie par exemple aux articles [11], [12], [32] ou [33] pour plus d'informations dans ce contexte. Les auteurs montrent essentiellement dans ces articles que si on travaille avec des classes de fonctions régulières, alors les corrélations tendent vers zéro avec une vitesse exponentielle. Dans toute la suite, on s'intéressera à ce problème de vitesse de mélange pour une transformation linéaire bornée $T : (\mathcal{H}, \mathcal{B}, m) \longrightarrow (\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ définie sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ complexe séparable de dimension infinie muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire engendrée par les ouverts de $\mathcal{H}$) et d'une mesure de probabilité m.

1.2 Vitesse de mélange des opérateurs linéaires bornés

On étudie maintenant la notion de transformation fortement mélangeante et le problème de vitesse de mélange lorsque la transformation est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach séparable. L'idée d'étudier un opérateur linéaire du point de vue de la théorie ergodique est qu'il existe un lien entre la dynamique mesurable et la dynamique topologique : si un opérateur linéaire borné T sur un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie X est ergodique par rapport à une mesure m sur X *non dégénérée* (c'est-à-dire telle que $m(U) > 0$ pour tout ouvert non vide U de X), alors cet opérateur est *hypercyclique* au sens où il existe un vecteur non nul x de X tel que *l'orbite de x sous l'action de T*

$$\mathcal{O}rb(x,T) = \{T^n x\,;\, n \geq 0\}$$

est dense dans X (voir par exemple [4]). Ainsi, l'existence d'une mesure non dégénérée m sur X pour laquelle $T \in \mathcal{B}(X)$ est une transformation fortement mélangeante fournit un critère (issu de la théorie ergodique) pour que T soit hypercyclique.

Dans toute la suite de notre étude, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et T est un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$. Le premier problème qui se pose est de trouver une condition sur T pour qu'il existe une mesure non dégénérée m sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ telle que T soit une transformation fortement mélangeante par rapport à cette mesure. Cette question a été étudiée par F. Bayart et S. Grivaux (voir [4] et [5]) et nous en résumons les idées générales dans le chapitre 2.

Chapitre 2

Opérateurs fortement mélangeants par rapport à une mesure gaussienne

Nous présentons dans ce chapitre un théorème de F. Bayart et S. Grivaux [4] qui sera notre point de départ de l'étude de la vitesse de mélange. Ce résultat donne une condition pour qu'un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert séparable admette une mesure *gaussienne* invariante (Définition 2.1.3) par rapport à laquelle il est fortement mélangeant. Avant d'énoncer le résultat, on rappelle la définition d'une mesure gaussienne et quelques propriétés fondamentales les concernant qui seront utiles dans la suite.

2.1 Mesures gaussiennes sur les espaces de Hilbert

Le but de cette partie est d'introduire une classe de mesures de probabilité naturelles sur les espaces de Banach de dimension infinie et d'en donner les propriétés importantes qui seront constamment utilisées dans la suite. Même si les mesures gaussiennes peuvent être définies sur tout espace de Banach de dimension infinie, on se place directement dans le cadre des mesures gaussiennes sur les espaces de Hilbert qui seront les espaces considérés dans la suite (pour les définitions dans le cadre des espaces de Banach, voir par exemple [6]). Pour plus de précisions sur les mesures gaussiennes, on renvoie le lecteur aux livres [6] et [20].

2.1.1 Définitions

On commence par introduire la notion de *loi de probabilité gaussienne complexe.* Pour tout $\sigma > 0$, on note γ_σ la loi gaussienne centrée sur $\mathbb{R}$ de variance σ^2, c'est-à-dire

$$d\gamma_\sigma = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2\sigma^2}\, dt.$$

Définition 2.1.1. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{C}$ une application mesurable à valeurs complexes. On dit que la variable aléatoire f a une *loi* *de probabilité* (*symétrique*) *gaussienne complexe* si f est presque sûrement égale à zéro ou si les parties réelle et imaginaire $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ de f sont des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi gaussienne centrée.

Autrement dit, une variable aléatoire non nulle (presque sûrement) $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \longrightarrow \mathbb{C}$ a une loi de probabilité gaussienne complexe si et seulement si sa loi est de la forme $\gamma_\sigma \otimes \gamma_\sigma$ pour un certain $\sigma > 0$. Si A désigne un borélien de $\mathbb{C}$, alors

$$\mathbb{P}(f \in A) = (\gamma_\sigma \otimes \gamma_\sigma)(A) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{\{(s,t) \in A\}} e^{-(s^2+t^2)/2\sigma^2} \, ds \, dt.$$

Remarque 2.1.2. Si f a une loi de probabilité gaussienne complexe, alors la variable aléatoire λf a une loi de probabilité gaussienne complexe pour tout nombre complexe λ. En particulier, f et λf sont de même loi si λ est un nombre complexe de module 1.

On définit maintenant la notion de *mesure gaussienne* sur un espace de Hilbert. Dans la suite, $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie.

Définition 2.1.3. Une *mesure gaussienne* sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est une mesure de probabilité m sur $\mathcal{H}$ telle que pour tout vecteur x de $\mathcal{H}$, la forme linéaire continue $\langle x, \cdot \rangle$: $y \longmapsto \langle x, y \rangle$, considérée comme variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$, a une loi de probabilité gaussienne complexe.

Les mesures avec lesquelles nous allons travailler seront toujours *non dégénérées.*

Définition 2.1.4. Une mesure de probabilité m sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est dite *non dégénérée* si pour tout ouvert non vide U de $\mathcal{H}$, on a $m(U) > 0$.

Pour une variable aléatoire $f : (\mathcal{H}, \mathcal{B}, m) \longrightarrow \mathbb{C}$, on notera $\mathrm{var}_m(f)$ sa *variance par rapport à la mesure de probabilité* m, c'est-à-dire

$$\mathrm{var}_m(f) := \int_{\mathcal{H}} |f(z)|^2 \, dm(z) - \left| \int_{\mathcal{H}} f(z) \, dm(z) \right|^2$$

et dans le cas où $f = \mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle$ est une forme linéaire réelle, on notera la variance par

$$\sigma_x^2 := \int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle x, z \rangle)^2 \, dm(z).$$

Remarque 2.1.5. Si m est une mesure gaussienne sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors pour tout vecteur x de $\mathcal{H}$, les variables aléatoires réelles $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle$ et $\mathfrak{Im}\langle x, \cdot \rangle$ sont de même loi (gaussienne centrée). En particulier, elles ont la même variance et donc

$$\sigma_x^2 = \int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Im}\langle x, z \rangle)^2 \, dm(z).$$

Un résultat fondamental est qu'une mesure gaussienne sur $\mathcal{H}$ a des moments finis de tous ordres. En particulier, la quantité

$$\int_{\mathcal{H}} ||x||^2 \, dm(x) \tag{2.1}$$

est toujours finie (voir par exemple [6, Chapitre 5]).

2.1.2 Opérateur de covariance

Pour étudier les propriétés d'une mesure gaussienne m, on introduit l'*opérateur de covariance* qui lui est associé.

Définition 2.1.6. Soit m une mesure gaussienne sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. L'*opérateur de covariance* R_m associé à m est défini sur $\mathcal{H}$ par l'équation

$$\langle R_m x, y\rangle = \int_{\mathcal{H}} \langle x, z\rangle \overline{\langle y, z\rangle}\, dm(z)$$

pour tous vecteurs x, y de $\mathcal{H}$.

D'après (2.1), l'opérateur de covariance R_m est un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$. De plus, cet opérateur est auto-adjoint, positif et à trace. En effet, si $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$, alors d'après la formule de Parseval et (2.1), on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\langle R_m e_n, e_n\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{\mathcal{H}} |\langle e_n, x\rangle|^2\, dm(x) = \int_{\mathcal{H}} ||x||^2\, dm(x) < +\infty.$$

En fait, les opérateurs R qui ont ces propriétés déterminent les mesures gaussiennes : si R est un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est auto-adjoint, positif et à trace, alors il existe une unique mesure gaussienne sur $\mathcal{H}$ dont l'opérateur de covariance est R (voir [6, Chapitre 5]). On notera dès lors sans ambiguité R (au lieu de R_m) l'opérateur de covariance d'une mesure gaussienne m.

Dans la suite, on aura besoin de considérer la racine carrée de l'opérateur de covariance R d'une mesure gaussienne m. Comme R est un opérateur positif, il existe un *unique* couple $(\tilde{\mathcal{H}}, K)$ constitué d'un espace de Hilbert séparable $\tilde{\mathcal{H}}$ et d'un opérateur linéaire borné $K : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}$ (la *racine carrée* de R) telle que $R = KK^*$. Par unicité, on entend que si $\hat{\mathcal{H}}$ est un autre espace de Hilbert séparable et si $K_1 : \hat{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}$ est tel que $R = K_1K_1^*$, alors il existe une isométrie $V : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}$ tel que $K_1 = KV^*$.

On présente dans la section suivante le résultat de F. Bayart et S. Grivaux (Théorème 2.2.2) qui nous permettra de commencer l'étude de la vitesse de mélange d'un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ fortement mélangeant par rapport à une mesure gaussienne.

2.2 Le résultat

On énonce ici le résultat assurant l'existence d'une mesure gaussienne invariante par rapport à laquelle un opérateur est fortement mélangeant. On aura besoin de dégager les idées principales de la preuve car elles seront fondamentales dans la suite. Pour qu'un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert séparable admette une mesure gaussienne pour laquelle il est fortement mélangeant, il faut que celui-ci ait « suffisamment » de vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 (Définition 2.2.1). Les vecteurs propres d'un opérateur associés aux valeurs propres de module 1 (ou valeurs propres unimodulaires) seront aussi appelés *vecteurs propres unimodulaires* (ou encore $\mathbb{T}$-*vecteurs propres*) de l'opérateur. Les définitions et les résultats de cette partie sont tirés de [4] et [5] (voir aussi le livre [6, Chapitre 5] pour un résumé). On rappelle que σ désigne la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$, c'est-à-dire : $d\sigma = \frac{d\theta}{2\pi}\cdot$

Définition 2.2.1. [4, Définition 3.1] Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et T un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$. On dit que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont σ-engendrants si pour tout ensemble σ-mesurable A de $\mathbb{T}$ tel que $\sigma(A) = 1$, les sous-espaces propres $\ker(T - \lambda)$, $\lambda \in A$, engendrent un sous-espace dense de $\mathcal{H}$.

Le résultat avec lequel nous allons commencer à travailler, démontré par F. Bayart et S. Grivaux (voir [4]), est le suivant.

Théorème 2.2.2. ([4, Théorème 3.29]) *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et T un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$. Si les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module* 1 *sont σ-engendrants, alors il existe une mesure gaussienne m non dégénérée sur $\mathcal{H}$ et T-invariante pour laquelle la transformation $T : (\mathcal{H}, \mathcal{B}, m) \longrightarrow (\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ est fortement mélangeante.*

Remarque 2.2.3. Dans notre étude, nous travaillons exclusivement dans le cadre des espaces de Hilbert. Néanmoins, F. Bayart et S. Grivaux ont montré dans [5] que le Théorème 2.2.2 reste vrai lorsqu'on travaille sur un espace de Banach séparable sur lequel l'opérateur T a des vecteurs propres unimodulaires σ-engendrants et paramétrés par des champs de vecteurs propres *suffisamment réguliers* (voir [5] pour plus d'informations). De plus, F. Bayart et E. Matheron [7] ont également étudié le problème d'existence d'une mesure gaussienne par rapport à laquelle un opérateur linéaire borné sur un espace de Fréchet séparable est faiblement ou fortement mélangeant. Ils ont notamment démontré le résultat suivant (voir [7]). On dit qu'un borélien D de $\mathbb{T}$ est de type $\mathcal{U}_0$ si pour toute mesure de Rajchman σ sur $\mathbb{T}$ (c'est-à-dire telle que $\hat{\sigma}(n) \longrightarrow 0$ quand $|n|$ tend vers $+\infty$) on a $\sigma(D) = 0$.

Théorème 2.2.4. [7] *Soient X un espace de Fréchet séparable et $T \in \mathcal{B}(X)$.*
(i) Si pour tout borélien D de $\mathbb{T}$ dénombrable, le sous-espace

$$\mathrm{vect}\left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T}\setminus D} \ker(T - \lambda)\right)$$

de X est dense dans X, alors il existe une mesure gaussienne m sur X pour laquelle T est une transformation faiblement mélangeante.
(ii) Si pour tout borélien D de $\mathbb{T}$ de type $\mathcal{U}_0$, le sous-espace

$$\mathrm{vect}\left(\bigcup_{\lambda \in \mathbb{T}\setminus D} \ker(T - \lambda)\right)$$

de X est dense dans X, alors il existe une mesure gaussienne m sur X pour laquelle T est une transformation fortement mélangeante.

Comme une mesure gaussienne est complètement déterminée par son opérateur de covariance, l'idée de la preuve du Théorème 2.2.2 est de construire directement l'opérateur de covariance R. De plus, comme R est un opérateur positif, il suffit de construire sa racine carrée $K : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}$, où $\tilde{\mathcal{H}}$ est un espace de Hilbert séparable à déterminer. On notera m la mesure de probabilité associée à l'opérateur K, c'est-à-dire déterminée par $R = KK^*$. Le fait suivant réunit les principales étapes de la preuve du Théorème 2.2.2 (voir [6]).

Fait 2.2.5. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, T un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ et m une mesure de probabilité sur $\mathcal{H}$.*
(i) La mesure de probabilité m est une mesure gaussienne si et seulement si K est un opérateur de Hilbert-Schmidt ;
(ii) la mesure de probabilité m est non dégénérée si et seulement si l'image de K est dense dans $\mathcal{H}$;
(iii) la mesure de probabilité m est T-invariante si et seulement si il existe une co-isométrie $V : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ telle que l'équation d'entrelacement

$$TK = KV \tag{2.2}$$

soit satisfaite ;
(iv) si m est une mesure gaussienne non dégénérée et T-invariante, alors l'opérateur T est fortement mélangeant par rapport à la mesure m si et seulement si pour tous vecteurs $x, y \in \mathcal{H}$,

$$\langle RT^{*n}x, y\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

A partir de ce fait, il reste à construire les opérateurs $K : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}$ et $V : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ de sorte que l'équation d'entrelacement (2.2) soit vraie. La construction de l'opérateur K dépend des vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1. On commence par introduire la notion de champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres.

Définition 2.2.6. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable (de boule unité fermée notée $\mathbb{B}$) et T un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$. Une application mesurable et bornée $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{B}$ telle que $E(\lambda)$ appartienne à $\ker(T-\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$ est appelée un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres pour T.

Pour définir l'opérateur K, on a besoin d'un paramétrage des vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1.

Fait 2.2.7. ([4, Lemme 3.17]) *Il existe une famille dénombrable $(E_i)_{i\in I}$ de champs de $\mathbb{T}$-vecteurs propres pour T telle que*

$$\overline{\mathrm{vect}}^{\mathcal{H}}\big[E_i(\lambda)\,;\, i \in I\big] = \ker(T - \lambda)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$.

Si les vecteurs propres unimodulaires de $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sont σ-engendrants et sont paramétrés par une famille dénombrable $(E_i)_{i\in I}$ de champs de $\mathbb{T}$-vecteurs propres au sens du Fait 2.2.7, on dira aussi que les champs de vecteurs propres E_i sont σ-engendrants pour T. En particulier, si les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont σ-engendrants et paramétrés par un unique champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$, on dira que E est σ-engendrant pour T.

Dans ce chapitre et dans les suivants, on considèrera le cas où il n'y a qu'un seul champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E pour alléger les calculs (on renvoie à [6, Chapitre 5] pour le cas général et à la section 2.2.2). Néanmoins, on expliquera pour chaque résultat ce qu'il se passe lorsque les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par une famille finie ou infinie dénombrable de champs de vecteurs propres $(E_i)_{i\in I}$.

2.2.1 Cas d'un seul champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E

On explique ici les idées de la preuve du Théorème 2.2.2 lorsqu'il n'y a qu'un seul champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E. Sous l'hypothèse que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont σ-engendrants, on peut vérifier que les opérateurs $K : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}$ et $V : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ définis sur l'espace de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}} := L^2(\mathbb{T}, \sigma)$ par

$$Kf = \int_{\mathbb{T}} f(\lambda)E(\lambda)\, d\sigma(\lambda) \quad \text{et} \quad Vf(\lambda) = \lambda f(\lambda) \quad \text{pour toute } f \in L^2(\mathbb{T}, \sigma)$$

satisfont le Fait 2.2.5. En particulier, on dispose de l'équation d'entrelacement $TK = KV$. De plus, l'opérateur adjoint $K^* : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(\mathbb{T}, \sigma)$ de K est donné par

$$K^*x = \overline{\langle x, E(\cdot)\rangle}$$

pour tout vecteur x de $\mathcal{H}$.

Pour montrer que l'opérateur T est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m associée à K, il est crucial de voir que $\langle RT^{*n}x, y\rangle$ est le coefficient de Fourier d'une certaine mesure. En effet, il a été montré dans [4, Lemme 3.23] que pour tous vecteurs x et y de $\mathcal{H}$, on a la représentation intégrale suivante :

$$\langle RT^{*n}x, y\rangle = \int_{\mathbb{T}} \lambda^n \langle x, E(\lambda)\rangle \overline{\langle y, E(\lambda)\rangle}\, d\sigma(\lambda) = \widehat{\sigma_{x,y}}(n) \tag{2.3}$$

où

$$d\sigma_{x,y}(\lambda) = \langle x, E(\lambda)\rangle \overline{\langle y, E(\lambda)\rangle}\, d\sigma(\lambda),$$

ce qui est en fait une conséquence directe de l'équation d'entrelacement (2.2). Ensuite, comme les coefficients de Fourier de la mesure de Lebesgue σ tendent vers zéro :

$$\hat{\sigma}(n) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et comme la mesure $\sigma_{x,y}$ associée aux vecteurs x et y est absolument continue par rapport à la mesure σ, ses coefficients de Fourier convergent également vers zéro :

$$\widehat{\sigma_{x,y}}(n) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui entraîne que T est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m (d'après (iv) du Fait 2.2.5).

2.2.2 Cas d'une famille finie ou infinie dénombrable de champs de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $(E_i)_{i\in I}$

On explique ici la construction de l'opérateur de covariance R dans le cadre d'une famille finie ou infinie dénombrable de champs de $\mathbb{T}$-vecteurs propres, ce qui nous sera utile dans les chapitres suivants (voir [6, Chapitre 5] pour plus de détails). On considère ici l'espace de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}} = \oplus_{i\in I} L^2(\mathbb{T},\sigma)$. Pour tout $i \in I$, on définit les opérateurs $K_i : L^2(\mathbb{T},\sigma) \longrightarrow \mathcal{H}$ et $V_i : L^2(\mathbb{T},\sigma) \longrightarrow L^2(\mathbb{T},\sigma)$ comme précédemment par

$$K_{E_i} f_i = \int_{\mathbb{T}} f_i(\lambda) E_i(\lambda)\, d\sigma(\lambda) \quad \text{et} \quad V_i f_i(\lambda) = \lambda f_i(\lambda) \quad \text{pour toute } f_i \in L^2(\mathbb{T},\sigma).$$

L'opérateur de covariance R est alors défini par $R = KK^*$ où la racine carrée $K : \tilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{H}$ est définie par

$$K(\oplus_{i\in I} f_i) = \sum_{i\in I} \alpha_i K_{E_i}(f_i)$$

où $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une suite de nombres réels strictement positifs telle que la série

$$\sum_{i\in I} \alpha_i^2 ||E_i||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}$$

soit convergente. En particulier, on vérifie aisément qu'on a l'équation d'entrelacement (2.2), c'est-à-dire

$$TK = KV$$

si on pose $V = \oplus_{i\in I} V_i$. De plus, un simple calcul montre que pour tous vecteurs $x, y \in \mathcal{H}$ et pour tout entier naturel n,

$$\langle RT^{*n}x, y\rangle = \sum_{i\in I} \alpha_i^2 \int_{\mathbb{T}} \lambda^n \langle x, E_i(\lambda)\rangle \overline{\langle y, E_i(\lambda)\rangle}\, d\sigma(\lambda) \qquad (2.4)$$

(voir [6, Lemme 5.35]).

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et T désigne un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ dont les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 sont σ-engendrants et paramétrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$, et T est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne

m sur $\mathcal{H}$ (dont la construction a été expliquée précédemment). On va maintenant estimer la vitesse de convergence vers zéro des coefficients de Fourier $\widehat{\sigma_{x,y}}(n)$ (Proposition 2.3.2) en faisant une hypothèse de régularité sur le champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E (Hypothèse 2.3.1).

2.3 Vitesse de convergence vers zéro des coefficients de Fourier $\widehat{\sigma_{x,y}}(n)$

On souhaite estimer la convergence vers zéro de la suite $(\langle RT^{*n}x, y\rangle)_{n\geq 1}$. Pour cela, on fait l'hypothèse de régularité suivante sur le champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E.

Hypothèse 2.3.1. Il existe un nombre réel $\alpha \in (0,1]$ tel que le champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres soit α-hölderien, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C(E) > 0$ telle que

$$\big|\big|E(\lambda) - E(\mu)\big|\big| \leq C(E)\,|\lambda - \mu|^{\alpha}$$

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$.

Le résultat suivant sur la vitesse de convergence vers zéro de la suite $(\langle RT^{*n}x, y\rangle)_{n\geq 1}$ est le point de départ de l'étude de la vitesse de mélange.

Proposition 2.3.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant et α-hölderien (où $\alpha \in (0,1]$). Alors il existe une constante $C(E,\alpha) > 0$ (qui dépend uniquement de E et α) telle que pour tous vecteurs x et y de $\mathcal{H}$, on ait*

$$|\langle RT^{*n}x, y\rangle| \leq \frac{C(E,\alpha)\,||x||\,||y||}{n^{\alpha}}$$

pour tout entier naturel n non nul.

Démonstration. On utilise ici un argument très classique que l'on peut trouver dans [23, Chapitre 1] et qui sera réutilisé dans la preuve de la Proposition 6.2.1. On fixe des vecteurs x et y de $\mathcal{H}$ et on considère la fonction

$$f_{x,y} : \theta \longmapsto \langle x, E(e^{i\theta})\rangle\overline{\langle y, E(e^{i\theta})\rangle}.$$

En utilisant la représentation intégrale (2.3) et le changement de variables $\theta = \phi + \frac{\pi}{n}$, on voit que

$$\langle RT^{*n}x, y\rangle = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} f_{x,y}(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} = -\int_0^{2\pi} e^{in\phi} f_{x,y}\Big(\phi + \frac{\pi}{n}\Big)\,\frac{d\phi}{2\pi},$$

et donc

$$\langle RT^{*n}x, y\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\bigg(f_{x,y}(\theta) - f_{x,y}\Big(\theta + \frac{\pi}{n}\Big)\bigg)\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

On montre maintenant que la fonction $f_{x,y}$ est α-hölderienne : pour tous $\theta, \theta' \in [0, 2\pi)$,

$$|f_{x,y}(\theta) - f_{x,y}(\theta')| = \left|\langle x, E(e^{i\theta}) - E(e^{i\theta'})\rangle\overline{\langle y, E(e^{i\theta})\rangle} + \langle x, E(e^{i\theta'})\rangle\overline{\langle y, E(e^{i\theta}) - E(e^{i\theta'})\rangle}\right|$$
$$\leq 2\,||x||\,||y||\left(\sup_{\lambda\in\mathbb{T}}||E(\lambda)||\right)\left|\left|E(e^{i\theta}) - E(e^{i\theta'})\right|\right|.$$

Or on sait que $||E(\lambda)|| \leq 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, et donc, comme E est une fonction α-hölderienne (avec constante de Hölder $C(E)$), on obtient

$$|f_{x,y}(\theta) - f_{x,y}(\theta')| \leq 2\,C(E)\,||x||\,||y||\,\left|e^{i\theta} - e^{i\theta'}\right|^{\alpha}.$$

On en déduit donc que

$$|\langle RT^{*n}x, y\rangle| \leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left|f_{x,y}(\theta) - f_{x,y}\left(\theta + \frac{\pi}{n}\right)\right|\frac{d\theta}{2\pi}$$
$$\leq \frac{C(E)\pi^{\alpha}||x||\,||y||}{n^{\alpha}},$$

ce qui démontre le résultat avec la constante $C(E, \alpha) := C(E)\pi^{\alpha}$. $\square$

En utilisant la définition de l'opérateur de covariance R, on voit que la Proposition 2.3.2 peut se réécrire en termes des corrélations $\mathcal{I}_n(f, g)$. Pour tout vecteur x de $\mathcal{H}$, on note f_x la forme linéaire continue définie par

$$\begin{array}{rccc} f_x : & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & z & \longmapsto & \langle x, z\rangle. \end{array}$$

Comme f_x est une variable aléatoire centrée (par définition de la mesure gaussienne m), on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.3. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant et α-hölderien (où $\alpha \in (0, 1]$). Pour tous vecteurs x et y de $\mathcal{H}$, la suite des corrélations $\left(\mathcal{I}_n(f_x, \overline{f_y})\right)_{n\geq 1}$ converge vers zéro à la vitesse $n^{-\alpha}$ et plus précisément :*

$$\left|\mathcal{I}_n(f_x, \overline{f_y})\right| \leq \frac{C(E, \alpha)\,||x||\,||y||}{n^{\alpha}}$$

pour tout entier naturel n non nul, où $\overline{f_y}$ désigne la fonction $z \longmapsto \overline{f_y(z)}$.

Remarque 2.3.4. Dans le cadre d'une famille de champs de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $(E_i)_{i\in I}$, si on suppose que chaque fonction E_i est α-hölderienne (pour un même $\alpha \in (0, 1]$), alors les résultats précédents (Proposition 2.3.2 et Corollaire 2.3.3) restent vrais (mêmes preuves).

On termine ce chapitre en regroupant quelques exemples importants d'opérateurs sur des espaces de Hilbert séparables dont les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 sont σ-engendrants et engendrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres régulier.

2.4 Exemples

Afin d'illustrer la section précédente, on donne des exemples montrant que la condition d'être σ-engendrants pour les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 est facile à vérifier en général. De plus, on verra que ces vecteurs propres sont en général paramétrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres *régulier*, ce qui légitimera l'Hypothèse 2.3.1. Dans les exemples qui suivent, $(e_n)_{n\geq 0}$ désigne la base canonique de l'espace $\ell_2(\mathbb{N})$.

Exemple 2.4.1. ([4, Exemple 3.3]) Soit w un nombre complexe tel que $|w| > 1$ et soit B l'opérateur de décalage sur l'espace $\ell_2(\mathbb{N})$ défini par $Be_0 = 0$ et $Be_n = e_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$. Les vecteurs propres de wB associés aux valeurs propres de module 1 sont donnés par

$$E(\lambda) := \sum_{n\geq 0} \left(\frac{\lambda}{w}\right)^n e_n \qquad (\lambda \in \mathbb{T}).$$

Il est facile de voir que les vecteurs propres $(E(\lambda))_{\lambda\in\mathbb{T}}$ de wB sont σ-engendrants (voir [4]). De plus, le champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \ell_2(\mathbb{N})$ pour l'opérateur wB est une fonction qui admet un prolongement *analytique* dans un voisinage ouvert de $\mathbb{T}$.

Exemple 2.4.2. [21] L'opérateur *de type Kalisch* est l'opérateur T défini sur $L^2([0, 2\pi])$ par la formule

$$Tf(\theta) = e^{i\theta} f(\theta) - \int_0^\theta ie^{it} f(t)\, dt$$

pour tout $f \in L^2([0, 2\pi])$. Pour tout $\alpha \in [0, 2\pi)$, on note $E(e^{i\alpha}) := \mathbf{1}_{(\alpha,2\pi)}$, où $\mathbf{1}_{(\alpha,2\pi)}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle ouvert $(\alpha, 2\pi)$. Alors, $E(e^{i\alpha})$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $e^{i\alpha}$ et les vecteurs propres $(E(e^{i\alpha}))_{\alpha\in[0,2\pi)}$ sont σ-engendrants (voir [5, Exemple 3.11]). De plus, l'application $E : \mathbb{T} \longrightarrow L^2([0, 2\pi])$ est un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres pour T qui est $\frac{1}{2}$-hölderien car pour tous $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$,

$$\begin{aligned} \left|\left|E(e^{i\alpha}) - E(e^{i\beta})\right|\right|_{L^2([0,2\pi])} &= \left(\int_0^{2\pi} \left|E(e^{i\alpha})(\theta) - E(e^{i\beta})(\theta)\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{1/2} \\ &= (\beta - \alpha)^{1/2}. \end{aligned}$$

Exemple 2.4.3. ([4, Exemple 3.21]) Pour toute suite bornée de nombres réels strictement positifs $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$, on définit l'opérateur de décalage pondéré $B_{\mathbf{w}}$ sur $\ell_2(\mathbb{N})$ par $B_{\mathbf{w}}e_0 = 0$ et $B_{\mathbf{w}}e_n = w_n e_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$. Pour la suite particulière $\mathbf{w}$ définie par $w_1 = 1$ et $w_n = \frac{n}{n-1}$ quand $n \geq 2$, l'opérateur $B_{\mathbf{w}}$ admet un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $\frac{1}{2}$-hölderien.

Démonstration. On sait déjà d'après [4, Exemple 3.21] que le champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \ell_2(\mathbb{N})$ pour $B_{\mathbf{w}}$ défini par

$$E(\lambda) := \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{w_1 \dots w_n} e_n = e_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda^n}{n} e_n \qquad (\lambda \in \mathbb{T})$$

est σ-engendrant. De plus, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$, on a

$$||E(\lambda) - E(\mu)||_2^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{|\lambda^n - \mu^n|^2}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{|(\lambda\overline{\mu})^n - 1|^2}{n^2}.$$

Alors, si on introduit la fonction 2π-périodique $f : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(\theta) := \sum_{n\geq 1} \frac{|e^{in\theta} - 1|^2}{n^2} = 2\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n^2}\right),$$

alors on peut vérifier que $f(\theta) = \pi\theta - \frac{\theta^2}{2}$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi[$. Ceci montre que la fonction f est lipschitzienne et donc que le champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E est $\frac{1}{2}$-hölderien. $\square$

En modifiant la suite $\mathbf{w}$, il est facile de voir qu'on peut avoir un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres lipschitzien pour $B_{\mathbf{w}}$.

Exemple 2.4.4. ([4, Exemple 3.21]) Avec les mêmes notations que dans l'Exemple 2.4.3, on considère le poids $\mathbf{w}$ tel que $w_1 = 1$ et $w_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^\kappa$ pour tout $n \geq 2$, où $\kappa > \frac{3}{2}$. L'opérateur de décalage pondéré $B_{\mathbf{w}}$ admet un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres lipschitzien et σ-engendrant.

Démonstration. On définit le champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres pour $B_{\mathbf{w}}$ comme dans la preuve précédente :

$$E(\lambda) := \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{w_1 \dots w_n} e_n = e_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda^n}{n^\kappa}$$

et on sait d'après [4, Exemple 3.21] que E est σ-engendrant. De plus, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$, on a

$$\begin{aligned} ||E(\lambda) - E(\mu)||_2^2 &= \sum_{n\geq 1} \frac{|\lambda^n - \mu^n|^2}{n^{2\kappa}} \\ &= |\lambda - \mu|^2 \sum_{n\geq 1} \frac{\left|\lambda^{n-1}\mu^0 + \lambda^{n-2}\mu^1 + \cdots + \lambda^0\mu^{n-1}\right|^2}{n^{2\kappa}} \\ &\leq \left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2\kappa-2}}\right)|\lambda - \mu|^2, \end{aligned}$$

ce qui montre que E est une fonction lipschitzienne puisque la série $\sum_{n\geq 1} n^{-2\kappa+2}$ est convergente par définition de κ. $\square$

Les exemples précédents soulèvent la question suivante.

Question 2.4.5. Si $\alpha \in (0, 1]$, peut-on trouver un espace de Hilbert séparable et un opérateur linéaire borné sur cet espace qui admette un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres qui soit σ-engendrant et *exactement* α-hölderien (c'est-à-dire α-hölderien et pas β-hölderien pour $\beta > \alpha$) ?

En utilisant la théorie de Fourier et l'Exemple 2.4.3, on peut donner une réponse partielle à cette question.

Théorème 2.4.6. *Soit α un nombre réel dans $\left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$. Il existe une suite de nombres réels $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$ strictement positifs telle que l'opérateur de décalage pondéré $B_{\mathbf{w}}$ sur $\ell_2(\mathbb{N})$ admette un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres σ-engendrant et exactement α-höldérien.*

Démonstration. On a déjà vu dans l'Exemple 2.4.4 qu'il existe un opérateur de décalage pondéré sur $\ell_2(\mathbb{N})$ admettant un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres σ-engendrant et lipschitzien. On fixe maintenant $\alpha \in (0,1]$ et on va montrer qu'il existe un opérateur de décalage pondéré sur $\ell_2(\mathbb{N})$ admettant un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres σ-engendrant et $(\alpha/2)$-höldérien. L'idée est la même que celle de l'Exemple 2.4.3 : pour définir le champ de vecteurs propres, on commence par construire une fonction 2π-périodique et α-höldérienne f_α dont les coefficients de Fourier sont strictement positifs. On considère la fonction paire et 2π-périodique $f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-\alpha n} \sum_{k=0}^{2\cdot 3^n - 1} 2^{-k} \cos\big((3^n + k)t\big)$$

pour tout nombre réel t. Le comportement local de cette fonction au voisinage de 0 est étudié en Annexe et d'après la Proposition A.1.2, f_α est *exactement* localement α-höldérienne au voisinage de 0 (c'est-à-dire localement α-höldérienne au voisinage de 0 et pas localement β-höldérienne au voisinage de 0 pour $\beta > \alpha$). L'intérêt de considérer cette fonction est que ses coefficients de Fourier réels sont donnés de façon explicite. En effet, si on écrit

$$f_\alpha(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j \cos(jt),$$

alors on a $c_0 = 0$ et pour tout entier naturel n et pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, 2\cdot 3^n - 1\}$,

$$c_{3^n+k} = 3^{-\alpha n} 2^{-k}.$$

En particulier,

$$c_{3^n-1} = 3^{-\alpha(n-1)} 2^{1-2\cdot 3^{n-1}}.$$

A ce stade, on définit une suite de nombres réels strictement positifs $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$ par la relation

$$(w_1 \ldots w_j)^2 = \frac{2}{c_j} \qquad (j \geq 1). \tag{2.5}$$

Comme $c_1 = c_{3^0} = 1$, on trouve que $w_1 = \sqrt{2}$. De plus, $w_j = \sqrt{\frac{c_{j-1}}{c_j}}$ pour tout entier naturel $j \geq 2$ d'après l'égalité (2.5). Remarquons que la suite $(w_j)_{j\geq 1}$ est bien une suite bornée. En effet, d'une part

$$w_{3^n}^2 = \frac{c_{3^n-1}}{c_{3^n}} = \frac{3^{-\alpha(n-1)} 2^{1-2\cdot 3^{n-1}}}{3^{-\alpha n}} \leq 2 \cdot 3^\alpha \qquad (n \geq 0)$$

et d'autre part, pour tout entier naturel n et pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, 2 \cdot 3^n - 1\}$,

$$w_{3^n+k}^2 = \frac{c_{3^n+k-1}}{c_{3^n+k}} = \frac{2^{-(k-1)}3^{-\alpha n}}{2^{-k}3^{-\alpha n}} = 2.$$

On en déduit donc que l'opérateur de décalage pondéré $B_{\mathbf{w}}$ sur $\ell_2(\mathbb{N})$ associé à la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est borné. De plus, il admet un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres σ-engendrant E_α défini par

$$E_\alpha(\lambda) := e_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda^n}{w_1 \ldots w_n} e_n$$

pour tout nombre complexe $\lambda \in \mathbb{T}$. Il reste à montrer que E_α est $(\alpha/2)$-hölderien. Pour tous nombres réels θ, θ', on a :

$$\left|\left|E_\alpha(e^{i\theta}) - E_\alpha(e^{i\theta'})\right|\right|_2^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\left|e^{ij(\theta-\theta')} - 1\right|^2}{(w_1 \ldots w_j)^2}.$$

Or on sait que pour tout nombre réel ϕ, on a l'égalité : $2(1 - \cos\phi) = |e^{i\phi} - 1|^2$. Donc, d'après la relation (2.5), il vient

$$\begin{aligned}\left|\left|E_\alpha(e^{i\theta}) - E_\alpha(e^{i\theta'})\right|\right|_2^2 &= \sum_{j=1}^{+\infty} c_j\big(1 - \cos(j(\theta - \theta'))\big)\\ &= f_\alpha(0) - f_\alpha(\theta - \theta').\end{aligned}$$

Comme la fonction f_α est exactement localement α-hölderienne au voisinage de 0, le champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E_α est exactement $(\alpha/2)$-hölderien, ce qui conclut la preuve du Théorème 2.4.6. □

Dans les chapitres suivants, lorsque nous parlerons d'un opérateur linéaire borné T sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ fortement mélangeant par rapport à une mesure gaussienne non dégénérée m sur $\mathcal{H}$, nous ferons toujours référence à la construction de la mesure gaussienne m évoquée dans ce chapitre. En particulier, l'opérateur R fera référence à l'opérateur de covariance de la mesure gaussienne m et les opérateurs K (la racine carrée de R) et V correspondent aux opérateurs construits dans la section 2 de ce chapitre. Sauf mention contraire, les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant.

Chapitre 3

Sur la vitesse de mélange globale

Le but de ce chapitre est de démontrer qu'il n'existe pas de vitesse de mélange *globale*, c'est-à-dire qu'on ne peut pas trouver de suite de nombres réels strictement positifs $(s_n)_{n\geq 1}$ convergente vers zéro telle que pour toutes fonctions f et g de $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$, on ait

$$|\mathcal{I}_n(f, g)| \leq s_n$$

pour tout entier naturel n non nul. Dans ce qui suit, T est un opérateur linéaire borné sur l'espace de Hilbert complexe séparable $\mathcal{H}$ de dimension infinie qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$ (dont la construction est celle du chapitre 2). En particulier, les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont σ-engendrants et paramétrés par un champ de vecteurs propres E, et on dispose de l'équation d'entrelacement $TK = KV$ (voir le chapitre 2 pour les définitions des opérateurs K et V). Dans ce chapitre, nous ne faisons pas d'hypothèse de régularité sur le champ de vecteurs propres E.

3.1 Quelques propriétés fondamentales

On considère dans cette partie une mesure gaussienne m sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (avec opérateur de covariance R). Dans tous nos calculs, on pourra toujours se placer dans une base hilbertienne de l'espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$ constituée de vecteurs propres de l'opérateur de covariance R, ce qui nous donnera un cadre agréable de travail. Rappelons que comme m est une mesure gaussienne sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, les formes linéaires $\langle x, \cdot\rangle : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont des variables aléatoires gaussiennes complexes, c'est-à-dire que les formes linéaires réelles $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathfrak{Im}\langle x, \cdot\rangle : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des variables aléatoires gaussiennes réelles centrées, indépendantes et de même loi (pour tout vecteur x de $\mathcal{H}$).

Proposition 3.1.1. *Il existe une base hilbertienne $(e_\ell)_{\ell\geq 1}$ de $\mathcal{H}$ telle que pour tout entier naturel ℓ non nul, on ait $Re_\ell = 2\sigma_\ell^2 e_\ell$, où σ_ℓ^2 est la variance de la variable aléatoire gaussienne $\mathfrak{Re}\langle e_\ell, \cdot\rangle$, c'est-à-dire :*

$$\sigma_\ell^2 = \int_{\mathcal{H}} \left(\mathfrak{Re}\langle e_\ell, x\rangle\right)^2 dm(x).$$

Démonstration. La diagonalisation de l'opérateur de covariance provient du fait que c'est un opérateur auto-adjoint positif : il existe une base hilbertienne $(e_\ell)_{\ell\geq 1}$ de $\mathcal{H}$ et une suite de nombres réels $(\lambda_\ell)_{\ell\geq 1}$ tel que $Re_\ell = \lambda_\ell e_\ell$ pour tout entier naturel ℓ non nul (en fait, comme R est un opérateur à trace et positif, on sait que $\lambda_\ell \geq 0$ et que la série $\sum_{\ell\geq 1}\lambda_\ell$ est convergente). On calcule maintenant les valeurs propres λ_ℓ. Par définition de l'opérateur de covariance, on a

$$\begin{aligned}\lambda_\ell = \langle Re_\ell, e_\ell\rangle = \int_{\mathcal{H}} |\langle e_\ell, x\rangle|^2\, dm(x) &= \int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle e_\ell, x\rangle)^2\, dm(x) + \int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Im}\langle e_\ell, x\rangle)^2\, dm(x)\\ &= 2\sigma_\ell^2\end{aligned}$$

car les variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle e_\ell, \cdot\rangle$ et $\mathfrak{Im}\langle e_\ell, \cdot\rangle$ ont la même variance σ_ℓ^2. □

Le résultat suivant, qui est une conséquence de l'invariance par rotation d'une mesure gaussienne (voir par exemple la section 3 de [5]), va nous permettre d'exprimer la covariance entre deux formes linéaires réelles continues en fonction de l'opérateur de covariance.

Lemme 3.1.2. *Pour tous vecteurs x et y de $\mathcal{H}$, on a*

$$\big\langle \mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \big\langle \mathfrak{Im}\langle x, \cdot\rangle, \mathfrak{Im}\langle y, \cdot\rangle\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\langle Rx, y\rangle \tag{3.1}$$

et

$$\big\langle \mathfrak{Im}\langle x, \cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = -\big\langle \mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle, \mathfrak{Im}\langle y, \cdot\rangle\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\langle Rx, y\rangle. \tag{3.2}$$

Démonstration. On commence par calculer la partie réelle de $\langle Rx, y\rangle$. En décomposant les fonctions $\langle x, \cdot\rangle$ et $\langle y, \cdot\rangle$ suivant leurs parties réelles et imaginaires, on voit facilement que

$$\mathfrak{Re}\langle Rx, y\rangle = \int_{\mathcal{H}} \mathfrak{Re}\langle x, z\rangle \mathfrak{Re}\langle y, z\rangle\, dm(z) + \int_{\mathcal{H}} \mathfrak{Im}\langle x, z\rangle \mathfrak{Im}\langle y, z\rangle\, dm(z).$$

Or on a $\mathfrak{Im}\langle x, z\rangle = \mathfrak{Re}\langle ix, z\rangle = -\mathfrak{Re}\langle x, iz\rangle$, donc l'invariance par rotation de la mesure gaussienne m nous donne

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}} \mathfrak{Im}\langle x, z\rangle \mathfrak{Im}\langle y, z\rangle\, dm(z) &= \int_{\mathcal{H}} \mathfrak{Re}\langle x, iz\rangle \mathfrak{Re}\langle y, iz\rangle\, dm(z)\\ &= \int_{\mathcal{H}} \mathfrak{Re}\langle x, z\rangle \mathfrak{Re}\langle y, z\rangle\, dm(z)\end{aligned}$$

ce qui prouve la double égalité (3.1). Ensuite, en réutilisant la formule $\mathfrak{Im}\langle x, z\rangle = \mathfrak{Re}\langle ix, z\rangle$, on déduit de ce qui précède que

$$\int_{\mathcal{H}} \mathfrak{Im}\langle x, z\rangle \mathfrak{Re}\langle y, z\rangle\, dm(z) = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\langle R(ix), y\rangle = -\frac{1}{2}\mathfrak{Re}(i\langle Rx, y\rangle) = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\langle Rx, y\rangle$$

et de même

$$\int_{\mathcal{H}} \mathfrak{Re}\langle x, z\rangle \mathfrak{Im}\langle y, z\rangle\, dm(z) = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\langle Rx, iy\rangle = -\frac{1}{2}\mathfrak{Im}\langle x, y\rangle,$$

ce qui démontre la deuxième double égalité (3.2). □

La représentation diagonale de l'opérateur de covariance dans la base hilbertienne $(e_\ell)_{\ell\geq 1}$ (voir Proposition 3.1.1) nous permet de démontrer le résultat suivant qui est fondamental pour la suite.

Proposition 3.1.3. *La suite de variables aléatoires gaussiennes complexes $(\langle e_\ell, \cdot\rangle)_{\ell\geq 1}$ est orthogonale dans l'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. En fait, ces variables aléatoires sont indépendantes.*

Démonstration. Comme la suite $(e_\ell)_{\ell\geq 1}$ est une suite orthogonale de vecteurs propres de l'opérateur R, on a $\langle Re_k, e_\ell\rangle = 0$ pour tous entiers naturels non nuls distincts k et ℓ. Par définition de l'opérateur de covariance R, ceci signifie que les variables aléatoires $\langle e_k, \cdot\rangle$ et $\langle e_\ell, \cdot\rangle$ sont orthogonales dans l'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. De plus, on sait d'après le Lemme 3.1.2 que si $k \neq \ell$, alors les variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle e_k, \cdot\rangle$ et $\mathfrak{Im}\langle e_k, \cdot\rangle$ sont indépendantes des variables aléatoires $\mathfrak{Im}\langle e_k, \cdot\rangle$ et $\mathfrak{Im}\langle e_\ell, \cdot\rangle$ (ceci provient du fait que deux variables aléatoires gaussiennes réelles orthogonales sont indépendantes). Finalement, les variables aléatoires $\langle e_\ell, \cdot\rangle$ sont indépendantes. $\square$

On peut déduire de la Proposition 3.1.3 la propriété analogue dans l'espace $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$.

Corollaire 3.1.4. *La suite de fonctions $(\langle e_\ell, E(\cdot)\rangle)_{\ell\geq 1}$ est orthogonale dans l'espace $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$, et*

$$\int_{\mathbb{T}} \left|\langle e_\ell, E(\lambda)\rangle\right|^2 d\sigma(\lambda) = \int_{\mathcal{H}} |\langle e_\ell, x\rangle|^2\, dm(x) = 2\sigma_\ell^2 \tag{3.3}$$

pour tout entier naturel ℓ non nul.

Démonstration. L'orthogonalité de la suite de fonctions $(\langle e_\ell, E(\cdot)\rangle)_{\ell\geq 1}$ dans $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$ découle de l'orthogonalité de la suite $(\langle e_\ell, \cdot\rangle)_{\ell\geq 1}$ dans $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ et de la représentation intégrale (2.3) (pour $n = 0$) :

$$\overline{\langle Re_k, e_\ell\rangle} = \int_{\mathcal{H}} \overline{\langle e_k, x\rangle}\langle e_\ell, x\rangle\, dm(x) = \int_{\mathbb{T}} \overline{\langle e_k, E(\lambda)\rangle}\langle e_\ell, E(\lambda)\rangle\, d\sigma(\lambda)$$

pour tous entiers naturels k et ℓ non nuls. De plus, l'identité ci-dessus appliquée pour $k = \ell$ nous donne la formule de variance (3.3). $\square$

Avant de démontrer notre résultat sur la non-existence de vitesse de mélange globale dans l'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$, nous présentons le calcul des moments d'ordres pairs d'une variable aléatoire gaussienne (réelle ou complexe), ce qui nous sera utile dans les chapitres suivants.

Proposition 3.1.5. *Soit x un vecteur de $\mathcal{H}$. Pour tout entier naturel n, on a*

$$\int_{\mathcal{H}} \left(\mathfrak{Re}\langle x, z\rangle\right)^{2n} dm(z) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sigma_x^{2n}$$

et

$$\int_{\mathcal{H}} |\langle x, z\rangle|^{2n}\, dm(z) = 2^n n! \sigma_x^{2n},$$

où σ_x^2 désigne la variance de la variable aléatoire $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle$.

Démonstration. Comme m est une mesure gaussienne, $\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle$ est une variable aléatoire gaussienne réelle qui admet pour densité la fonction

$$\gamma_{\sigma_x} : t \longmapsto \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma_x^2}.$$

Remarquons que cette fonction vérifie l'équation $\sigma_x^2\gamma'_{\sigma_x}(t) = -t\gamma_{\sigma_x}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Dans cette preuve, on note m_n l'intégrale

$$\int_{\mathcal{H}} \big(\mathfrak{Re}\langle x,z\rangle\big)^{2n}\, dm(z).$$

En utilisant la formule d'intégration par parties, il vient :

$$m_{n+1} = \int_{\mathbb{R}} t^{2n+1}(t\gamma_{\sigma_x}(t))\, dt = -\sigma_x^2 \int_{\mathbb{R}} t^{2n+1}\gamma'_{\sigma_x}(t)\, dt = (2n+1)\,\sigma_x^2\, m_n. \tag{3.4}$$

Comme $m_1 = \sigma_x^2$, un raisonnement par récurrence et la formule (3.4) nous donnent l'expression des moments m_n. Ensuite, si on note M_n l'intégrale

$$\int_{\mathcal{H}} |\langle x,z\rangle|^{2n}\, dm(z),$$

on a, en utilisant l'expression des moments m_i et le fait que les variables aléatoires gaussiennes $\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle$ et $\mathfrak{Im}\langle x,\cdot\rangle$ sont indépendantes et de même loi,

$$\begin{aligned}
M_n &= \int_{\mathcal{H}} \big((\mathfrak{Re}\langle x,z\rangle)^2 + (\mathfrak{Im}\langle x,z\rangle)^2\big)^n\, dm(z)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\int_{\mathcal{H}}\big(\mathfrak{Re}\langle x,z\rangle\big)^{2i}\, dm(z)\right)\left(\int_{\mathcal{H}}\big(\mathfrak{Im}\langle x,z\rangle\big)^{2(n-i)}\, dm(z)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} m_i\, m_{n-i}\\
&= \frac{n!}{2^n}\sigma_x^{2n}\sum_{i=0}^{n}\binom{2i}{i}\binom{2(n-i)}{n-i}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

La somme qui apparaît dans (3.5) est calculée dans le Lemme A.2.1 : celle-ci est égale à 4^n. Ceci achève donc la preuve de notre proposition. □

A l'aide de ces premières propriétés, on peut maintenant démontrer le résultat principal du chapitre sur la non-existence de vitesse de mélange globale dans l'espace $L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$.

3.2 Le résultat : cas d'un seul champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E

Partant d'une suite de nombres réels $(s_n)_{n\geq 1}$ strictement positifs qui converge vers zéro, il s'agit de construire des fonctions f et g dans $L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ telles que la suite des corrélations $(\mathcal{I}_n(f,g))_{n\geq 1}$ entre f et g soit minorée par la suite $(s_n)_{n\geq 1}$, c'est-à-dire

$$|\mathcal{I}_n(f,g)| \geq s_n \qquad \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul,}$$

où T est un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ dont les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant (et T est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m). Pour cela, on va utiliser un résultat de C. Badea et V. Müller sur la convergence vers zéro des orbites faibles $(\langle S^n x, y\rangle_H)_{n\geq 1}$ d'un opérateur linéaire borné S sur un espace de Hilbert séparable H tel que $S^n \longrightarrow 0$ au sens de la convergence faible opérateur (c'est-à-dire tel que $\langle S^n x, y\rangle_H \longrightarrow 0$ pour tous $x, y \in H$). Le résultat correspondant est le suivant (voir [3]).

Proposition 3.2.1. [3, Corollaire 3] *Soient H un espace de Hilbert séparable et S un opérateur linéaire borné sur H tel que $r(S) = 1$ et $S^n \longrightarrow 0$ au sens de la topologie faible. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs qui converge vers zéro. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un vecteur x de H tel que $||x||_H < \sup_{n\geq 1} a_n + \epsilon$ et*

$$|\langle S^n x, x\rangle_H| \geq a_n$$

pour tout entier naturel n non nul.

Nous pouvons alors, grâce à cette proposition, démontrer notre résultat. On commence par définir l'*espace gaussien complexe*

$$\mathcal{G}_{\mathbb{C}} := \overline{\mathrm{vect}}^{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big[\langle e_\ell, \cdot\rangle\,;\,\ell \geq 1\big]. \tag{3.6}$$

On dit que cet espace est *gaussien* au sens où tout élément de cet espace est une variable aléatoire gaussienne (voir le chapitre 4).

Théorème 3.2.2. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant. Alors, pour toute suite $(s_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs qui converge vers zéro, il existe une fonction f appartenant à l'espace $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ telle que*

$$\big|\mathcal{I}_n(\overline{f}, f)\big| \geq s_n$$

pour tout entier naturel n non nul, où $\overline{f}$ désigne la fonction $x \longmapsto \overline{f(x)}$.

Démonstration. D'après la Proposition 3.1.3, toute fonction f de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{k\geq 1} a_k \langle e_k, \cdot\rangle,$$

où $(a_k)_{k\geq 1}$ est une suite de nombres complexes telles que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 \sigma_k^2 < +\infty$$

(cette condition traduit le fait que la fonction f appartient à $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$). On calcule ensuite les corrélations entre les fonctions f et $\overline{f}$. Comme les variables aléatoires $\langle e_k, \cdot \rangle$ sont centrées, f est aussi une variable aléatoire centrée. On a alors, en utilisant la représentation intégrale (2.3),

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_n(\overline{f}, f) &= \sum_{\substack{k\geq 1\\ \ell \geq 1}} \overline{a_k} a_\ell \int_{\mathcal{H}} \overline{\langle e_k, T^n x\rangle} \langle e_\ell, x\rangle \, dm(x) \\
&= \sum_{\substack{k\geq 1\\ \ell \geq 1}} \overline{a_k} a_\ell \overline{\langle RT^{*n} e_k, e_\ell \rangle} \\
&= \sum_{\substack{k\geq 1\\ \ell \geq 1}} \overline{a_k} a_\ell \int_{\mathbb{T}} \lambda^{-n} \overline{\langle e_k, E(\lambda)\rangle} \langle e_\ell, E(\lambda)\rangle \, d\sigma(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \lambda^{-n} \left| \sum_{k \geq 1} a_k \langle e_k, E(\lambda) \rangle \right|^2 d\sigma(\lambda),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{I}_n(\overline{f}, f) = \big\langle V^n (f \circ E), f \circ E \big\rangle_{L^2(\mathbb{T}, \sigma)}$$

où V est l'opérateur de multiplication par λ sur l'espace $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$, c'est-à-dire défini par $Vf(\lambda) = \lambda f(\lambda)$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T}, \sigma)$. Autrement dit, $\big\{\mathcal{I}_n(\overline{f}, f)\, ;\, n \geq 0\big\}$ est l'orbite faible du vecteur $f \circ E$ sous l'action de l'opérateur V. On considère alors le sous-espace fermé

$$H := \overline{\mathrm{vect}}^{L^2(\mathbb{T},\sigma)} \big[\langle e_k, E(\cdot)\rangle \, ;\, k \geq 1\big]$$

de $L^2(\mathbb{T}, \sigma)$. Il est clair que le rayon spectral de l'opérateur V est égal à 1. Pour appliquer la Proposition 3.2.1 à l'opérateur V et à l'espace de Hilbert séparable H, on doit encore vérifier que cet espace H est V-invariant, c'est-à-dire que $V(H) \subset H$. Pour tout entier naturel k non nul, on a

$$V(\langle e_k, E(\cdot)\rangle)(\lambda) = \lambda \langle e_k, E(\lambda)\rangle = \langle e_k, \lambda E(\lambda)\rangle.$$

Or, $E(\lambda)$ est un vecteur propre de T associé à la valeur propre λ, donc

$$V(\langle e_k, E(\cdot)\rangle)(\lambda) = \langle e_k, TE(\lambda)\rangle = \langle T^* e_k, E(\lambda)\rangle = \left(\sum_{\ell \geq 1} \langle T^* e_k, e_\ell\rangle \langle e_\ell, E(\cdot)\rangle \right)(\lambda),$$

ce qui prouve que la fonction $V(\langle e_k, \cdot\rangle)$ appartient à l'espace H. D'après la Proposition 3.2.1, pour toute suite $(s_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs qui converge vers zéro, il existe une fonction f_E dans H telle que

$$\big|\langle V^n f_E, f_E\rangle_{L^2(\mathbb{T},\sigma)}\big| \geq s_n \qquad \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul.}$$

On sait d'après le Corollaire 3.1.4 que cette fonction f_E peut s'écrire

$$f_E = \sum_{k\geq 1} a_k \langle e_k, E(\cdot)\rangle \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 \sigma_k^2 < +\infty.$$

On conclut alors que la fonction $f = \sum_{k\geq 1} a_k \langle e_k, \cdot\rangle$ est une fonction de $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ satisfaisant la conclusion du Théorème 3.2.2. □

3.3 Cas d'une famille finie ou infinie dénombrable de champs de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $(E_i)_{i\in I}$

Dans le cas où les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 de T sont σ-engendrants et paramétrés par une famille (au plus dénombrable) de champs de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $(E_i)_{i\in I}$, le résultat précédent reste vrai. En effet, avec les mêmes notations que dans la section 2.2.2, si on remplace l'espace H de la preuve précédente par le sous-espace fermé

$$H := \overline{\text{vect}}^{\tilde{\mathcal{H}}}\big[\oplus_{i\in I}\left(\alpha_i\langle e_k, E_i(\cdot)\rangle\right);\, k\geq 1\big]$$

de $\tilde{\mathcal{H}} = \oplus_{i\in I} L^2(\mathbb{T},\sigma)$, alors le même raisonnement que précédemment conduit à l'impossibilité d'avoir une vitesse de mélange globale.

Théorème 3.3.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont σ-engendrants et paramétrés par une famille au plus dénombrable de champs de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $(E_i)_{i\in I}$. Alors, pour toute suite $(s_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs qui converge vers zéro, il existe une fonction f appartenant à l'espace $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ (défini dans (3.6)) telle que*

$$\left|\mathcal{I}_n(\overline{f}, f)\right| \geq s_n$$

pour tout entier naturel n non nul, où $\overline{f}$ désigne la fonction $x \longmapsto \overline{f(x)}$.

Ces résultats (Théorèmes 3.2.2 et 3.3.1) montrent qu'il n'y a pas de vitesse de mélange globale lorqu'on considère des fonctions arbitraires de l'espace $L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$. Dans la suite, nous cherchons à trouver une vitesse de mélange pour des classes de fonctions régulières sur l'espace $\mathcal{H}$ à valeurs réelles. Nous posons

$$L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m) := \big\{f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R};\, f \in L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)\big\}.$$

Tout d'abord, il nous faut trouver un moyen pour calculer les corrélations $\mathcal{I}_n(f,g)$ entre deux fonctions quelconques f et g de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$. Ceci est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Méthode de calcul des corrélations

Le but de ce chapitre est de présenter une méthode permettant de calculer les corrélations $\mathcal{I}_n(f,g)$ entre deux fonctions quelconques f et g de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$. Celle-ci repose sur une décomposition orthogonale de l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ qui est le coeur de la théorie des espaces de Fock. On va d'abord rappeler les définitions et les propriétés principales des espaces de Fock qui seront constamment utilisées dans la suite. Pour plus d'informations sur ce sujet, nous renvoyons le lecteur aux livres [20] et [28].

4.1 Espace gaussien et décomposition orthogonale de l'espace réel $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$

Rappelons que $\mathcal{B}$ désigne la tribu borélienne de $\mathcal{H}$, c'est-à-dire la tribu engendrée par les ouverts de $\mathcal{H}$. Cette tribu est aussi engendrée par les formes linéaires réelles $\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle$, où $x\in\mathcal{H}$. On commence par définir l'*espace gaussien réel* engendré par les variables aléatoires réelles $\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle$, c'est-à-dire

$$\mathcal{G}=\overline{\mathrm{vect}}^{L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big[\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle\,;\,x\in\mathcal{H}\big].$$

Cet espace est dit gaussien au sens où tout élément de $\mathcal{G}$ est une variable aléatoire réelle gaussienne. En effet, comme la mesure de probabilité m sur $\mathcal{H}$ est une mesure gaussienne, les formes linéaires continues $\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle:(\mathcal{H},\mathcal{B},m)\longrightarrow\mathbb{R}$ sont des variables aléatoires réelles gaussiennes et il est facile de voir que la limite d'une suite de variables aléatoires réelles gaussiennes convergente dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ est une variable aléatoire réelle gaussienne (voir par exemple [20, Théorème 1.3]).

Comme $\mathcal{B}$ est la σ-algèbre engendrée par les éléments de $\mathcal{G}$, le théorème d'approximation de Weierstrass permet de reconstruire l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ à partir de l'espace gaussien $\mathcal{G}$. En effet,

$$L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)=\overline{\mathrm{vect}}^{L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big[g^k\,;\,g\in\mathcal{G},k\in\mathbb{N}\big].$$

Pour tout entier naturel k non nul, on notera $\mathcal{G}^k$ l'espace des polynômes homogènes de degré k en les éléments de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{G}^k = \big\{P(g_1,\dots,g_\ell)\,;\, P \in \mathbb{R}[t_1,\dots,t_\ell] \text{ homogène, } \deg(P)=k,\ \ell\in\mathbb{N}^*,\ g_1,\dots,g_\ell \in \mathcal{G}\big\}$$

et on pose $\mathcal{G}^0 = \mathbb{R}$. On peut montrer que ces espaces $\mathcal{G}^k$ sont linéairement indépendants (voir [28, Chapitre 8]). On introduit maintenant la notion de *transformée de Wick* d'un élément de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$.

Définition 4.1.1. Soit k un entier naturel. La transformée de Wick $: f :$ d'un élément f appartenant à l'espace $\mathcal{G}^k$ est définie de la façon suivante :
(i) si f est constant, alors $: f := f$;
(ii) si $f \in \mathcal{G}^k$, $k \geq 1$, alors $: f := f - \mathcal{P}_k(f)$, où $\mathcal{P}_k$ désigne la projection orthogonale sur la fermeture dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ de $\mathrm{vect}\big[\mathcal{G}^j\,;\, 0 \leq j \leq k-1\big]$.
On définit enfin la transformée de Wick de $\mathcal{G}^k$ comme étant l'espace

$$: \mathcal{G}^k := \big\{ : f : ;\ f \in \mathcal{G}^k\big\}.$$

Par définition de la transformée de Wick, on a la décomposition orthogonale suivante de l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$:

$$L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m) = \bigoplus_{k\geq 0} : \mathcal{G}^k : .$$

En particulier, un élément f de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ se décompose suivant son *chaos de Wiener*, c'est-à-dire comme

$$f = \sum_{k\geq 0} \mathcal{P}_{:\mathcal{G}^k:} f, \tag{4.1}$$

où $\mathcal{P}_{:\mathcal{G}^k:}$ désigne la projection orthogonale sur l'espace $: \mathcal{G}^k :$.

Afin de calculer les corrélations entre deux fonctions arbitraires de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$, nous identifions l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ avec l'espace de Fock associé à notre espace gaussien $\mathcal{G}$.

4.2 Espace de Fock associé à l'espace gaussien $\mathcal{G}$

On commence par définir le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_\otimes$ sur le produit tensoriel $\bigotimes_k \mathcal{G}$ en posant, pour tous $g_1,\dots,g_k,h_1,\dots,h_k \in \mathcal{G}$,

$$\langle g_1\otimes\cdots\otimes g_k, h_1\otimes\cdots\otimes h_k\rangle_\otimes = \langle g_1,h_1\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\cdots\langle g_k,h_k\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}. \tag{4.2}$$

On introduit ensuite l'image $\mathcal{G}^k_\odot$ de la projection

$$\mathrm{Sym} : \bigotimes_k \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^k_\odot$$

définie par, pour tous $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{G}$,

$$\mathrm{Sym}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} f_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\tau(k)}, \tag{4.3}$$

où $\mathfrak{S}_k$ est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$. Pour la suite, il est plus commode de munir l'espace $\mathcal{G}_\odot^k$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\odot$ défini par

$$\langle f, g \rangle_\odot = k!\, \langle f, g \rangle_\otimes \tag{4.4}$$

pour tous les éléments f et g de $\mathcal{G}_\odot^k$.

Définition 4.2.1. L'espace de Fock $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ associé à l'espace gaussien $\mathcal{G}$ est défini comme la somme orthogonale

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{G}_\odot^k$$

où chaque espace $\mathcal{G}_\odot^k$ est muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\odot$.

L'intérêt majeur de ces espaces $\mathcal{G}_\odot^k$ est que l'application

$$\begin{array}{rcl} :\mathcal{G}^k: & \longrightarrow & \mathcal{G}_\odot^k \\ :f_1 \ldots f_k: & \longmapsto & \mathrm{Sym}(f_1 \otimes \cdots \otimes f_k) \end{array} \tag{4.5}$$

s'étend de manière unique en une isométrie surjective de $\big(:\mathcal{G}^k:, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)}\big)$ sur $\big(\mathcal{G}_\odot^k, \langle \cdot, \cdot \rangle_\odot\big)$. Ainsi, la décomposition orthogonale

$$L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m) = \bigoplus_{k \geq 0} :\mathcal{G}^k:$$

nous permet de faire l'identification $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m) = \mathcal{F}(\mathcal{G})$. On peut mettre en œuvre sur un exemple simple l'isométrie (4.5) entre les espaces $\big(:\mathcal{G}^k:, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)}\big)$ et $\big(\mathcal{G}_\odot^k, \langle \cdot, \cdot \rangle_\odot\big)$.

Exemple 4.2.2. Pour tous vecteurs x et y de $\mathcal{H}$,

$$\int_{\mathcal{H}} :(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^2:(z) :(\mathfrak{Re}\langle y, \cdot \rangle)^2:(z)\, dm(z) = 2\bigg(\int_{\mathcal{H}} \mathfrak{Re}\langle x, z \rangle \mathfrak{Re}\langle y, z \rangle\, dm(z)\bigg)^2$$

Démonstration. Notons $\mathcal{I}$ le membre de gauche dans l'identité ci-dessus. Puisque les espaces $\big(:\mathcal{G}^2:, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)}\big)$ et $\big(\mathcal{G}_\odot^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_\odot\big)$ sont isométriques, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \big\langle \mathrm{Sym}\big(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle \otimes \mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle\big), \mathrm{Sym}\big(\mathfrak{Re}\langle y, \cdot \rangle \otimes \mathfrak{Re}\langle y, \cdot \rangle\big)\big\rangle_\odot \\ &= 2\big\langle \mathrm{Sym}\big(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle \otimes \mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle\big), \mathrm{Sym}\big(\mathfrak{Re}\langle y, \cdot \rangle \otimes \mathfrak{Re}\langle y, \cdot \rangle\big)\big\rangle_\otimes \end{aligned}$$

par définition du produit scalaire (4.4). On utilise maintenant la définition de la fonction Sym qui nous donne

$$\mathrm{Sym}\big(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle \otimes \mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle\big) = \frac{1}{2}\big(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle \otimes \mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle + \mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle \otimes \mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle\big) = \mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle \otimes \mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle.$$

On finit le calcul avec l'expression (4.2) du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\otimes}$:

$$\mathcal{I} = 2\Big(\big\langle \mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle, \mathfrak{Re}\langle y, \cdot \rangle \big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\Big)^2 = 2\bigg(\int_{\mathcal{H}} \mathfrak{Re}\langle x, z\rangle \mathfrak{Re}\langle y, z\rangle \, dm(z)\bigg)^2$$

□

Afin de calculer les corrélations entre deux fonctions de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$, on a besoin d'étudier plus en détail le chaos de Wiener (4.1) d'une fonction arbitraire f de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$.

4.3 Décomposition canonique d'un élément f_k de $:\mathcal{G}^k:$

On a vu que toute fonction f de l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ pouvait se développer selon son chaos de Wiener (4.1)

$$f = \sum_{k \geq 0} f_k$$

où $f_k = \mathcal{P}_{:\mathcal{G}^k:} f$ est la projection orthogonale de f sur l'espace $:\mathcal{G}^k:$. Pour pouvoir estimer les corrélations entre deux fonctions de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$, on va trouver une base de l'espace $:\mathcal{G}^k:$ dans laquelle on pourra développer nos fonctions f_k.

4.3.1 Décomposition dans l'espace $\mathcal{G}$

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'espace $:\mathcal{G}^1:$. Comme les variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle$ sont centrées, on a par définition de la transformée de Wick de $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle$,

$$:\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle: = \mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle \qquad \text{pour tout vecteur } x \text{ de } \mathcal{H}.$$

Autrement dit, $:\mathcal{G}^1: = \mathcal{G}$. De plus, pour tout vecteur x de $\mathcal{H}$, on a

$$\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathfrak{Re}\langle x, e_\ell \rangle \mathfrak{Re}\langle e_\ell, \cdot \rangle - \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathfrak{Im}\langle x, e_\ell \rangle \mathfrak{Im}\langle e_\ell, \cdot \rangle,$$

ce qui montre que

$$\mathcal{G} = \overline{\text{vect}}^{L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \big[\mathfrak{Re}\langle e_\ell, \cdot \rangle, \mathfrak{Im}\langle e_\ell, \cdot \rangle \,;\, \ell \geq 1\big]$$

(et la tribu borélienne $\mathcal{B}$ est donc engendrée par les formes linéaires réelles $\mathfrak{Re}\langle e_\ell, \cdot \rangle$ et $\mathfrak{Im}\langle e_\ell, \cdot \rangle$, $\ell \in \mathbb{N}^*$). Remarquons encore que pour tout entier naturel ℓ non nul, on a

$$\mathfrak{Im}\langle e_\ell, \cdot \rangle = \mathfrak{Re}\langle i e_\ell, \cdot \rangle.$$

Pour pouvoir décomposer une fonction f de l'espace $\mathcal{G}$, on introduit la suite $(\mathfrak{e}_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}^*}$ de vecteurs de $\mathcal{H}$ associée à la base hilbertienne $(e_\ell)_{\ell \geq 1}$ et définie par

$$\mathfrak{e}_\ell = e_\ell \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{e}_{-\ell} = i e_\ell \qquad \text{pour tout entier naturel } \ell \text{ non nul.}$$

D'après ce qui précède, on a avec ces notations

$$\mathcal{G} = \overline{\text{vect}}^{L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big[\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_\ell, \cdot\rangle \, ; \, \ell \in \mathbb{Z}^*\big]$$

et pour tout entier naturel ℓ non nul,

$$\sigma_\ell^2 = \int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_\ell, x\rangle)^2 \, dm(x) = \int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-\ell}, x\rangle)^2 \, dm(x)$$

car on sait que $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-\ell}, x\rangle = \mathfrak{Im}\langle e_\ell, \cdot\rangle$ et les variables aléatoires réelles gaussiennes $\mathfrak{Re}\langle e_\ell, \cdot\rangle$ et $\mathfrak{Im}\langle e_\ell, \cdot\rangle$ sont de même loi (avec variance σ_ℓ^2). Nous poserons dans la suite $\sigma_{-\ell}^2 = \sigma_\ell^2$ pour tout entier naturel ℓ non nul. Par ailleurs, comme e_ℓ est un vecteur propre de l'opérateur de covariance R associé à la valeur propre $2\sigma_\ell^2$, on a aussi

$$R\mathfrak{e}_\ell = 2\sigma_\ell^2 \mathfrak{e}_\ell \qquad \text{pour tout entier } \ell \in \mathbb{Z}^*.$$

Le premier résultat important est le suivant.

Proposition 4.3.1. *La suite de variables aléatoires gaussiennes* $\big(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_\ell, \cdot\rangle\big)_{\ell \in \mathbb{Z}^*}$ *est orthogonale dans* $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$.

Démonstration. Cette propriété est une conséquence directe du Lemme 3.1.2. En effet, pour tous entiers naturels k et ℓ non nuls distincts, on a d'après la propriété (3.1) du Lemme 3.1.2 :

$$\big\langle \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_k, \cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_\ell, \cdot\rangle\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \big\langle \mathfrak{Re}\langle e_k, \cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle e_\ell, \cdot\rangle\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\langle Re_k, e_\ell\rangle = 0$$

car e_ℓ est un vecteur propre de R et car la suite $(e_\ell)_{\ell \geq 1}$ est orthogonale. De même, si k et ℓ sont des entiers naturels non nuls distincts, alors

$$\big\langle \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-k}, \cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-\ell}, \cdot\rangle\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \big\langle \mathfrak{Im}\langle e_k, \cdot\rangle, \mathfrak{Im}\langle e_\ell, \cdot\rangle\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\langle Re_k, e_\ell\rangle = 0.$$

Enfin, d'après la propriété (3.2) du Lemme 3.1.2, si k et ℓ sont des entiers naturels non nuls, on a

$$\big\langle \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-k}, \cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_\ell, \cdot\rangle\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \big\langle \mathfrak{Im}\langle e_k, \cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle e_\ell, \cdot\rangle\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \frac{1}{2}\mathfrak{Im}\langle Re_k, e_\ell\rangle = 0$$

car $\langle Re_k, e_\ell\rangle$ est un nombre réel. □

Il découle facilement de la Proposition 4.3.1 le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.2. *Toute fonction f de $\mathcal{G}$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} a_k \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_k, \cdot\rangle \tag{4.6}$$

où $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^*}$ est une suite de nombre réels telle que la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} a_k^2 \, \sigma_k^2$ soit convergente.

Démonstration. D'après la Proposition 4.3.1, la suite $(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_k, \cdot\rangle)_{k\in\mathbb{Z}^*}$ est une base orthogonale de $\mathcal{G}$, d'où l'existence de la suite de nombres réels $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^*}$ vérifiant (4.6). On traduit ensuite le fait que la fonction f appartienne à l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ en calculant la norme de f dans cet espace. Puisque les variables $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_k, \cdot\rangle$ sont orthogonales dans l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$, il vient

$$||f||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} a_k^2 \int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_k, z\rangle)^2 \, dm(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} a_k^2 \sigma_k^2,$$

ce qui conclut la preuve du corollaire. □

4.3.2 Décomposition dans l'espace : $\mathcal{G}^k$: $(k \in \mathbb{N}^*)$

Plus généralement, on doit étudier la transformée de Wick d'un polynôme de $\mathcal{G}^k$. Avant d'énoncer le résultat donnant l'expression générale de la transformée de Wick d'un polynôme en les variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle$ (où x est un vecteur de $\mathcal{H}$), nous allons calculer la transformée de Wick d'un monôme $(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k$, où x est un vecteur de $\mathcal{H}$. Nous aurons besoin de la formule de polarisation suivante (voir le Corollaire A.2.4) : pour tous nombres réels $x_1, \dots, x_p$, on a la formule

$$p! \prod_{j=1}^{p} x_j = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{p-r} \sum_{j_1<\cdots<j_r} (x_{j_1} + \cdots + x_{j_r})^p. \tag{4.7}$$

Proposition 4.3.3. *Pour tout vecteur x de $\mathcal{H}$ et pour tout entier naturel k non nul, il existe un k-uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ de nombres réels tel que*

$$:(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k := (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k + \alpha_{k-1} (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^{k-1} + \cdots + \alpha_1 \mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle + \alpha_0.$$

Démonstration. Soient x un vecteur de $\mathcal{H}$ et k un entier naturel non nul. Rappelons qu'on travaille ici avec l'espace gaussien réel

$$\mathcal{G} = \overline{\mathrm{vect}}^{L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \big[\mathfrak{Re}\langle y, \cdot, \rangle \, ; \, y \in \mathcal{H} \big].$$

D'après le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, il existe des nombres réels $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$ tels que la variable aléatoire

$$X_k = (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k + \alpha_{k-1} (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^{k-1} + \cdots + \alpha_1 \mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle + \alpha_0$$

soit orthogonale à $(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^j$ pour tout $j \in \{0, \dots, k-1\}$. Nous introduisons le complément orthogonal dans $\mathcal{G}$ de l'espace gaussien $\big\{ t\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle \, ; \, t \in \mathbb{R} \big\}$ défini par

$$\mathcal{G}(X_k) = \mathcal{G} \ominus \big\{ t\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle \, ; \, t \in \mathbb{R} \big\}.$$

Nous allons montrer que $X_k =: (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k :$. Pour cela, il suffit de démontrer que pour tout $j \in \{0, \dots, k-1\}$, la variable aléatoire X_k est orthogonale à l'espace $\mathcal{G}^j$. D'après la formule de polarisation (4.7), cela revient à montrer que

$$\big\langle X_k, (t\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle + f\rangle)^j \big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = 0 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{G}(X_k) \text{ et pour tout } j \in \{0, \dots, k-1\}.$$

Or, pour tout $f \in \mathcal{G}(X_k)$ et pour tout $j \in \{0, \ldots, k-1\}$, on a

$$\big\langle X_k, (t\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle + f\rangle)^j\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \sum_{\ell=0}^{j} t^\ell \binom{j}{\ell} \big\langle X_k, (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^\ell f^{j-\ell}\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}.$$

Mais nous savons que dans l'espace gaussien $\mathcal{G}$, l'orthogonalité est équivalente à l'indépendance. Donc si p et q désignent des polynômes à coefficients réels, alors

$$\big\langle p(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle), q(f)\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \bigg(\int_{\mathcal{H}} p(\mathfrak{Re}\langle x, z\rangle)\, dm(z)\bigg)\bigg(\int_{\mathcal{H}} q(f(z))\, dm(z)\bigg).$$

En particulier, nous en déduisons que pour tout entier $\ell \in \{0, \ldots, j\}$,

$$\begin{aligned}\big\langle X_k, (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^\ell f^{j-\ell}\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} &= \big\langle X_k, (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^\ell\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \int_{\mathcal{H}} f(z)^{j-\ell}\, dm(z) \\ &= 0\end{aligned}$$

car $\big\langle X_k, (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^\ell\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = 0$ puisque $\ell \in \{0, \ldots, k-1\}$ et par définition de X_k. $\square$

Remarque 4.3.4. Dans la preuve de la Proposition 4.3.3, nous montrons en fait que si on part de l'espace gaussien réel

$$\mathcal{G}_x = \big\{t\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle\,;\, t \in \mathbb{R}\big\}$$

et si on définit la transformée de Wick de $(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k$ à partir de ce nouvel espace gaussien, alors on obtient le même résultat que si on travaillait avec l'espace gaussien initial

$$\mathcal{G} = \overline{\mathrm{vect}}^{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big[\mathfrak{Re}\langle y, \cdot, \rangle\,;\, y \in \mathcal{H}\big].$$

En fait, l'expression de la transformée de Wick de $(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k$ est la même si on remplace l'espace gaussien initial $\mathcal{G}$ par un autre espace gaussien réel qui contient la variable aléatoire $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle$. De plus, on peut montrer de la même manière que si $x_1, \ldots, x_p$ sont des vecteurs de $\mathcal{H}$, alors il suffit de travailler avec l'espace gaussien réel

$$\mathcal{G}_{x_1,\ldots,x_p} = \mathrm{vect}\big[\mathfrak{Re}\langle x_1, \ldots\rangle, \ldots, \mathfrak{Re}\langle x_p, \cdot\rangle\big]$$

pour calculer la transformée de Wick : $(\mathfrak{Re}\langle x_1, \cdot\rangle)^{k_1} \ldots (\mathfrak{Re}\langle x_p, \cdot\rangle)^{k_p}$:. Autrement dit, la variable aléatoire

$$:(\mathfrak{Re}\langle x_1, \cdot\rangle)^{k_1} \ldots (\mathfrak{Re}\langle x_p, \cdot\rangle)^{k_p} : -(\mathfrak{Re}\langle x_1, \cdot\rangle)^{k_1} \ldots (\mathfrak{Re}\langle x_p, \cdot\rangle)^{k_p}$$

est un polynôme en les variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle x_1, \cdot\rangle, \ldots, \mathfrak{Re}\langle x_p, \cdot\rangle$.

On peut illustrer le calcul de la transformée de Wick d'un polynôme par quelques exemples.

Exemple 4.3.5. Soit x un vecteur de $\mathcal{H}$. Alors,

$$: (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^2 := (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^2 - \sigma_x^2$$

et

$$: (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^3 := (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^3 - 3\sigma_x^2 \mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle$$

Démonstration. En utilisant la Proposition 4.3.3, on peut écrire que

$$: (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^2 := (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^2 + a\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle + b \qquad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

Par définition de la transformée de Wick, la variable aléatoire $: (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^2 :$ est centrée et orthogonale à la variable aléatoire $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle$ dans l'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. Ceci se traduit par le système d'équations

$$\begin{cases} \sigma_x^2 + a \displaystyle\int_{\mathcal{H}} \mathfrak{Re}\langle x, z \rangle \, dm(z) + b = 0 \\ \displaystyle\int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle x, z \rangle)^3 \, dm(z) + a\sigma_x^2 + b \int_{\mathcal{H}} \mathfrak{Re}\langle x, z \rangle \, dm(z) = 0. \end{cases}$$

Comme les variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle$ et $(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^3$ sont centrées, on trouve directement que $a = 0$ et $b = -\sigma_x^2$. De même, on peut écrire que

$$: (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^3 := (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^3 + a(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^2 + b\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle + c \qquad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, la variable aléatoire $: (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^3 :$ est centrée et orthogonale à $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle$ et à $(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^2$ dans $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. De plus, les variables gaussiennes $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle$, $(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^3$ et $(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^5$ sont centrées et d'après la Proposition 3.1.5, on sait que

$$\int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle x, z \rangle)^4 \, dm(z) = 3\sigma_x^4.$$

On en tire alors le système d'équations :

$$\begin{cases} a\sigma_x^2 + c = 0 \\ 3\sigma_x^4 + b\sigma_x^2 = 0 \\ 3a\sigma_x^4 + c\sigma_x^2 = 0. \end{cases}$$

On en déduit aisément que $a = c = 0$ et que $b = -3\sigma_x^2$. □

Plus précisément, la proposition suivante permet de donner une formule générale pour calculer la transformée de Wick d'un polynôme en la variable aléatoire $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle$.

Proposition 4.3.6. *Pour tout entier naturel k, on désigne par H_k le $k^{\text{ème}}$ polynôme d'Hermite défini par*

$$H_k(t) = (-1)^k e^{t^2/2} \frac{d^k}{dt^k} e^{-t^2/2} \qquad \textit{pour tout nombre réel } t.$$

Alors, pour tout vecteur x de $\mathcal{H}$, on a

$$: (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^k := \sigma_x^k \, H_k\Big(\frac{\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle}{\sigma_x} \Big). \tag{4.8}$$

Démonstration. D'après la Proposition 4.3.3, il existe un polynôme unitaire Q_k à coefficients réels tel que

$$:(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^k := Q_k(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle).$$

Par définition de la transformée de Wick, : $(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^k$: est orthogonal dans $L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ aux espaces $\mathcal{G}^j$, $0\leq j\leq k-1$. En particulier, pour tout entier $j\in\{0,\dots,k-1\}$, on a

$$\int_{\mathcal{H}} :(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^k:(z)(\mathfrak{Re}\langle x,z\rangle)^j\,dm(z)=0,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathcal{H}} Q_k(\mathfrak{Re}\langle x,z\rangle)(\mathfrak{Re}\langle x,z\rangle)^j\,dm(z)=0.$$

On utilise maintenant le fait que la variable aléatoire $\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle$ a pour densité la fonction γ_{σ_x} et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} Q_k(\sigma_x s)s^j e^{-s^2/2}\,ds=0$$

pour tout entier $j\in\{0,\dots,k-1\}$. Or la suite $(H_\ell)_{\ell\geq 0}$ des polynômes d'Hermite est l'unique suite de polynômes unitaires qui orthogonalise les polynômes t^k dans l'espace pondéré $L^2(\mathbb{R},e^{-s^2/2}\,ds)$. On a donc montré que $H_k=\frac{Q_k(\sigma_x\,\cdot)}{\sigma_x^k}$ ou encore que $Q_k=\sigma_x^k\,H_k\big(\frac{\cdot}{\sigma_x}\big)$. On en déduit finalement que

$$:(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^k := Q_k(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)=\sigma_x^k\,H_k\left(\frac{\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle}{\sigma_x}\right).$$

□

Pour pouvoir exhiber une base orthogonale de l'espace : $\mathcal{G}^k$:, on a besoin de calculer la corrélation entre deux polynômes homogènes de degré k en les variables $\mathfrak{Re}\langle e_\ell,\cdot\rangle$.

Lemme 4.3.7. *Pour tous k-uplets $(x_1,\dots,x_k)$ et $(y_1,\dots,y_k)$ de vecteurs de $\mathcal{H}$, on a*

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}} &:\mathfrak{Re}\langle x_1,\cdot\rangle\dots\mathfrak{Re}\langle x_k,\cdot\rangle:(x):\mathfrak{Re}\langle y_1,\cdot\rangle\dots\mathfrak{Re}\langle y_k,\cdot\rangle:(x)\,dm(x)\\ &=\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k}\big\langle\mathfrak{Re}\langle x_1,\cdot\rangle,\mathfrak{Re}\langle y_{\tau(1)},\cdot\rangle\big\rangle_{L^2(m)}\dots\big\langle\mathfrak{Re}\langle x_k,\cdot\rangle,\mathfrak{Re}\langle y_{\tau(k)},\cdot\rangle\big\rangle_{L^2(m)}.\end{aligned}$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence de l'isométrie (4.5) entre les espaces $\big(:\mathcal{G}^k:,\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big)$ et $\big(\mathcal{G}^k_\odot,\langle\cdot,\cdot\rangle_\odot\big)$. En effet, en notant $\mathcal{I}$ l'intégrale ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{I}&=\big\langle\mathrm{Sym}\big(\mathfrak{Re}\langle x_1,\cdot\rangle\otimes\cdots\otimes\mathfrak{Re}\langle x_k,\cdot\rangle\big),\mathrm{Sym}\big(\mathfrak{Re}\langle y_1,\cdot\rangle\otimes\cdots\otimes\mathfrak{Re}\langle y_k,\cdot\rangle\big)\big\rangle_\odot\\ &=k!\,\big\langle\mathrm{Sym}\big(\mathfrak{Re}\langle x_1,\cdot\rangle\otimes\cdots\otimes\mathfrak{Re}\langle x_k,\cdot\rangle\big),\mathrm{Sym}\big(\mathfrak{Re}\langle y_1,\cdot\rangle\otimes\cdots\otimes\mathfrak{Re}\langle y_k,\cdot\rangle\big)\big\rangle_\otimes,\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de (4.4). On utilise maintenant l'expression (4.3) de la fonction Sym, ce qui donne finalement, par définition du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_\otimes$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_k \\ \tau \in \mathfrak{S}_k}} \big\langle \mathfrak{Re}\langle x_{\sigma(1)}, \cdot \rangle \otimes \cdots \otimes \mathfrak{Re}\langle x_{\sigma(k)}, \cdot \rangle, \mathfrak{Re}\langle y_{\tau(1)}, \cdot \rangle \otimes \cdots \otimes \mathfrak{Re}\langle y_{\tau(k)}, \cdot \rangle \big\rangle_\otimes \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_k \\ \tau \in \mathfrak{S}_k}} \big\langle \mathfrak{Re}\langle x_{\sigma(1)}, \cdot \rangle, \mathfrak{Re}\langle y_{\tau(1)}, \cdot \rangle \big\rangle_{L^2(m)} \dots \big\langle \mathfrak{Re}\langle x_{\sigma(k)}, \cdot \rangle, \mathfrak{Re}\langle y_{\tau(k)}, \cdot \rangle \big\rangle_{L^2(m)} \\
&= \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_k} \big\langle \mathfrak{Re}\langle x_1, \cdot \rangle, \mathfrak{Re}\langle y_{\omega(1)}, \cdot \rangle \big\rangle_{L^2(m)} \dots \big\langle \mathfrak{Re}\langle x_k, \cdot \rangle, \mathfrak{Re}\langle y_{\omega(k)}, \cdot \rangle \big\rangle_{L^2(m)}.
\end{aligned}$$

□

Le calcul précédent nous permet de déterminer une base orthogonale de chacun des espaces $: \mathcal{G}^k :$.

Proposition 4.3.8. *Pour tout entier naturel k non nul, une base orthogonale de l'espace $\big(: \mathcal{G}^k :, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)} \big)$ est donnée par la suite*

$$\big(: \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot \rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot \rangle : \big)_{j_1 \le \dots \le j_k}, \tag{4.9}$$

où $(j_1, \dots, j_k)$ parcourt l'ensemble des k-uplets d'entiers relatifs non nuls tels que $j_1 \le \dots \le j_k$.

Démonstration. Comme l'espace $: \mathcal{G}^k :$ est engendré par les éléments de la suite (4.9), la seule chose à vérifier est que cette suite est orthogonale dans l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. Soient alors deux k-uplets distincts $(j_1, \dots, j_k)$, $(\ell_1, \dots, \ell_k)$ d'entiers relatifs non nuls tels que $j_1 \le \dots \le j_k$ et $\ell_1 \le \dots \le \ell_k$. Comme la suite $(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_\ell, \cdot \rangle)_{\ell \in \mathbb{Z}^*}$ est orthogonale dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ (d'après la Proposition 4.3.1), on a

$$\big\langle \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot \rangle, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{\ell_{\tau(1)}}, \cdot \rangle \big\rangle_{L^2(m)} \dots \big\langle \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot \rangle, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{\ell_{\tau(k)}}, \cdot \rangle \big\rangle_{L^2(m)} = 0$$

pour toute permutation $\tau \in \mathfrak{S}_k$. On conclut la preuve en appliquant le Lemme 4.3.7. □

Afin d'exprimer une fonction de $: \mathcal{G}^k :$ dans la base orthogonale (4.9), il est nécessaire encore de calculer la variance (relativement à la mesure m) des éléments constitutifs de cette base. Pour pouvoir faire ce calcul, nous devons simplifier l'expression de la transformée de Wick de $: \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot \rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot \rangle :$ pour tout k-uplet d'entiers relatifs non nuls $(j_1, \dots, j_k)$. Ceci est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.3.9. *Pour tout r-uplet d'entiers relatifs non nuls deux à deux distincts $(j_1, \dots, j_r)$ et pour tout r-uplet d'entiers naturels non nuls $(\ell_1, \dots, \ell_r)$, on a*

$$\begin{aligned}
: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot \rangle)^{\ell_1} \dots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r}, \cdot \rangle)^{\ell_r} : &=: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot \rangle)^{\ell_1} : \dots : (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r}, \cdot \rangle)^{\ell_r} : \\
&= \prod_{t=1}^{r} \sigma_{j_t}^{\ell_t} H_{\ell_t} \left(\frac{\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_t}, \cdot \rangle}{\sigma_{j_t}} \right)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Démonstration. L'égalité (4.10) est une conséquence immédiate de la Proposition 4.3.6. D'après la formule de polarisation (4.7), le lemme sera prouvé si on montre que pour tous vecteurs x et y de $\mathcal{H}$ tels que les variables aléatoires gaussiennes $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle$ et $\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle$ sont indépendantes et pour tous entiers naturels k et ℓ non nuls, on a l'égalité

$$: (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k (\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)^\ell :=: (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k :: (\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)^\ell :, \tag{4.11}$$

En effet, il suffira d'appliquer ensuite l'identité multilinéaire (4.7) (pour $p = \ell_2 + \cdots + \ell_r$) au produit

$$\underbrace{\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_2}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_2}, \cdot\rangle}_{\ell_2 \text{ fois}} \ldots \underbrace{\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r}, \cdot\rangle}_{\ell_r \text{ fois}},$$

ce qui nous donnera, en utilisant la linéarité de la transformée de Wick et l'hypothèse d'indépendance (4.11),

$$: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r}, \cdot\rangle)^{\ell_r} :=: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} :: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_2}, \cdot\rangle)^{\ell_2} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r}, \cdot\rangle)^{\ell_r} : .$$

Un raisonnement par récurrence permettra alors de conclure la preuve. Nous devons donc démontrer l'égalité (4.11) lorsque x et y sont des vecteurs de $\mathcal{H}$ (non nuls) tels que les variables aléatoires gaussiennes $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle$ et $\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle$ sont indépendantes. Par définition de la transformée de Wick, on ne change par la valeur de la transformée de Wick de $(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k (\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)^\ell$ si on remplace $\mathcal{G}$ par un autre espace gaussien réel qui contient les variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle$ et $\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle$ (voir la Remarque 4.3.4). Donc si on considère l'espace gaussien réel

$$\mathcal{G}_{x,y} := \left\{ s\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle + t\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle \,;\, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

et si on note $\mathcal{G}^j_{x,y}$ l'espace des polynômes homogènes de degré j en les variables $\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle$ et $\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle$, on a aussi

$$: (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k (\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)^\ell := (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k (\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)^\ell - \mathcal{P}^{x,y}_{k+\ell}((\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k (\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)^\ell)$$

où $\mathcal{P}^{x,y}_{k+\ell}$ désigne la projection orthogonale sur la fermeture dans $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ de l'espace

$$\mathrm{vect}\left[\mathcal{G}^j_{x,y} \,;\, j \leq 0 \leq j \leq k + \ell - 1\right].$$

Autrement dit, $\mathcal{P}^{x,y}_k$ est la projection orthogonale sur l'espace

$$\mathrm{vect}\left[(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^i (\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)^j \,;\, 0 \leq i + j \leq k + \ell - 1\right].$$

Or

$$: (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k :: (\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)^\ell := (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k (\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)^\ell - Q(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)$$

où

$$\begin{aligned} Q(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle) : = {} & (\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k \mathcal{P}_\ell\big((\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)^\ell\big) + \mathcal{P}_k\big((\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k\big)(\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)^\ell \\ & - \mathcal{P}_k\big((\mathfrak{Re}\langle x, \cdot\rangle)^k\big)\mathcal{P}_\ell\big((\mathfrak{Re}\langle y, \cdot\rangle)^\ell\big). \end{aligned}$$

Par définition de $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_\ell$, $Q(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle,\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $k+\ell-1$ en les variables $\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle$ et $\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle$. Autrement dit, $Q(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle,\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle)$ appartient à l'image de $\mathcal{P}^{x,y}_{k+\ell}$. Par conséquent, si on montre que : $(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^k :: (\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle)^\ell$: est orthogonal à l'image de $\mathcal{P}^{x,y}_{k+\ell}$, on aura montré que

$$\mathcal{P}^{x,y}_{k+\ell}((\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^k(\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle)^\ell) = Q(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle,\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle),$$

ce qui entraînera l'égalité (4.11). Or, pour tous les entiers naturels i et j tels que $i+j \leq k+\ell-1$, on a nécessairement $i \leq k-1$ ou $j \leq \ell-1$. Par exemple, supposons que $i \leq k-1$. En utilisant le fait que les variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle$ et $\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle$ sont indépendantes et la Proposition 4.3.3, on voit que les variables aléatoires : $(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^k$: $(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^i$ et : $(\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle)^\ell$: $(\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle)^j$ sont aussi indépendantes. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\big\langle :(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^k::(\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle)^\ell:,(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^i(\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle)^j\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\\
&\qquad= \big\langle :(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^k:,(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^i\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big\langle :(\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle)^\ell:,(\mathfrak{Re}\langle y,\cdot\rangle)^j\big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\\
&\qquad= 0
\end{aligned}$$

car le premier produit scalaire est nul par définition de la transformée de Wick : $(\mathfrak{Re}\langle x,\cdot\rangle)^k$: (puisque $i<k$). Ceci achève la preuve du Lemme 4.3.9. □

En utilisant le Lemme 4.3.9, nous pouvons calculer la variance des éléments constitutifs de la base (4.9).

Proposition 4.3.10. *Pour tout k-uplet d'entiers relatifs non nuls deux à deux distincts* $(j_1,\dots,j_r)$ *et pour tout k-uplet d'entiers naturels non nuls* $(\ell_1,\dots,\ell_r)$*, on a*

$$\mathrm{var}_m\big[:(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle)^{\ell_1}\dots(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r},\cdot\rangle)^{\ell_r}:\big] = \ell_1!\dots\ell_r!\,\sigma_{j_1}^{2\ell_1}\dots\sigma_{j_r}^{2\ell_r}.$$

Démonstration. En appliquant le Lemme 4.3.9, on voit que

$$\mathrm{var}_m\big[:(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle)^{\ell_1}\dots(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r},\cdot\rangle)^{\ell_r}:\big] = \mathrm{var}_m\big[:(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle)^{\ell_1}:\dots:(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r},\cdot\rangle)^{\ell_r}:\big].$$

Or on sait d'après la Proposition 4.3.3 que pour tout $t\in\{1,\dots,r\}$, le produit de Wick : $(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_t},\cdot\rangle)^{\ell_t}$: s'écrit sous la forme $f_t(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_t},\cdot\rangle)$ où f_t est une fonction mesurable. Comme les variables aléatoires gaussiennes $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle,\dots,\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r},\cdot\rangle$ sont indépendantes (puisque les entiers $j_1,\dots,j_r$ sont deux à deux distincts), on en déduit que les transformations de Wick : $(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle)^{\ell_1}$:,…,: $(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r},\cdot\rangle)^{\ell_r}$: sont des variables aléatoires indépendantes. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_m\big[:(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle)^{\ell_1}\dots(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r},\cdot\rangle)^{\ell_r}:\big] &= \prod_{t=1}^r \mathrm{var}_m\big[:(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_t},\cdot\rangle)^{\ell_t}:\big]\\
&= \prod_{t=1}^r \ell_t!\,\sigma_{j_t}^{2\ell_t},
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle directement du Lemme 4.3.7. □

On peut déduire des Propositions 4.3.8 et 4.3.10 l'expression de toute fonction de : $\mathcal{G}^k$: dans la base (4.9).

Corollaire 4.3.11. *Une fonction f_k de l'espace : $\mathcal{G}^k$: s'écrit de manière unique sous la forme*

$$f_k = \sum_{\substack{(j_1,\dots,j_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k \\ j_1\le\cdots\le j_k}} a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k} : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k},\cdot\rangle : \tag{4.12}$$

où les nombres réels $a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}$ sont déterminés par la formule

$$a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k} = \frac{\big\langle f_k, : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k},\cdot\rangle : \big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}}{\mathrm{var}_m\big[: \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k},\cdot\rangle : \big]} \tag{4.13}$$

et sont tels que la série

$$k! \sum_{j_1\le\cdots\le j_k} \big|a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}\big|^2 \sigma^2_{j_1}\dots\sigma^2_{j_k} \tag{4.14}$$

soit convergente.

Démonstration. D'après la Proposition 4.3.8, la suite (4.9) est une base orthogonale de l'espace : $\mathcal{G}^k$:, d'où l'existence des nombres réels $a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}$ vérifiant (4.12) et (4.13). Il reste maintenant à traduire le fait que la fonction f_k appartienne à l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ en calculant la norme de f_k dans cet espace. Comme la suite (4.9) est orthogonale dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$, on a

$$||f_k||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \sum_{j_1\le\cdots\le j_k} \big|a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}\big|^2 \int_{\mathcal{H}} \big(: \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k},\cdot\rangle : (z)\big)^2\, dm(z).$$

Soit $(j_1,\dots,j_k)$ un k-uplet d'entiers relatifs non nuls tel que $j_1\le\cdots\le j_k$. Il existe des entiers naturels non nuls r et $\ell_1,\dots,\ell_r$ tels que $\ell_1+\cdots+\ell_r=k$ et des entiers relatifs non nuls $i_1,\dots,i_r$ tels que $i_1<\cdots<i_r$ et

$$: \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k},\cdot\rangle :=: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1},\cdot\rangle)^{\ell_1} \dots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_r},\cdot\rangle)^{\ell_r} : .$$

D'après la Proposition 4.3.10, on obtient

$$\int_{\mathcal{H}} \big(: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1},\cdot\rangle)^{\ell_1} \dots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_r},\cdot\rangle)^{\ell_r} : (z)\big)^2\, dm(z) = \ell_1!\dots\ell_r!\,\sigma^{2\ell_1}_{i_1}\dots\sigma^{2\ell_r}_{i_r}.$$

Comme $\ell_1+\cdots+\ell_r=k$, on a toujours $1\le \ell_1!\dots\ell_r!\le k!$ et donc

$$\sum_{j_1\le\cdots\le j_k} \big|a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}\big|^2 \sigma^2_{j_1}\dots\sigma^2_{j_k} \le ||f_k||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \le k! \sum_{j_1\le\cdots\le j_k} \big|a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}\big|^2 \sigma^2_{j_1}\dots\sigma^2_{j_k},$$

ce qui termine la preuve du corollaire. □

4.4 Calcul des corrélations $\mathcal{I}_n(f, g)$

Partant de deux fonctions f et g de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$, on peut les développer selon leur chaos de Wiener (4.1), c'est-à-dire

$$f = \sum_{k \geq 0} f_k \quad \text{et} \quad g = \sum_{\ell \geq 0} g_\ell \quad \text{avec} \quad f_k = \mathcal{P}_{:\mathcal{G}^k:} f \quad \text{et} \quad g_\ell = \mathcal{P}_{:\mathcal{G}^\ell:} g$$

d'où l'on tire

$$\mathcal{I}_n(f, g) = \sum_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2} \mathcal{I}_n(f_k, g_\ell). \tag{4.15}$$

Ainsi, le calcul des corrélations $\mathcal{I}_n(f, g)$ se ramène au calcul des corrélations $\mathcal{I}_n(f_k, g_\ell)$ pour $f_k \in :\mathcal{G}^k:$ et $g_\ell \in :\mathcal{G}^\ell:$.

4.4.1 Calcul de $\mathcal{I}_n(f_k, g_\ell)$ pour $k \neq \ell$

Dans un premier temps, on s'intéresse au calcul des corrélations entre deux fonctions f_k et g_ℓ appartenant à deux espaces différents $:\mathcal{G}^k:$ et $:\mathcal{G}^\ell:$ respectivement, c'est-à-dire pour $k \neq \ell$. On commence par montrer le fait suivant.

Fait 4.4.1. *Pour tout vecteur x de $\mathcal{H}$, on a*

$$:(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^k: \circ\, T^n =: (\mathfrak{Re}\langle T^{*n} x, \cdot \rangle)^k : . \tag{4.16}$$

Démonstration. On sait d'après la Proposition 4.3.6 qu'il existe un polynôme unitaire Q_k à coefficients réels tel que $:(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^k: = Q_k(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)$. On a alors, pour tout vecteur z de $\mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} :(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^k:(T^n z) &= Q_k(\mathfrak{Re}\langle x, T^n z \rangle) = Q_k(\mathfrak{Re}\langle T^{*n} x, z \rangle) \\ &= Q_k(\mathfrak{Re}\langle T^{*n} x, \cdot \rangle)(z) \end{aligned}$$

et donc

$$:(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^k: \circ\, T^n = Q_k(\mathfrak{Re}\langle T^{*n} x, \cdot \rangle) = \sigma_x^k\, H_k\left(\frac{\mathfrak{Re}\langle T^{*n} x, \cdot \rangle}{\sigma_x}\right)$$

d'après la Proposition 4.3.6. En utilisant le fait que la mesure m est T-invariante, on voit facilement que $\sigma_x^2 = \sigma_{T^{*n}x}^2$. Finalement, on déduit de (4.8) que

$$:(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^k: \circ\, T^n =: (\mathfrak{Re}\langle T^{*n} x, \cdot \rangle)^k : .$$

□

En utilisant le Fait 4.4.1, on montre facilement le résultat suivant.

Proposition 4.4.2. *Pour tous vecteurs x et y de $\mathcal{H}$ et pour tous entiers naturels non nuls distincts k et ℓ, on a*

$$\int_{\mathcal{H}} :(\mathfrak{Re}\langle x, \cdot \rangle)^k:(T^n z) :(\mathfrak{Re}\langle y, \cdot \rangle)^\ell:(z)\, dm(z) = 0$$

pour tout entier naturel n.

Démonstration. Ce résultat découle directement de (4.16) et du fait que les espaces : $\mathcal{G}^j$: soient deux à deux orthogonaux. $\square$

On déduit de la Proposition 4.4.2 le cas général.

Corollaire 4.4.3. *Pour toutes fonctions $f_k \in: \mathcal{G}^k$: et $g_\ell \in: \mathcal{G}^\ell$: avec $k \neq \ell$, on a $\mathcal{I}_n(f_k, g_\ell) = 0$ pour tout entier naturel n.*

Démonstration. Soient k et ℓ des entiers naturels distincts. D'après la décomposition (4.12), il suffit de vérifier que pour tous les uplets $(j_1, \ldots, j_k)$ et $(m_1, \ldots, m_\ell)$ d'entiers relatifs non nuls tels que $j_1 \leq \cdots \leq j_k$ et $m_1 \leq \cdots \leq m_\ell$, on a

$$\int_{\mathcal{H}} : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot\rangle : (T^n x) : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{m_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{m_\ell}, \cdot\rangle : (x)\, dm(x) = 0$$

pour tout entier naturel n. On utilise ici l'identité multilinéaire (4.7) : d'après celle-ci, chacun des produits $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot\rangle$ est égal à

$$\frac{1}{k!}\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}\sum_{p_1<\cdots<p_r}\left(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_{p_1}} + \cdots + \mathfrak{e}_{j_{p_r}}, \cdot\rangle\right)^k. \tag{4.17}$$

Comme la transformation de Wick est une application linéaire, la Proposition 4.4.2 permet de terminer la preuve. $\square$

Le Corollaire 4.4.3 permet de poursuivre le calcul des corrélations (4.15). On obtient

$$\mathcal{I}_n(f,g) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathcal{I}_n(f_k, g_k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathcal{I}_n(f_k, g_k) \tag{4.18}$$

où la somme commence à 1 puisque les fonctions f_0 et g_0 sont des fonctions constantes et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_n(f_0, g_0) &= \int_{\mathcal{H}} f_0(T^n x) g_0(x)\, dm(x) - \int_{\mathcal{H}} f_0\, dm \int_{\mathcal{H}} g_0\, dm\\ &= f_0 g_0 - f_0 g_0 = 0\end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à calculer les corrélations pour des fonctions f_k et g_k appartenant au même espace : $\mathcal{G}^k$:.

4.4.2 Calcul de $\mathcal{I}_n(f_k, g_k)$

Grâce aux expressions (4.6) et (4.12) de nos fonctions appartenant aux espaces : $\mathcal{G}^k$:, on peut fournir une expression exploitable des corrélations entre ces fonctions. Le calcul de ces corrélations utilise le lemme suivant.

Lemme 4.4.4. *Pour tout k-uplet $(j_1, \ldots, j_k)$ d'entiers relatifs non nuls, on a*

$$: \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot\rangle : \circ\, T^n =: \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_{j_k}, \cdot\rangle :$$

pour tout entier naturel n.

Démonstration. La preuve de cette égalité est une conséquence immédiate de l'identité multilinéaire (4.17), du Fait 4.4.1 et de la linéarité de la transformée de Wick. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la formule sur les corrélations suivante.

Proposition 4.4.5. *Pour tous k-uplets $(j_1,\dots,j_k)$ et $(\ell_1,\dots,\ell_k)$ d'entiers relatifs non nuls, on a*

$$\int_{\mathcal{H}} :\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k},\cdot\rangle :(T^n x) :\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{\ell_1},\cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{\ell_k},\cdot\rangle : (x)\, dm(x)$$
$$= \sigma_{\ell_1}^2 \dots \sigma_{\ell_k}^2 \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k} \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, T^n \mathfrak{e}_{\ell_{\tau(1)}}\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, T^n \mathfrak{e}_{\ell_{\tau(k)}}\rangle$$

pour tout entier naturel n.

Démonstration. D'après le Lemme 4.4.4, on peut écrire, en notant $\mathcal{I}$ l'intégrale ci-dessus, que

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{H}} :\mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_{j_k},\cdot\rangle : (x) :\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{\ell_1},\cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{\ell_k},\cdot\rangle : (x)\, dm(x).$$

Si on remplace $x_1,\dots,x_k$ par $T^{*n}\mathfrak{e}_{j_1},\dots,T^{*n}\mathfrak{e}_{j_k}$ et $y_1,\dots,y_k$ par $\mathfrak{e}_{\ell_1},\dots,\mathfrak{e}_{\ell_k}$ dans la preuve du Lemme 4.3.7, on obtient, en utilisant l'isométrie (4.5) entre les espaces $\big(:\mathcal{G}^k :, \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big)$ et $\big(\mathcal{G}^k_{\odot}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\odot}\big)$,

$$\mathcal{I} = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k} \big\langle \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{\ell_{\tau(1)}},\cdot\rangle\big\rangle_{L^2(m)} \dots \big\langle \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_{j_k},\cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{\ell_{\tau(k)}},\cdot\rangle\big\rangle_{L^2(m)}.$$

On sait maintenant d'après le Lemme 3.1.2 que pour tous les entiers naturels non nuls i et j, on a l'égalité

$$\big\langle \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_i,\cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_j,\cdot\rangle\big\rangle_{L^2(m)} = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\langle RT^{*n}\mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j\rangle.$$

Or on sait que pour tout entier relatif ℓ non nul, le vecteur e_ℓ est un vecteur propre de l'opérateur de covariance R associé à la valeur propre $2\sigma_\ell^2$. Comme R est un opérateur auto-adjoint, on en déduit donc que

$$\big\langle \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_i,\cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_j,\cdot\rangle\big\rangle_{L^2(m)} = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_i, R\mathfrak{e}_j\rangle = \sigma_j^2 \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_i, T^n\mathfrak{e}_j\rangle,$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. □

Chapitre 5

Espaces de fonctions régulières

On a vu dans le chapitre 3 qu'il n'existe pas de vitesse de mélange globale dans l'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ (Théorème 3.2.2). Il est donc naturel de s'intéresser à la vitesse de convergence vers zéro des corrélations $\mathcal{I}_n(f, g)$ pour des fonctions f et g appartenant à des sous-espaces de fonctions régulières de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. Dans ce chapitre, nous cherchons des espaces de fonctions régulières $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ (contenus dans $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$) pour lesquels nous pourrons donner une vitesse de convergence vers zéro des corrélations $\mathcal{I}_n(f, g)$ lorsque f et g sont des éléments de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement.

5.1 L'espace $\mathcal{X}$

Avant de définir le premier espace de fonctions régulières avec lequel nous allons travailler pour l'estimation de la vitesse de mélange, nous devons introduire certains objets nécessaires pour définir notre espace. Si p est un entier naturel non nul, nous notons $\mathcal{B}_p(\mathcal{H})$ l'espace des formes p-linéaires continues sur l'espace $\mathcal{H}$ à valeurs réelles. Nous considérons dans la suite des fonctions $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables au sens de Gâteaux en tout point x de $\mathcal{H}$. Rappelons que si f est une fonction définie sur un ouvert U d'un espace de Banach E à valeurs dans un espace de Banach F, on dit que f est Gâteaux différentiable en un point $x_0 \in U$ s'il existe une application linéaire bornée $L \in \mathcal{B}(E, F)$ telle que

$$Lu = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} \tag{5.1}$$

pour tout vecteur $u \in E$. L'application L est alors appelée la différentielle de Gâteaux de la fonction f au point x_0 et on la note $Df(x_0) : E \longrightarrow F$. Si la limite (5.1) existe uniformément pour u dans la sphère unité de E, alors f est dite Fréchet différentiable en x_0 et $L = Df(x_0)$ est la différentielle de Fréchet de f au point x_0 (pour plus d'informations sur ces notions de différentiabilité, voir [8]). Signalons de plus que si la fonction f est Gâteaux différentiable dans un voisinage de x_0 et si l'application $x \in E \longmapsto Df(x)$ est continue en x_0, alors la fonction f est Fréchet différentiable en x_0 (voir par exemple [8, Proposition 4.2]).

Dans notre contexte, $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction définie sur $\mathcal{H}$ à valeurs réelles. On suppose que f est différentiable en tout point de $\mathcal{H}$. Sa différentielle (de Gâteaux) est notée

$$\begin{aligned} Df : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ x &\longmapsto Df(x). \end{aligned}$$

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si elle est Gâteaux différentiable en tout point x de $\mathcal{H}$ et si la différentielle de Gâteaux Df de f est continue. On définit par récurrence les différentielles de Gâteaux d'ordres supérieurs $D^k f$ de f. Si k est un entier naturel non nul, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ si l'application

$$\begin{aligned} D^{k-1}f : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{B}_{k-1}(\mathcal{H}) \\ x &\longmapsto D^{k-1}f(x) \end{aligned}$$

est Gâteaux différentiable en tout point x de $\mathcal{H}$ et si sa différentielle $D(D^{k-1}f) = D^k f$ (la $k^{\text{ème}}$ différentielle de f) est continue. On dit aussi que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ou infiniment différentiable) si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier naturel k. Dans la suite, nous allons considérer des fonctions $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ (à priori au sens de Gâteaux). D'après le paragraphe précédent, les deux notions de différentiabilité (au sens de Gâteaux et au sens de Fréchet) coïncident ici puisque les différentielles (de Gâteaux) $D^k f$ sont continues. Nous parlerons donc tout simplement de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ou fonction infiniment différentiable) sans préciser la notion de différentiabilité utilisée.

On considère ici une fonction infiniment différentiable sur $\mathcal{H}$ à valeurs réelles $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ et vérifiant la condition d'intégrabilité suivante :

$$\int_{\mathcal{H}} \left|\left|D^k f(x)\right|\right| dm(x) < +\infty \qquad \text{pour tout entier naturel } k. \tag{5.2}$$

Rappelons que la norme $||\cdot||$ d'une forme k-linéaire continue $\mathcal{B}_k$ est définie par

$$||\mathcal{B}_k|| = \sup_{||x_1||\leq 1,\ldots,||x_k||\leq 1} |\mathcal{B}_k(x_1,\ldots,x_k)|. \tag{5.3}$$

Tout d'abord, on met en relation la régularité de notre fonction avec l'expression de ses coefficients de Fourier.

5.1.1 Régularité et coefficients de Fourier

On sait d'après (4.1) que l'on peut décomposer f suivant son chaos de Wiener sous la forme $f = \sum_{k\geq 0} f_k$ où f_k est la projection orthogonale de la fonction f sur l'espace : $\mathcal{G}^k$:. On sait aussi, grâce au Corollaire 4.3.11, que la fonction f_k peut s'écrire sous la forme

$$f_k = \sum_{j_1\leq\cdots\leq j_k} a^{(k)}_{j_1,\ldots,j_k} : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot\rangle :,$$

où les nombres réels $a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}$ sont donnés par la formule

$$a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k} = \frac{\big\langle f_k, : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot\rangle : \big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}}{\mathrm{var}_m\big[: \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot\rangle : \big]}$$

et sont tels que

$$\sum_{j_1 \leq \dots \leq j_k} \big|a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}\big|^2 \sigma^2_{j_1} \dots \sigma^2_{j_k} < +\infty.$$

Dans un premier temps, on va étudier les coefficients $a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}$ qui apparaissent dans le développement précédent.

Lemme 5.1.1. *Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, pour tout r-uplet d'entiers relatifs $(j_1, \dots, j_r)$ deux à deux distincts tels que $|j_1| \leq \dots \leq |j_r|$ et pour tout r-uplet d'entiers naturels non nuls $(\ell_1, \dots, \ell_r)$ tel que $\ell_1 + \dots + \ell_r = k$, on a*

$$a^{(k)}_{\underbrace{j_1, \dots, j_1}_{\ell_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{j_r, \dots, j_r}_{\ell_r \text{ fois}}} = \frac{1}{\ell_1! \dots \ell_r!} \int_{\mathcal{H}} D^k f(x)(\underbrace{\mathfrak{e}_{j_1}, \dots, \mathfrak{e}_{j_1}}_{\ell_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\mathfrak{e}_{j_r}, \dots, \mathfrak{e}_{j_r}}_{\ell_r \text{ fois}})\, dm(x).$$

Démonstration. On sait déjà d'après la Proposition 4.3.10 que

$$\mathrm{var}_m\big[: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} \dots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r}, \cdot\rangle)^{\ell_r} : \big] = \ell_1! \dots \ell_r!\, \sigma^{2\ell_1}_{j_1} \dots \sigma^{2\ell_r}_{j_r}.$$

On va maintenant calculer le coefficient

$$\big\langle f, : (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} \dots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_r}, \cdot\rangle)^{\ell_r} : \big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}$$

en utilisant des intégrations par parties par rapport à la mesure m sur $\mathcal{H}$. Plus précisément, nous allons décomposer notre mesure gaussienne m en un produit fini de mesures gaussiennes, de manière à utiliser une formule d'intégration par parties usuelle (c'est-à-dire où on intègre sur la droite réelle). On considère les sous-espaces $\mathcal{H}_1 = \mathrm{vect}\big[e_j\,;\, 1 \leq j \leq |j_1|\big]$, $\mathcal{H}_2 = \mathrm{vect}\big[e_j\,;\, |j_1| < j \leq |j_2|\big], \dots, \mathcal{H}_r = \mathrm{vect}\big[e_j\,;\, |j_{r-1}| < j \leq |j_r|\big]$ et $\mathcal{H}_{r+1} = \overline{\mathrm{vect}}^{\mathcal{H}}\big[e_j\,;\, j > |j_r|\big]$. Comme $(e_\ell)_{\ell \geq 1}$ est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, on a la décomposition suivante de $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{t=1}^{r+1} \mathcal{H}_t$$

et la mesure m s'écrit

$$m = \bigotimes_{t=1}^{r+1} m_t,$$

où m_1 est la loi de probabilité du vecteur gaussien $(\langle e_1, \cdot\rangle, \dots, \langle e_{|j_1|}, \cdot\rangle)$, m_2 est la loi de probabilité du vecteur gaussien $(\langle e_{|j_1|+1}, \cdot\rangle, \dots, \langle e_{|j_2|}, \cdot\rangle), \dots, m_{r+1}$ est la loi de probabilité de $(\langle e_j, \cdot\rangle)_{j>|j_r|}$. Pour plus de clarté, nous allons faire nos calculs pour $j_1, \dots, j_r$ strictement positifs de sorte que $\mathfrak{e}_{j_1} = e_{j_1}, \dots, \mathfrak{e}_{j_r} = e_{j_r}$. Les calculs sont les mêmes lorsque un (ou plusieurs) indice(s) est (sont) négatif(s) car pour tout entier naturel ℓ non nul, les variables aléatoires réelles $\mathfrak{Re}\langle e_\ell, \cdot\rangle$ et $\mathfrak{Im}\langle e_\ell, \cdot\rangle$ sont de même loi gaussienne (voir la Remarque 5.1.2 pour un exemple de calcul dans le cas où l'un des indices est négatif). On suppose donc ici que les entiers $j_1, \dots, j_r$ sont strictement positifs et tels que $j_1 < \dots < j_r$. Comme

$$\begin{aligned}\big\langle f, : (\mathfrak{Re}\langle e_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} \dots (\mathfrak{Re}\langle e_{j_r}, \cdot\rangle)^{\ell_r} : \big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \\ = \int_{\mathcal{H}} f(x) : (\mathfrak{Re}\langle e_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} \dots (\mathfrak{Re}\langle e_{j_r}, \cdot\rangle)^{\ell_r} : (x)\, dm(x),\end{aligned}$$

on déduit de la décomposition précédente de l'espace $\mathcal{H}$ (et de la décomposition de la mesure m) que ce produit scalaire est égal à

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{H}_1} \dots \int_{\mathcal{H}_{r+1}} f(x) : (\mathfrak{Re}\langle e_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} \dots (\mathfrak{Re}\langle e_{j_r}, \cdot\rangle)^{\ell_r} : (x)\, dm_1(x_1) \dots dm_{r+1}(x_{r+1}) \\ &= \int_{\mathcal{H}_1} \dots \int_{\mathcal{H}_{r+1}} f(x) : (\mathfrak{Re}\langle e_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} : (x_1) \dots : (\mathfrak{Re}\langle e_{j_r}, \cdot\rangle)^{\ell_r} : (x_r)\, dm_1(x_1) \dots dm_{r+1}(x_{r+1}),\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du Lemme 4.3.9. On fixe maintenant $(x_2, \dots, x_{r+1}) \in \mathcal{H}_2 \times \dots \times \mathcal{H}_{r+1}$ et on calcule l'intégrale

$$\int_{\mathcal{H}_1} f(x) : (\mathfrak{Re}\langle e_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} : (x_1)\, dm_1(x_1)$$

que l'on note $\mathcal{I}$. Tout d'abord, on peut écrire que

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{H}_1} f(x_1 + \zeta) : (\mathfrak{Re}\langle e_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} : (x_1)\, dm_1(x_1),$$

où on a posé $\zeta = x_2 + \dots + x_{r+1}$. Or, d'après la Proposition 4.3.6, on sait que

$$: (\mathfrak{Re}\langle e_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} := \sigma_{j_1}^{\ell_1} H_{\ell_1}\left(\frac{\mathfrak{Re}\langle e_{j_1}, \cdot\rangle}{\sigma_{j_1}}\right).$$

Alors, comme m_1 est la loi de probabilité du vecteur gaussien $(\langle e_1, \cdot\rangle, \dots, \langle e_{j_1}, \cdot\rangle)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = \sigma_{j_1}^{\ell_1} \int_{\mathbb{R}^{2j_1}} f\left(\sum_{s=1}^{j_1-1} t_s e_s + i \sum_{s=1}^{j_1} t_s' e_s + t_{j_1} e_{j_1} + \zeta\right) H_{\ell_1}\left(\frac{t_{j_1}}{\sigma_{j_1}}\right) \\ \times d(\gamma_{\sigma_1} \otimes \gamma_{\sigma_1})(t_1, t_1') \dots d(\gamma_{\sigma_{j_1}} \otimes \gamma_{\sigma_{j_1}})(t_{j_1}, t_{j_1}').\end{aligned}$$

On fixe $(t_1, \dots, t_{j_1-1}, t_1', \dots, t_{j_1-1}', t_{j_1}') \in \mathbb{R}^{2j_1-1}$ et on pose $\omega := \sum_{s=1}^{j_1-1} t_s e_s + i \sum_{s=1}^{j_1} t_s' e_s + \zeta$. L'intégrale que l'on doit désormais calculer est la suivante :

$$\mathcal{J} = \int_{\mathbb{R}} f(t e_{j_1} + \omega) H_{\ell_1}\left(\frac{t}{\sigma_{j_1}}\right) d\gamma_{\sigma_{j_1}}(t).$$

En effectuant le changement de variables $t = \sigma_{j_1} s$, on voit que

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= \int_{\mathbb{R}} f(te_{j_1} + \omega) H_{\ell_1}\left(\frac{t}{\sigma_{j_1}}\right) e^{-t^2/2\sigma_{j_1}^2} \frac{dt}{\sigma_{j_1}\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\sigma_{j_1} s e_{j_1} + \omega) H_{\ell_1}(s) e^{-s^2/2} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}}.\end{aligned}$$

On utilise maintenant l'expression du polynôme H_{ℓ_1} (voir Proposition 4.3.6) et en intégrant par parties on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= (-1)^{\ell_1} \int_{\mathbb{R}} f(\sigma_{j_1} s e_{j_1} + \omega) \frac{d^{\ell_1}}{ds^{\ell_1}} e^{-s^2/2} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sigma_{j_1}^{\ell_1} \int_{\mathbb{R}} D^{\ell_1} f(\sigma_{j_1} s e_{j_1} + \omega)(\underbrace{e_{j_1}, \dots, e_{j_1}}_{\ell_1 \text{ fois}}) e^{-s^2/2} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \sigma_{j_1}^{\ell_1} \int_{\mathbb{R}} D^{\ell_1} f(te_{j_1} + \omega)(\underbrace{e_{j_1}, \dots, e_{j_1}}_{\ell_1 \text{ fois}}) e^{-t^2/2\sigma_{j_1}^2} \frac{dt}{\sigma_{j_1}\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

(où la dernière égalité provient du changement de variables $t = \sigma_{j_1} s$). On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\mathcal{I} = \sigma_{j_1}^{2\ell_1} \int_{\mathbb{R}^{2j_1}} D^{\ell_1} f\left(\sum_{s=1}^{j_1-1} t_s e_s + i \sum_{s=1}^{j_1} t_s' e_s + t_{j_1} e_{j_1} + \zeta\right)(e_{j_1}, \dots, e_{j_1}) \\ \times d(\gamma_{\sigma_1} \otimes \gamma_{\sigma_1})(t_1, t_1') \dots d(\gamma_{\sigma_{j_1}} \otimes \gamma_{\sigma_{j_1}})(t_{j_1}, t_{j_1}').\end{aligned}$$

Finalement, le coefficient

$$\frac{\left\langle f, :(\mathfrak{Re}\langle e_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} \dots (\mathfrak{Re}\langle e_{j_r}, \cdot\rangle)^{\ell_r} : \right\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}}{\sigma_{j_1}^{2\ell_1}}$$

est égal à

$$\int_{\mathcal{H}_1} \dots \int_{\mathcal{H}_{r+1}} D^{\ell_1} f(x)(e_{j_1}, \dots, e_{j_1}) \prod_{t=2}^{r} :(\mathfrak{Re}\langle e_{j_t}, \cdot\rangle)^{\ell_t} : (x_t)\, dm_1(x_1) \dots dm_{r+1}(x_{r+1}).$$

Ensuite, on utilise la même méthode pour calculer

$$\int_{\mathcal{H}_2} D^{\ell_1} f(x)(e_{j_1}, \dots, e_{j_1}) : (\mathfrak{Re}\langle e_{j_2}, \cdot\rangle)^{\ell_2} : (x_2)\, dm_2(x_2)$$

et on trouve que cette intégrale vaut

$$\sigma_{j_2}^{2\ell_2} \int_{\mathcal{H}_2} D^{\ell_1+\ell_2} f(x)(\underbrace{e_{j_1}, \dots, e_{j_1}}_{\ell_1 \text{ fois}}, \underbrace{e_{j_2}, \dots, e_{j_2}}_{\ell_2 \text{ fois}})\, dm_2(x_2).$$

A la $i^{\text{ème}}$ étape $(1 \leq i \leq r)$, on trouve par cette méthode que le coefficient

$$\frac{\left\langle f, :(\mathfrak{Re}\langle e_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} \dots (\mathfrak{Re}\langle e_{j_i}, \cdot\rangle)^{\ell_i} : \right\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}}{\sigma_{j_1}^{2\ell_1} \dots \sigma_{j_i}^{2\ell_i}} \tag{5.4}$$

est égal à

$$\int_{\mathcal{H}_1} \dots \int_{\mathcal{H}_{r+1}} D^{\ell_1+\dots+\ell_i} f(x)(\underbrace{e_{j_1}, \dots, e_{j_1}}_{\ell_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e_{j_i}, \dots, e_{j_i}}_{\ell_i \text{ fois}})$$
$$\times \prod_{t=i+1}^{r} :(\mathfrak{Re}\langle e_{j_t}, \cdot\rangle)^{\ell_t} : (x_t)\, dm_1(x_1) \dots dm_{r+1}(x_{r+1}).$$

Pour conclure la preuve, comme $\ell_1 + \dots + \ell_r = k$, on voit que le coefficient (5.4) (pour $i = r$) est égal à

$$\int_{\mathcal{H}_1} \dots \int_{\mathcal{H}_{r+1}} D^k f(x)(\underbrace{e_{j_1}, \dots, e_{j_1}}_{\ell_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e_{j_r}, \dots, e_{j_r}}_{\ell_r \text{ fois}})\, dm_1(x_1) \dots dm_{r+1}(x_{r+1})$$

c'est-à-dire à

$$\int_{\mathcal{H}} D^k f(x)(\underbrace{e_{j_1}, \dots, e_{j_1}}_{\ell_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e_{j_r}, \dots, e_{j_r}}_{\ell_r \text{ fois}})\, dm(x),$$

ce qui achève la preuve du Lemme 5.1.1. □

On explique dans la remarque suivante pourquoi les calculs sont similaires lorsque l'un des indices j_p est négatif.

Remarque 5.1.2. Supposons par exemple que l'indice j_1 soit strictement négatif. En reprenant la preuve du Lemme 5.1.1 (et avec les mêmes notations), on voit que l'on veut calculer l'intégrale

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{H}_1} f(x) :(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} : (x)\, dm_1(x),$$

où on a fixé $(x_2, \dots, x_{r+1}) \in \mathcal{H}_2 \times \dots \times \mathcal{H}_{r+1}$ et où $x = x_1 + x_2 + \dots + x_{r+1}$. Si on note ζ le vecteur $x_2 + \dots + x_{r+1}$, on a aussi

$$\mathcal{I} = \int_{\mathcal{H}_1} f(x_1 + \zeta) :(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} : (x)\, dm_1(x).$$

Or on sait d'après la Proposition 4.3.6 que

$$:(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle)^{\ell_1} := \sigma_{j_1}^{\ell_1} H_{\ell_1}\left(\frac{\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle}{\sigma_{j_1}}\right).$$

Maintenant, m_1 est la loi de probabilité du vecteur gaussien $(\langle e_1, \cdot\rangle, \dots, \langle e_{-j_1}, \cdot\rangle)$ et comme j_1 est strictement négatif, $\mathfrak{e}_{j_1} = ie_{-j_1}$ (et donc $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle = \mathfrak{Im}\langle e_{-j_1}, \cdot\rangle$). Par conséquent,

$$\mathcal{I} = \sigma_{j_1}^{\ell_1} \int_{\mathbb{R}^{-2j_1}} f\left(\sum_{s=1}^{-j_1} t_s e_s + i \sum_{s=1}^{-j_1-1} t'_s e_s + it'_{-j_1} e_{j_1} + \zeta\right) H_{\ell_1}\left(\frac{t'_{-j_1}}{\sigma_{j_1}}\right)$$
$$\times\, d(\gamma_{\sigma_1} \otimes \gamma_{\sigma_1})(t_1, t'_1) \dots d(\gamma_{\sigma_{-j_1}} \otimes \gamma_{\sigma_{-j_1}})(t_{-j_1}, t'_{-j_1}).$$

On fixe $(t_1,\dots,t_{-j_1},t_1',\dots,t_{-j_1-1}')\in\mathbb{R}^{-2j_1-1}$ et on pose $\omega:=\sum_{s=1}^{-j_1}t_se_s+i\sum_{s=1}^{-j_1-1}t_s'e_s+\zeta$. L'intégrale que l'on doit désormais calculer est la suivante :

$$\mathcal{J}=\int_{\mathbb{R}}f(ite_{-j_1}+\omega)H_{\ell_1}\left(\frac{t}{\sigma_{j_1}}\right)d\gamma_{\sigma_{-j_1}}(t).$$

En effectuant le changement de variables $t=\sigma_{j_1}s$, on voit que

$$\begin{aligned}\mathcal{J}&=\int_{\mathbb{R}}f(ite_{-j_1}+\omega)H_{\ell_1}\left(\frac{t}{\sigma_{j_1}}\right)e^{-t^2/2\sigma_{j_1}^2}\frac{dt}{\sigma_{j_1}\sqrt{2\pi}}\\&=\int_{\mathbb{R}}f(i\sigma_{j_1}se_{-j_1}+\omega)H_{\ell_1}(s)e^{-s^2/2}\frac{ds}{\sqrt{2\pi}}.\end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'expression du polynôme H_{ℓ_1} (voir Proposition 4.3.6) et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{J}&=(-1)^{\ell_1}\int_{\mathbb{R}}f(i\sigma_{j_1}se_{-j_1}+\omega)\frac{d^{\ell_1}}{ds^{\ell_1}}e^{-s^2/2}\frac{ds}{\sqrt{2\pi}}\\&=\sigma_{j_1}^{\ell_1}\int_{\mathbb{R}}D^{\ell_1}f(i\sigma_{j_1}se_{-j_1}+\omega)(\underbrace{ie_{-j_1},\dots,ie_{-j_1}}_{\ell_1\text{ fois}})e^{-s^2/2}\frac{ds}{\sqrt{2\pi}}\\&=\sigma_{j_1}^{\ell_1}\int_{\mathbb{R}}D^{\ell_1}f(ite_{-j_1}+\omega)(\underbrace{ie_{-j_1},\dots,ie_{-j_1}}_{\ell_1\text{ fois}})e^{-t^2/2\sigma_{j_1}^2}\frac{dt}{\sigma_{j_1}\sqrt{2\pi}},\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du changement de variables $t=\sigma_{j_1}s$. Par conséquent,

$$\mathcal{J}=\sigma_{j_1}^{\ell_1}\int_{\mathbb{R}}D^{\ell_1}f(t\mathfrak{e}_{j_1}+\omega)(\underbrace{\mathfrak{e}_{j_1},\dots,\mathfrak{e}_{j_1}}_{\ell_1\text{ fois}})e^{-t^2/2\sigma_{j_1}^2}\frac{dt}{\sigma_{j_1}\sqrt{2\pi}}.$$

Le calcul se poursuit alors de la même manière que dans la preuve du Lemme 5.1.1.

Remarque 5.1.3. Dans la suite, nous notons $\int_{\mathcal{H}}D^kf(x)\,dm(x)$ la forme k-linéaire continue définie par

$$\int_{\mathcal{H}}D^kf(x)\,dm(x)(x_1,\dots,x_k):=\int_{\mathcal{H}}D^kf(x)(x_1,\dots,x_k)\,dm(x)$$

pour tous vecteurs $x_1,\dots,x_k$ de $\mathcal{H}$. Ainsi, avec les notations du Lemme 5.1.1, on a aussi

$$a^{(k)}_{\underbrace{j_1,\dots,j_1}_{\ell_1\text{ fois}},\dots,\underbrace{j_r,\dots,j_r}_{\ell_r\text{ fois}}}=\frac{1}{\ell_1!\dots\ell_r!}\int_{\mathcal{H}}D^kf(x)\,dm(x)(\underbrace{\mathfrak{e}_{j_1},\dots,\mathfrak{e}_{j_1}}_{\ell_1\text{ fois}},\dots,\underbrace{\mathfrak{e}_{j_r},\dots,\mathfrak{e}_{j_r}}_{\ell_r\text{ fois}}).$$

Afin d'estimer la vitesse de mélange, nous aurons besoin de décomposer d'une autre manière notre fonction f_k dans la base (4.9) de : $\mathcal{G}^k$:.

5.1.2 Une nouvelle décomposition des fonctions $f_k \in :\mathcal{G}^k:$

On va écrire différemment nos fonctions f_k qui apparaissent dans l'écriture (4.12). Plus précisément, on a la proposition suivante qui est une conséquence immédiate du Corollaire 4.3.11.

Proposition 5.1.4. *Soit f_k un élément de l'espace $:\mathcal{G}^k:$. Il existe une suite de nombres réels $\big(\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\big)_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k}$ telle que*

$$f_k = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} :\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1},\cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k},\cdot\rangle: \tag{5.5}$$

et telle que la série

$$k! \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in\mathbb{Z}^k} \big|\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\big|^2 \sigma^2_{i_1}\dots\sigma^2_{i_k}$$

soit convergente.

La différence avec la première décomposition (4.12) est que chaque transformée de Wick $:\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1},\cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k},\cdot\rangle:$ apparaît plusieurs fois. Plus précisément, chaque *nouveau* coefficient $\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}$ se calcule en fonction de l'*ancien* coefficient $a^{(k)}_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(k)}}$ (défini dans (4.13)), où σ est une permutation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ telle que $i_{\sigma(1)} \leq \dots \leq i_{\sigma(k)}$. Le résultat suivant permet de calculer les nouveaux coefficients $\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}$ en fonction des anciens coefficients $a^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}$.

Proposition 5.1.5. *Pour tout k-uplet $(i_1,\dots,i_k)$ d'entiers relatifs non nuls, il existe des entiers r, $j_1,\dots,j_r$ et $\ell_1,\dots,\ell_r$ tels que ℓ_1 entiers de l'ensemble $\{i_1,\dots,i_k\}$ sont égaux à j_1,..., ℓ_r entiers de l'ensemble $\{i_1,\dots,i_k\}$ sont égaux à j_r, où $j_1 < \dots < j_r$ et $\ell_1+\dots+\ell_r = k$. Avec cette notation,*

$$\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} = \frac{\ell_1!\dots\ell_r!}{k!}\, a^{(k)}_{\underbrace{j_1,\dots,j_1}_{\ell_1 \text{ fois}},\dots,\underbrace{j_r,\dots,j_r}_{\ell_r \text{ fois}}}. \tag{5.6}$$

Démonstration. Le calcul des coefficients découle directement du Lemme A.2.6. En effet, le nouveau coefficient $\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}$ est égal au coefficient $a^{(k)}_{\underbrace{j_1,\dots,j_1}_{\ell_1 \text{ fois}},\dots,\underbrace{j_r,\dots,j_r}_{\ell_r \text{ fois}}}$ divisé par $\frac{k!}{\ell_1!\dots\ell_r!}$.

□

La nouvelle décomposition (5.5) de nos fonctions f_k fait apparaître naturellement une forme k-linéaire symétrique qui sera déterminante dans l'estimation de la vitesse de mélange.

5.1.3 La forme multilinéaire $\mathcal{B}_{f_k}$ associée à f_k

Tout d'abord, nous introduisons la définition suivante.

Définition 5.1.6. Une suite de nombres réels $(\alpha_{i_1,\dots,i_k})_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k}$ est dite *symétrique* si pour toute permutation σ de $\mathfrak{S}_k$ et pour tout k-uplet $(i_1,\dots,i_k)$ d'entiers relatifs non nuls, on a $\alpha_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(k)}} = \alpha_{i_1,\dots,i_k}$.

On a alors la propriété immédiate suivante.

Proposition 5.1.7. *La suite de nombres réels* $\big(\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\big)_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k}$ *qui apparaît dans la décomposition* (5.5) *est symétrique.*

La raison pour laquelle nous préférons considérer la décomposition (5.5) de nos fonctions f_k est que la symétrie des coefficients qui apparaissent dans cette décomposition nous permet de définir formellement une application de plusieurs variables *symétrique* naturellement associée à f_k.

Définition 5.1.8. Soient k un entier naturel et f_k un élément de : $\mathcal{G}^k$:. Lorsque la série

$$\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} x^{(1)}_{i_1}\dots x^{(k)}_{i_k}$$

converge pour tous vecteurs $x^{(1)},\dots,x^{(k)}$ de $\ell_2(\mathbb{Z}^*,\mathbb{R})$, on définit la forme k-linéaire symétrique $\mathcal{B}_{f_k}$ associée à f_k par

$$\begin{array}{rcc} \mathcal{B}_{f_k} : \ell_2(\mathbb{Z}^*,\mathbb{R})\times\dots\times\ell_2(\mathbb{Z}^*,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Big(\big(x^{(1)}_{i_1}\big)_{i_1\in\mathbb{Z}^*},\dots,\big(x^{(k)}_{i_k}\big)_{i_k\in\mathbb{Z}^*}\Big) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} x^{(1)}_{i_1}\dots x^{(k)}_{i_k}. \end{array} \tag{5.7}$$

Nos espaces de fonctions régulières seront définis de telle sorte que les applications $\mathcal{B}_{f_k}$ soient des formes multilinéaires bornées. Rappelons que si elle est bien définie, la forme k-linéaire $\mathcal{B}_{f_k}$ est dite bornée (ou, de façon équivalente, continue) s'il existe une constante $C>0$ telle que pour tous les vecteurs $\big(x^{(1)}_{i_1}\big)_{i_1\in\mathbb{Z}^*},\dots,\big(x^{(k)}_{i_k}\big)_{i_k\in\mathbb{Z}^*}$ de $\ell_2(\mathbb{Z}^*,\mathbb{R})$, on ait

$$\left|\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} x^{(1)}_{i_1}\dots x^{(k)}_{i_k}\right| \le C\,\big|\big|x^{(1)}\big|\big|_2\dots\big|\big|x^{(k)}\big|\big|_2.$$

Dans ce cas, on notera $||\mathcal{B}_{f_k}||$ la norme de la forme k-linéaire bornée $\mathcal{B}_{f_k}$, c'est-à-dire

$$||\mathcal{B}_{f_k}|| = \sup_{||x^{(1)}||\le 1,\dots,||x^{(k)}||\le 1}\left|\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} x^{(1)}_{i_1}\dots x^{(k)}_{i_k}\right|.$$

Remarque 5.1.9. Lorsque l'application $\mathcal{B}_{f_k}$ est bien définie, autrement dit si la série

$$\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} x^{(1)}_{i_1}\dots x^{(k)}_{i_k}$$

converge pour tous vecteurs $x^{(1)},\dots,x^{(k)}$ de $\ell_2(\mathbb{Z}^*,\mathbb{R})$, alors on peut montrer facilement en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus que la forme k-linéaire $\mathcal{B}_{f_k}$ est automatiquement bornée.

Nous donnons ici un exemple important de classe de fonctions f de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ pour lesquelles les applications $\mathcal{B}_{f_k}$ définissent bien des formes k-linéaires bornées. Le résultat que nous démontrons ci-dessous montre qu'il existe un lien important entre la forme k-linéaire $\mathcal{B}_{f_k}$ associée à la fonction f_k et la fonction infiniment différentiable f satisfaisant la condition d'intégrabilité (5.2). Nous introduisons la fonction ϑ définie par

$$\begin{array}{rccc} \vartheta: & \ell_2(\mathbb{Z}^*,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & (x_j)_{j\in\mathbb{Z}^*} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}^*} x_j\mathfrak{e}_j, \end{array}$$

où $(e_j)_{j\geq 1}$ est la base hilbertienne de $\mathcal{H}$ avec laquelle nous travaillons. Autrement dit,

$$\vartheta(x)=\sum_{j=1}^{+\infty}(x_j+ix_{-j})e_j$$

pour tout $x\in\ell_2(\mathbb{Z}^*,\mathbb{R})$. En particulier, ϑ est un opérateur unitaire.

Théorème 5.1.10. *Soit $f:\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction infiniment différentiable vérifiant la condition d'intégrabilité*

$$\int_{\mathcal{H}}\big|\big|D^kf(x)\big|\big|\,dm(x)<+\infty \qquad \text{pour tout entier naturel } k. \tag{5.8}$$

Pour tout entier naturel k non nul, la forme k-linéaire $\mathcal{B}_{f_k}$ est bien définie et on a la représentation suivante :

$$\mathcal{B}_{f_k}\big(x^{(1)},\dots,x^{(k)}\big)=\frac{1}{k!}\int_{\mathcal{H}}D^kf(x)\big(\vartheta\big(x^{(1)}\big),\dots,\vartheta\big(x^{(k)}\big)\big)\,dm(x)$$

pour tous vecteurs $x^{(1)},\dots,x^{(k)}$de $\ell_2(\mathbb{Z}^*,\mathbb{R})$. En particulier, la forme k-linéaire $\mathcal{B}_{f_k}$ est bornée et

$$||\mathcal{B}_{f_k}||=\frac{1}{k!}\cdot\left|\left|\int_{\mathcal{H}}D^kf(x)\,dm(x)\right|\right|. \tag{5.9}$$

Démonstration. On fixe un r-uplet d'entiers relatifs non nuls $(j_1,\dots,j_r)$ tel que $j_1<\dots<j_r$ et un r-uplet d'entiers naturels non nuls $(\ell_1,\dots,\ell_r)$ tel que $\ell_1+\dots+\ell_r=k$. D'après le Lemme 5.1.1 et l'expression des nouveaux coefficients (5.6), on a

$$\begin{aligned}\alpha^{(k)}_{\underbrace{j_1,\dots,j_1}_{\ell_1\text{ fois}},\dots,\underbrace{j_r,\dots,j_r}_{\ell_r\text{ fois}}}&=\frac{\ell_1!\dots\ell_r!}{k!}\cdot\frac{1}{\ell_1!\dots\ell_r!}\int_{\mathcal{H}}D^kf(z)\,dm(z)(\underbrace{\mathfrak{e}_{j_1},\dots,\mathfrak{e}_{j_1}}_{\ell_1\text{ fois}},\dots,\underbrace{\mathfrak{e}_{j_r},\dots,\mathfrak{e}_{j_r}}_{\ell_r\text{ fois}})\\&=\frac{1}{k!}\int_{\mathcal{H}}D^kf(z)\,dm(z)(\underbrace{\mathfrak{e}_{j_1},\dots,\mathfrak{e}_{j_1}}_{\ell_1\text{ fois}},\dots,\underbrace{\mathfrak{e}_{j_r},\dots,\mathfrak{e}_{j_r}}_{\ell_r\text{ fois}}).\end{aligned}$$

Comme la suite $\big(\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\big)_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k}$ est symétrique, on peut en déduire que pour tout k-uplet d'entiers relatifs non nuls $(i_1,\dots,i_k)$, on a

$$\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}=\frac{1}{k!}\int_{\mathcal{H}}D^kf(z)\,dm(z)(\mathfrak{e}_{i_1},\dots,\mathfrak{e}_{i_k}).$$

En utilisant maintenant la multilinéarité de $\mathcal{B}_{f_k}$, on en déduit que pour tous vecteurs $x^{(1)} = \big(x^{(1)}_{i_1}\big)_{i_1\in\mathbb{Z}^*}, \dots, x^{(k)} = \big(x^{(k)}_{i_k}\big)_{i_k\in\mathbb{Z}^*}$ de $\ell_2(\mathbb{Z}^*, \mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{f_k}\big(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\big) &= \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\, x^{(1)}_{i_1}\dots x^{(k)}_{i_k} \\
&= \frac{1}{k!} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \int_{\mathcal{H}} D^k f(z)\, dm(z)(\mathfrak{e}_{i_1}, \dots, \mathfrak{e}_{i_k})\, x^{(1)}_{i_1}\dots x^{(k)}_{i_k} \\
&= \frac{1}{k!} \int_{\mathcal{H}} D^k f(z)\, dm(z)\big(\vartheta\big(x^{(1)}\big), \dots, \vartheta\big(x^{(k)}\big)\big).
\end{aligned}$$

Cette dernière série d'égalité montre en particulier que $\mathcal{B}_{f_k}$ est bien définie en tout k-uplet $\big(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\big)$ de vecteurs de $\ell_2(\mathbb{Z}^*, \mathbb{R})$. L'expression de la norme de $\mathcal{B}_{f_k}$ est une conséquence du fait que $\vartheta : \ell_2(\mathbb{Z}^*, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{H}$ est un opérateur unitaire. Ceci achève la preuve du Théorème 5.1.10. □

On peut maintenant définir un espace de fonctions régulières $\mathcal{X}$ qui nous sera utile dans la suite. On donnera aussi quelques exemples de fonctions élémentaires appartenant à cet espace.

5.1.4 Définition de l'espace $\mathcal{X}$ et exemples

On définit l'espace $\mathcal{X}$ comme l'ensemble des fonctions $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ telles que les applications $\mathcal{B}_{f_k}$ définissent des formes k-linéaires bornées (où $\mathcal{B}_{f_k}$ est l'application (5.7) associée à la composante f_k de f dans la décomposition de la fonction f suivant son chaos de Wiener $f = \sum_{k\geq 0} f_k$) et telles que la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ||\mathcal{B}_{f_k}||^2$$

soit convergente. On définit encore l'application $||\cdot||_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow [0, +\infty[$ par

$$||f||_{\mathcal{X}} := \left(||f||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} + \sum_{k=0}^{+\infty} ||\mathcal{B}_{f_k}||^2 \right)^{1/2} \tag{5.10}$$

pour toute fonction f de $\mathcal{X}$. On a alors les propriétés suivantes.

Proposition 5.1.11. *(i) L'application* $||\cdot||_{\mathcal{X}}$ *définie dans* (5.10) *est une norme sur l'espace* $\mathcal{X}$.
(ii) L'espace vectoriel normé $(\mathcal{X}, ||\cdot||_{\mathcal{X}})$ *est un espace de Banach.*
(iii) Soit $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction infiniment différentiable telle que la série*

$$\sum_{k\geq 0} \frac{\big|\big| \int_{\mathcal{H}} D^k f(x)\, dm(x) \big|\big|^2}{(k!)^2}$$

soit convergente. Alors la fonction f appartient à $\mathcal{X}$ et on peut réécrire la norme de f de la façon suivante :

$$||f||_{\mathcal{X}} = \left(||f||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|\left| \int_{\mathcal{H}} D^k f(x)\, dm(x) \right|\right|^2}{(k!)^2} \right)^{1/2}.$$

(iv) L'inclusion $\mathcal{X} \subset L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ est stricte.

Démonstration. (*i*) Le fait que $||\cdot||_{\mathcal{X}}$ soit une norme sur $\mathcal{X}$ découle directement du fait que $||\cdot||$ et $||\cdot||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}$ soient des normes.
(*ii*) Montrons que $(\mathcal{X}, ||\cdot||_{\mathcal{X}})$ est un espace de Banach. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy de l'espace $(\mathcal{X}, ||\cdot||_{\mathcal{X}})$ où le chaos de Wiener de chaque fonction f_n s'écrit

$$f_n = \sum_{k\geq 0} f_{n,k}.$$

On sait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $n_\epsilon \geq 1$ tel que pour tous les entiers $m, n \geq n_\epsilon$, on ait

$$\big|\big|f_m - f_n\big|\big|_{\mathcal{X}} \leq \epsilon.$$

On en déduit que

$$\big|\big|f_m - f_n\big|\big|_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 0} \big|\big|\mathcal{B}_{f_{m,k}} - \mathcal{B}_{f_{n,k}}\big|\big|^2 \leq \epsilon^2 \quad \text{pour tous } m,n \geq n_\epsilon. \tag{5.11}$$

En particulier, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\big(L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m), ||\cdot||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big)$. Ainsi, il existe une fonction $\tilde{f} \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ (dont le chaos de Wiener s'écrit $\tilde{f} = \sum_{k\geq 0} \tilde{f}_k$) telle que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\tilde{f}$ dans l'espace $\big(L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m), ||\cdot||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big)$. Ensuite, d'après la seconde inégalité de (5.11), on a

$$\big|\big|\mathcal{B}_{f_{m,k}} - \mathcal{B}_{f_{n,k}}\big|\big| \leq \epsilon \quad \text{pour tous } m,n \geq n_\epsilon \text{ et pour tout entier naturel } k.$$

Comme l'espace des formes k-linéaires continues (muni de la norme (5.3)) est un espace de Banach, on en déduit qu'il existe une forme k-linéaire symétrique continue $\mathcal{B}_k$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \big|\big|\mathcal{B}_{f_{n,k}} - \mathcal{B}_k\big|\big| = 0 \tag{5.12}$$

pour tout entier naturel k. Si on écrit $\mathcal{B}_k$ comme dans (5.7), on voit facilement que pour tout entier naturel k, on a l'égalité $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{\tilde{f}_k}$. En effet, notons

$$\mathcal{B}_k\big(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\big) = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k} x^{(1)}_{i_1} \ldots x^{(k)}_{i_k}$$

pour tous $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)} \in \ell_2(\mathbb{Z}^*, \mathbb{R})$ et

$$f_{n,k} = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \alpha^{(n,k)}_{i_1,\ldots,i_k} :\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, \cdot\rangle :,$$

et encore

$$\tilde{f}_k = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \beta^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k} : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, \cdot\rangle : .$$

D'après (5.12), on sait que

$$\mathcal{B}_{f_{n,k}}(\mathfrak{e}_{i_1},\ldots,\mathfrak{e}_{i_k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{B}_k(\mathfrak{e}_{i_1},\ldots,\mathfrak{e}_{i_k}),$$

ce qui entraîne que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^{(n,k)}_{i_1,\ldots,i_k} = \alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k} \tag{5.13}$$

pour tout k-uplet d'entiers relatifs non nuls $(i_1,\ldots,i_k)$. D'autre part, comme $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\tilde{f}$ dans $\big(L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m), ||,\cdot||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big)$, on a

$$\big\langle f_n, : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, \cdot\rangle : \big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \big\langle \tilde{f}, : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, \cdot\rangle : \big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}$$

pour tout k-uplet d'entiers relatifs non nuls $(i_1,\ldots,i_k)$. Or, les espaces : $\mathcal{G}^k$: sont orthogonaux, donc en décomposant les fonctions f_n et $\tilde{f}$ suivant leurs chaos de Wiener, il s'ensuit que

$$\big\langle f_{n,k}, : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, \cdot\rangle : \big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \big\langle \tilde{f}_k, : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, \cdot\rangle : \big\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)},$$

ce qui montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^{(n,k)}_{i_1,\ldots,i_k} = \beta^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k}. \tag{5.14}$$

On déduit de (5.13) et (5.14) que $\alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k} = \beta^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k}$ pour tout k-uplet d'entiers relatifs non nuls $(i_1,\ldots,i_k)$. Finalement, on a bien montré l'égalité $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{\tilde{f}_k}$. Maintenant, pour tout entier $n \geq n_\epsilon$, on a

$$\begin{aligned}
||\tilde{f} - f_n||^2_{\mathcal{X}} &= ||\tilde{f} - f_n||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} + \sum_{k=0}^{+\infty} ||\mathcal{B}_k - \mathcal{B}_{f_{n,k}}||^2 \\
&\leq \lim_{m\to+\infty} ||f_m - f_n||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} + \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} ||\mathcal{B}_{f_{m,k}} - \mathcal{B}_{f_{n,k}}||^2 \\
&\leq 2\epsilon^2.
\end{aligned}$$

Ceci montre que la fonction $\tilde{f}$ appartient bien à l'espace $\mathcal{X}$ et que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\tilde{f}$ dans $(\mathcal{X}, ||\cdot||_{\mathcal{X}})$. Finalement, $(\mathcal{X}, ||\cdot||_{\mathcal{X}})$ est un espace de Banach.
(iii) Cette propriété est une conséquence immédiate de (5.9).
(iv) On considère une fonction f dans l'espace gaussien $\mathcal{G}$, c'est-à-dire

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} a_k \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_k, \cdot\rangle$$

où $(a_k)_{k\geq 1}$ est une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} a_k^2\sigma_k^2$ soit convergente. Il est clair que, dans le chaos de Wiener de f, $f_1 = f$ et $f_k = 0$ pour tout entier naturel

k différent de 1, d'où l'on déduit que f appartient à l'espace $\mathcal{X}$ si et seulement si $f_1 = f$ définit une forme linéaire continue. Or il est clair que

$$||\mathcal{B}_{f_1}|| = ||(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^*}||_2$$

et donc cette norme est finie si et seulement si $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^*}$ est un élément de $\ell_2(\mathbb{Z}^*, \mathbb{R})$, ce qui n'est pas toujours le cas. □

Donnons maintenant quelques exemples de fonctions qui appartiennent à l'espace $\mathcal{X}$.

Exemple 5.1.12. Soit N un entier naturel non nul. Une fonction $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ de la forme

$$f = \phi\big(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle, \ldots, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle\big),$$

où $\phi : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable à valeurs réelles, appartient à l'espace $\mathcal{X}$.

Démonstration. L'ojectif de la preuve est de montrer que la norme $||f||_{\mathcal{X}}$ peut être contrôlée par $||f||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}$. Comme les seules variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_\ell, \cdot\rangle$ qui apparaissent dans la fonction f sont les variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle, \ldots,$ $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle$, le chaos de Wiener de f s'écrit sous la forme

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{(j_1,\ldots,j_k)\in(\{-N,\ldots,N\}\setminus\{0\})^k} \alpha^{(k)}_{j_1,\ldots,j_k} : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot\rangle :$$

avec

$$f_k = \sum_{(j_1,\ldots,j_k)\in(\{-N,\ldots,N\}\setminus\{0\})^k} \alpha^{(k)}_{j_1,\ldots,j_k} : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot\rangle :$$

et la quantité

$$||f||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \sum_{k=0}^{+\infty} ||f_k||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}$$

est finie. Nous allons dans un premier temps calculer explicitement la norme de f dans l'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. Pour tout entier naturel k, nous avons

$$\begin{aligned} ||f_k||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = & \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_k)\in(\{-N,\ldots,N\}\setminus\{0\})^k \\ (j_1,\ldots,j_k)\in(\{-N,\ldots,N\}\setminus\{0\})^k}} \alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k} \alpha^{(k)}_{j_1,\ldots,j_k} \\ & \times \int_{\mathcal{H}} : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, \cdot\rangle : (x) : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot\rangle : (x)\, dm(x). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Mais d'après la Proposition 4.4.5 (appliquée pour $n = 0$), l'intégrale (5.15) est égale à

$$\sigma^2_{j_1} \ldots \sigma^2_{j_k} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k} \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \mathfrak{e}_{j_{\tau(1)}}\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, \mathfrak{e}_{j_{\tau(k)}}\rangle$$

et on sait que pour tous entiers relatifs i et j, $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_i, \mathfrak{e}_j\rangle$ est non nul égal à 1 si et seulement si $i = j$. On en déduit que l'intégrale (5.15) est non nulle si et seulement si il existe une permutation τ de $\mathfrak{S}_k$ telle que $i_\ell = j_{\tau(\ell)}$ pour tout $\ell \in \{1, \dots, k\}$, on ait $i_\ell = j_{\tau(\ell)}$. En particulier, cette intégrale est non nulle si et seulement si les ensembles d'indices $\{i_1, \dots, i_k\}$ et $\{j_1, \dots, j_k\}$ coïncident (avec multiplicité). Comme les coefficients $\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}$ sont symétriques, on en déduit que

$$||f_k||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\{-N,\dots,N\}\setminus\{0\})^k} \sum_{\substack{(j_1,\dots,j_k)\in(\{-N,\dots,N\}\setminus\{0\})^k \\ \{j_1,\dots,j_k\}=\{i_1,\dots,i_k\}}} \left|\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\right|^2$$
$$\times \int_{\mathcal{H}} :\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, \cdot\rangle : (x) : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot\rangle : (x)\, dm(x).$$

Fixons maintenant un k-uplet $(i_1, \dots, i_k)$ d'entiers relatifs appartenant à l'ensemble $\{-N, \dots, N\} \setminus \{0\}$. Il existe alors des entiers $r \in \{1, \dots, k\}$, $\ell_1, \dots, \ell_r$ et $p_1, \dots, p_r$ tels que

$$\{i_1, \dots, i_k\} = \{\underbrace{\ell_1, \dots, \ell_1}_{p_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{\ell_r, \dots, \ell_r}_{p_r \text{ fois}}\}, \tag{5.16}$$

avec $p_1 + \cdots + p_r = k$ et $\ell_1 < \cdots < \ell_r$. D'après la Proposition 4.3.10, on voit alors que pour ce k-uplet $(i_1, \dots, i_k)$,

$$\int_{\mathcal{H}} \big(:\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, \cdot\rangle : (x)\big)^2\, dm(x) = \mathrm{var}_m\big[: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{\ell_1}, \cdot\rangle)^{p_1} \dots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{\ell_r}, \cdot\rangle)^{p_r} : \big]$$
$$= p_1! \dots p_r!\, \sigma^{2p_1}_{\ell_1} \dots \sigma^{2p_r}_{\ell_r}.$$

Or, d'après le Lemme A.2.6, le nombre de k-uplets $(j_1, \dots, j_k)$ vérifiant (5.16) est égal (avec nos notations) à $\frac{k!}{p_1! \dots p_r!}$. On en déduit alors que

$$||f_k||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = k! \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\{-N,\dots,N\}\setminus\{0\})^k} \left|\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\right|^2 \sigma^2_{i_1} \dots \sigma^2_{i_k}.$$

Finalement, la norme de f dans l'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ est égale à

$$||f||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \sum_{k=0}^{+\infty} k! \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\{-N,\dots,N\}\setminus\{0\})^k} \left|\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\right|^2 \sigma^2_{i_1} \dots \sigma^2_{i_k}. \tag{5.17}$$

Par ailleurs, l'application k-linéaire $\mathcal{B}_{f_k}$ est définie par

$$\mathcal{B}_{f_k}\big(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\big) = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\{-N,\dots,N\}\setminus\{0\})^k} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} x^{(1)}_{i_1} \dots x^{(k)}_{i_k}$$

pour tous vecteurs $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ de $\ell(\mathbb{Z}^*, \mathbb{R})$. Remarquons que comme la somme définissant $\mathcal{B}_{f_k}$ est finie, cette forme k-linéaire est bien définie et est bornée. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\left|\mathcal{B}_{f_k}\big(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\big)\right| \le \left(\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\{-N,\dots,N\}\setminus\{0\})^k} \left|\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\right|^2 \right)^{1/2} \big|\big|x^{(1)}\big|\big|_2 \cdots \big|\big|x^{(k)}\big|\big|_2,$$

d'où l'on déduit que

$$||\mathcal{B}_{f_k}|| \leq \left(\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\{-N,\dots,N\}\setminus\{0\})^k} \left|\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\right|^2 \right)^{1/2}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ||\mathcal{B}_{f_k}||^2 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\{-N,\dots,N\}\setminus\{0\})^k} \left|\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\right|^2$$

et il reste à voir que cette quantité peut être contrôlée par $||f||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}$ dont la valeur est donnée dans (5.17). Or, si on note

$$\tilde{\sigma} = \min(\sigma_{-N}, \dots, \sigma_N)$$

alors on a $\tilde{\sigma}^k \leq \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}$ pour tout k-uplet $(i_1, \dots, i_k) \in (\{-N, \dots, N\} \setminus \{0\})^k$ et la suite $(k!\tilde{\sigma}^{2k})_{k\geq 0}$ tend vers $+\infty$ (car $\tilde{\sigma} > 0$). Il existe donc une constante $C_N > 0$ telle que pour tout entier naturel k, on ait $k!\tilde{\sigma}^{2k} \geq C_N$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} ||\mathcal{B}_{f_k}||^2 &\leq C_N^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} k! \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\{-N,\dots,N\}\setminus\{0\})^k} \left|\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\right|^2 \tilde{\sigma}^{2k} \\
&\leq C_N^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} k! \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\{-N,\dots,N\}\setminus\{0\})^k} \left|\alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\right|^2 \sigma_{i_1}^2 \dots \sigma_{i_k}^2 \\
&\leq C_N^{-1} ||f||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}.
\end{aligned}$$

Ceci montre donc bien que la fonction f appartient à l'espace $\mathcal{X}$ avec

$$||f||^2_{\mathcal{X}} \leq (1 + C_N^{-1})||f||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}.$$

□

Avant de donner un deuxième exemple de classe de fonctions contenue dans $\mathcal{X}$, on rappelle la définition d'une fonction entière de type exponentiel (pour plus d'informations sur ces fonctions, voir le livre [9]).

Définition 5.1.13. Une fonction entière $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite de *type exponentiel* s'il existe des constantes strictement positives M et τ telles que

$$|\phi(re^{i\theta})| \leq Me^{\tau r}, \qquad \text{pour tous } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}. \tag{5.18}$$

Si ϕ est de type exponentiel et si on note κ la borne inférieure des nombres réels $\tau > 0$ tels que ϕ vérifie (5.18), alors on dit que la fonction ϕ est de type exponentiel κ.

Si $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction entière, on peut la développer en série entière sous la forme

$$\phi(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k!} z^k, \qquad \text{où } a_k \in \mathbb{C}. \tag{5.19}$$

On peut caractériser les fonctions ϕ qui sont de type exponentiel en fonction des coefficients a_k (voir [9]).

Proposition 5.1.14. [9] *Soit ϕ une fonction entière (développée comme dans (5.19)) et κ un nombre réel positif. La fonction ϕ est de type exponentiel κ si et seulement si*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |a_n|^{1/n} = \kappa.$$

On a alors une nouvelle classe de fonctions régulières contenue dans l'espace $\mathcal{X}$.

Exemple 5.1.15. Soit $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de type exponentiel κ tel que $\kappa < \big(2||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}\big)^{-1}$. Alors la fonction $f = \mathfrak{Re}\big(\phi \circ ||\cdot||^2\big)$ appartient à $\mathcal{X}$.

Démonstration. On sait qu'il existe des constantes $0 < \kappa < \tau < (2||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})})^{-1}$ et $M > 0$ telles que $|\phi(re^{i\theta})| \leq Me^{\tau r}$ pour tous $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Dans un premier temps, on doit vérifier que la fonction f appartient à $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. D'après l'inégalité précédente, il suffit de montrer que la fonction $e^{\tau||\cdot||^2}$ appartient à $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. D'après la Proposition 3.1.3, $(\langle e_k, \cdot\rangle)_{k\geq 1}$ est une suite de variables gaussiennes complexes indépendantes, donc on a

$$\int_{\mathcal{H}} e^{2\tau||x||^2}\, dm(x) = \int_{\mathcal{H}} \left(\prod_{k=1}^{+\infty} e^{2\tau|\langle e_k,x\rangle|^2}\right) dm(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \int_{\mathcal{H}} e^{2\tau|\langle e_k,x\rangle|^2}\, dm(x).$$

Or, les variables gaussiennes $\mathfrak{Re}\langle e_k, \cdot\rangle$ et $\mathfrak{Im}\langle e_k, \cdot\rangle$ sont indépendantes et de même loi donc

$$\int_{\mathcal{H}} e^{2\tau|\langle e_k,x\rangle|^2}\, dm(x) = \left(\int_{\mathcal{H}} e^{2\tau(\mathfrak{Re}\langle e_k,x\rangle)^2}\, dm(x)\right)^2$$

pour tout entier naturel k non nul. Comme la variable aléatoire $\mathfrak{Re}\langle e_k, \cdot\rangle$ est gaussienne (vue comme variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$), on peut calculer facilement l'intégrale ci-dessus :

$$\int_{\mathcal{H}} e^{2\tau(\mathfrak{Re}\langle e_k,x\rangle)^2}\, dm(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma_k^2} - 2\tau\right)t^2} \frac{dt}{\sigma_k\sqrt{2\pi}} = \left(\frac{1}{1 - 4\tau\sigma_k^2}\right)^{1/2}.$$

Remarquons que l'intégrale ci-dessus est bien définie d'après la condition

$$\tau < \big(2||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}\big)^{-1}$$

car $||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})} = 2\sum_{k\geq 1} \sigma_k^2$ et puisque dans ce cas, on a

$$\frac{1}{2\sigma_k^2} - 2\tau > 0.$$

Finalement,

$$\int_{\mathcal{H}} e^{2\tau||x||^2}\, dm(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1-4\tau\sigma_k^2} \right). \tag{5.20}$$

Comme la série $\sum_{k\geq 1} \sigma_k^2$ est convergente, le produit infini (5.20) converge aussi et la fonction $e^{\tau||\cdot||^2}$ appartient à $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$.
Comme la fonction $g = \phi \circ ||\cdot||^2 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est infiniment différentiable (car $||\cdot||^2$ est infiniment différentiable et car ϕ est une fonction entière), pour montrer que f appartient à l'espace $\mathcal{X}$ il suffit de voir que la série

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} \cdot \left|\left| \int_{\mathcal{H}} D^k g(x)\, dm(x) \right|\right|$$

est convergente. On développe la fonction ϕ comme dans (5.19) et d'après la Proposition 5.1.14, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|a_n| \leq C\tau^n, \qquad \text{pour tout entier naturel } n. \tag{5.21}$$

Pour calculer les différentielles successives de g, on introduit la forme bilinéaire symétrique A définie par

$$\begin{array}{rccc} A: & \mathcal{H}\times\mathcal{H} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & \sum_{k\geq 1} \big(\mathfrak{Re}\langle e_k, u\rangle \mathfrak{Re}\langle e_k, v\rangle + \mathfrak{Im}\langle e_k, u\rangle \mathfrak{Im}\langle e_k, v\rangle \big). \end{array}$$

Il est alors facile de voir que les différentielles de g peuvent s'écrirent sous la forme

$$D^{2n} g(x)(h_1, \ldots, h_{2n}) = \sum_{j=0}^{n} 2^{n+j} \mathcal{S}_{2j}(x, h_1, \ldots, h_{2n}) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{k+n+j}}{k!} ||x||^{2k}$$

où pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, $\mathcal{S}_{2j}(x, h_1, \ldots, h_{2n})$ est la somme de tous les termes de la forme

$$A(x, h_{i_1}) \ldots A(x, h_{i_{2j}}) A(h_{i_{2j+1}}, h_{i_{2j+2}}) \ldots A(h_{i_{2n-1}}, h_{i_{2n}}),$$

avec $\{i_1, \ldots, i_{2n}\} = \{1, \ldots, 2n\}$, et

$$D^{2n+1} g(x)(h_1, \ldots, h_{2n+1}) = \sum_{j=0}^{n} 2^{n+j+1} \mathcal{S}_{2j+1}(x, h_1, \ldots, h_{2n+1}) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{k+n+j+1}}{k!} ||x||^{2k},$$

où pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, $\mathcal{S}_{2j+1}(x, h_1, \ldots, h_{2n+1})$ est la somme de tous les termes de la forme

$$A(x, h_{i_1}) \ldots A(x, h_{i_{2j+1}}) A(h_{i_{2j+2}}, h_{i_{2j+3}}) \ldots A(h_{i_{2n}}, h_{i_{2n+1}}),$$

avec $\{i_1, \ldots, i_{2n+1}\} = \{1, \ldots, 2n+1\}$. Pour estimer $|D^n g(x)(h_1, \ldots, h_n)|$, on a besoin de calculer le nombre de termes qui apparaissent dans les sommes $\mathcal{S}_{2j}(x, h_1, \ldots, h_{2n})$ et $\mathcal{S}_{2j+1}(x, h_1, \ldots, h_{2n+1})$. Comme le nombre de partitions par paires d'un ensemble à $2p$ éléments est égal à $\frac{(2p)!}{2^p p!}$ (voir le Lemme A.2.2), on en déduit qu'il y a exactement

$\binom{2n}{2j}\frac{(2(n-j))!}{2^{n-j}(n-j)!}$ termes dans la somme $\mathcal{S}_{2j}(x,h_1,\dots,h_{2n})$ et $\binom{2n+1}{2j+1}\frac{(2(n-j))!}{2^{n-j}(n-j)!}$ dans la somme $\mathcal{S}_{2j+1}(x,h_1,\dots,h_{2n+1})$. Maintenant, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$|A(u,v)| \leq 2\,||u||\,||v|| \qquad \text{pour tous } u,v\in\mathcal{H}$$

et donc pour tous les vecteurs $h_1,\dots,h_{2n}$ de la boule unité fermée $\mathbb{B}$ de $\mathcal{H}$, on a

$$|\mathcal{S}_{2j}(x,h_1,\dots,h_{2n})| \leq \binom{2n}{2j}\frac{(2(n-j))!}{2^{n-j}(n-j)!}2^{n+j}\,||x||^{2j}.$$

Ainsi, d'après l'inégalité (5.21) sur les coefficients a_j, on a

$$\begin{aligned}\left|D^{2n}g(x)(h_1,\dots,h_{2n})\right| &\leq \sum_{j=0}^{n} 2^{n+j}\binom{2n}{2j}\frac{(2(n-j))!}{2^{n-j}(n-j)!}2^{n+j}||x||^{2j}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{C\tau^{k+n+j}}{k!}||x||^{2k}\\ &\leq C(2n)!\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{(4\tau)^{n+j}}{(n-j)!}\cdot\frac{||x||^{2j}}{(2j)!}\right)e^{\tau||x||^2}.\end{aligned}$$

En utilisant la même méthode, on a aussi

$$\left|D^{2n+1}g(x)(h_1,\dots,h_{2n+1})\right| \leq C(2n+1)!\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{(4\tau)^{n+j+1}}{(n-j)!}\cdot\frac{||x||^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)e^{\tau||x||^2}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}\cdot\left|\left|\int_{\mathcal{H}}D^{2n}g(x)\,dm(x)\right|\right| &\leq C\int_{\mathcal{H}}e^{\tau||x||^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(4\tau)^{n+j}}{(n-j)!}\cdot\frac{||x||^{2j}}{(2j)!}\right)dm(x)\\ &= C\int_{\mathcal{H}}e^{\tau||x||^2}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(4\tau||x||)^{2j}}{(2j)!}\left(\sum_{n=j}^{+\infty}\frac{(4\tau)^{n-j}}{(n-j)!}\right)\right)dm(x)\\ &= Ce^{4\tau}\int_{\mathcal{H}}e^{\tau||x||^2}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(4\tau||x||)^{2j}}{(2j)!}\right)dm(x),\end{aligned}$$

et de même,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\left|\left|\int_{\mathcal{H}}D^{2n+1}g(x)\,dm(x)\right|\right| \leq Ce^{4\tau}\int_{\mathcal{H}}e^{\tau||x||^2}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(4\tau||x||)^{2j+1}}{(2j+1)!}\right)dm(x).$$

On en conclut donc qu'il existe une constante $\tilde{C}>0$ telle que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left|\left|\int_{\mathcal{H}}D^{n}g(x)\,dm(x)\right|\right| &\leq Ce^{4\tau}\int_{\mathcal{H}}e^{\tau||x||^2+4\tau||x||}\,dm(x)\\ &\leq \tilde{C}\int_{\mathcal{H}}e^{2\tau||x||^2}\,dm(x).\end{aligned}$$

Comme $\tau < \left(2||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}\right)^{-1}$, l'intégrale

$$\int_{\mathcal{H}} e^{2\tau||x||^2}\, dm(x)$$

est convergente (voir le début de la preuve), et cette estimation montre que la fonction f appartient à l'espace $\mathcal{X}$. □

Remarque 5.1.16. Nous n'avons pas cherché à optimiser la borne $\left(2||E||_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}\right)^{-1}$ ici. Celle-ci est uniquement choisie de sorte que les intégrales soient convergentes.

5.2 L'espace $\mathcal{Y}$

Nous introduisons maintenant la deuxième classe de fonctions régulières avec laquelle nous allons travailler dans le chapitre 6.

5.2.1 Définition de l'espace $\mathcal{Y}$

On définit l'espace $\mathcal{Y}$ comme l'ensemble des fonctions $g \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ telles que les applications $\mathcal{B}_{g_k}$ définissent des formes k-linéaires bornées (où $\mathcal{B}_{g_k}$ est l'application (5.7) associée à la composante g_k de g dans la décomposition de g suivant son chaos de Wiener : $g = \sum_{k\geq 0} g_k$) et telles que

$$\sup_{k\geq 0} k!\, ||\mathcal{B}_{g_k}|| < +\infty.$$

On définit encore l'application $||\cdot||_{\mathcal{Y}} :\longrightarrow [0, +\infty[$ par

$$||g||_{\mathcal{Y}} := ||g||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} + \sup_{k\geq 0} k!\, ||\mathcal{B}_{g_k}||$$

pour toute fonction g de $\mathcal{Y}$.

Proposition 5.2.1. *(i) L'application $||\cdot||_{\mathcal{Y}}$ définit une norme sur l'espace $\mathcal{Y}$.*
(ii) L'espace vectoriel normé $(\mathcal{Y}, ||\cdot||_{\mathcal{Y}})$ est un espace de Banach.
(iii) L'espace $\mathcal{Y}$ est un sous-espace de $\mathcal{X}$.

Démonstration. (*i*) Le fait que $||\cdot||_{\mathcal{Y}}$ soit une norme sur $\mathcal{Y}$ découle simplement du fait que l'on ait des normes $||\cdot||$ et $||\cdot||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}$ sur l'espace des formes multilinéaires et sur l'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$.
(*ii*) Montrons que l'espace vectoriel $\mathcal{Y}$ est complet pour la norme $||\cdot||_{\mathcal{Y}}$. Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{Y}, ||\cdot||_{\mathcal{Y}})$ où le chaos de Wiener de chaque fonction g_n s'écrit

$$g_n = \sum_{k\geq 0} g_{n,k}.$$

On sait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_ϵ tel que pour tous les entiers $m, n \geq n_\epsilon$, on ait

$$||g_m - g_n||_{\mathcal{Y}} \leq \epsilon.$$

On en déduit que

$$||g_m - g_n||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \leq \epsilon \quad \text{et} \quad \sup_{k\geq 0} k!\, ||\mathcal{B}_{g_{m,k}} - \mathcal{B}_{g_{n,k}}|| \leq \epsilon \quad \text{pour tous } m,n \geq n_\epsilon. \tag{5.22}$$

En particulier, il s'ensuit que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $\big(L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m), ||\cdot||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big)$ donc il existe une fonction $\tilde{g} \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ (dont le chaos de Wiener s'écrit $\tilde{g} = \sum_{k\geq 0} \tilde{g}_k$) telle que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\tilde{g}$ dans l'espace $\big(L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m), ||\cdot||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big)$. Ensuite, d'après la seconde inégalité de (5.22), on a

$$||\mathcal{B}_{g_{m,k}} - \mathcal{B}_{g_{n,k}}|| \leq \frac{\epsilon}{k!} \leq \epsilon \quad \text{pour tous } m,n \geq n_\epsilon \text{ et pour tout } k \geq 1.$$

Comme l'espace des formes k-linéaires continues (muni de la norme (5.3)) est un espace de Banach, on en déduit qu'il existe une forme k-linéaire continue $\mathcal{B}_k$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} ||\mathcal{B}_{g_{n,k}} - \mathcal{B}_k|| = 0.$$

Comme dans la preuve de la Proposition 5.1.11, on voit facilement que pour tout entier naturel k, on a l'égalité $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{\tilde{g}_k}$. On en déduit alors que pour tout entier $n \geq n_\epsilon$, on a

$$\begin{aligned} ||\tilde{g} - g_n||_{\mathcal{Y}} &= ||\tilde{g} - g_n||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} + \sup_{k\geq 0} k!\, ||\mathcal{B}_k - \mathcal{B}_{n,k}|| \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} ||g_m - g_n||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} + \lim_{n\to+\infty} k!\, ||\mathcal{B}_{g_{m,k}} - \mathcal{B}_{g_{n,k}}|| \\ &\leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre que la fonction $\tilde{g}$ appartient bien à l'espace $\mathcal{Y}$ et que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\tilde{g}$ dans $(\mathcal{Y}, ||\cdot||_{\mathcal{Y}})$. Finalement, $(\mathcal{Y}, ||\cdot||_{\mathcal{Y}})$ est un espace de Banach.
(iii) Si g appartient à $\mathcal{Y}$, alors il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout entier naturel k, on ait $||\mathcal{B}_{g_k}|| \leq A/k!$. On en déduit que la série de terme général $||\mathcal{B}_{g_k}||$ est de carré sommable et donc que la fonction g appartient à l'espace $\mathcal{X}$. □

On conclut cette section en donnant quelques exemples de fonctions qui appartiennent à l'espace $\mathcal{Y}$.

5.2.2 Exemples

Nous remarquons d'abord que les *fonctions polynômiales* sont bien des éléments de $\mathcal{Y}$.

Exemple 5.2.2. Tout polynôme en les variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_k, \cdot\rangle$ appartient à $\mathcal{Y}$.

Démonstration. En effet, si g est un polynôme en les variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_k, \cdot\rangle$, alors il existe un entier naturel N tel que g appartienne à l'espace $\bigoplus_{k=0}^N : \mathcal{G}^k :$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, N\}$, la somme qui apparaît dans l'application $\mathcal{B}_{g_k}$ est finie. En particulier, chacune de ces applications $\mathcal{B}_{g_k}$ définit bien une forme k-linéaire bornée. De plus, la quantité $\sup_{k\geq 0} k!\, ||\mathcal{B}_{g_k}|| = \max_{0\leq k\leq N} k!\, ||\mathcal{B}_{g_k}||$ est finie. Par conséquent, g est un élément de l'espace $\mathcal{Y}$. □

Plus généralement, on a la classe d'exemples suivante.

Exemple 5.2.3. Soit $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment différentiable telle que

$$\sup_{k\geq 0} \int_{\mathcal{H}} ||D^k g(x)||\, dm(x) < +\infty. \tag{5.23}$$

Alors g appartient à l'espace $\mathcal{Y}$.

Démonstration. Ceci est une conséquence du Théorème 5.1.10. En effet, si $g = \sum_{k\geq 0} g_k$ désigne le chaos de Wiener de la fonction g, alors on sait d'après la condition d'intégrabilité (5.23) et le Théorème 5.1.10 que les applications $\mathcal{B}_{g_k}$ définissent des formes k-linéaires bornées. On en déduit alors que la quantité

$$\sup_{k\geq 0} k!\, ||\mathcal{B}_{g_k}|| = \sup_{k\geq 0} \int_{\mathcal{H}} ||D^k g(x)||\, dm(x)$$

est finie et donc que la fonction g appartient à l'espace $\mathcal{Y}$. □

Chapitre 6

Vitesse de mélange

On considère dans ce chapitre un opérateur linéaire borné T sur l'espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie $\mathcal{H}$ fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$ (construite dans le chapitre 2) et dont les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant. On rappelle qu'on fait l'hypothèse que ce champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E est une fonction α-hölderienne, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C(E) > 0$ telle que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$, on ait

$$\big|\big|E(\lambda) - E(\mu)\big|\big| \leq C(E)|\lambda - \mu|^{\alpha}.$$

On a vu dans le chapitre 3 qu'il n'y avait pas de vitesse de mélange globale dans l'espace $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ (Théorème 3.2.2). Une question naturelle est donc de trouver des classes de fonctions régulières de $L^2(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ pour lesquelles on a une vitesse de mélange. Plus précisèment, l'objectif est de montrer que si f est une fonction de l'espace $\mathcal{X}$ et si g est une fonction de l'espace $\mathcal{Y}$, alors la suite des corrélations $(\mathcal{I}_n(f,g))_{n\geq 1}$ converge vers zéro à la vitesse $n^{-\alpha}$. Dans un premier temps, on va étudier la vitesse de mélange pour des fonctions très particulières. Nous allons en effet étudier la vitesse de convergence vers zéro des corrélations $\mathcal{I}_n(f,g)$ lorsque f et g sont des fonctions de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ d'« un nombre fini de variables », c'est à dire de la forme

$$f = \phi\big(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle, \ldots, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle\big) \text{ et } g = \psi\big(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle, \ldots, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle\big).$$

Autrement dit, les fonctions f et g sont des fonctions en les variables $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle$,..., $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-1}, \cdot\rangle$, $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{1}, \cdot\rangle$,..., $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{N}, \cdot\rangle$. Rappelons encore que la suite $(\mathfrak{e}_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}^*}$ associée à la base hilbertienne $(e_\ell)_{\ell\geq 1}$ de $\mathcal{H}$ est définie par, pour tout entier naturel ℓ non nul,

$$\mathfrak{e}_\ell = e_\ell \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{e}_{-\ell} = ie_\ell$$

de sorte que $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-\ell}, \cdot\rangle = \mathfrak{Im}\langle e_\ell, \cdot\rangle$.

6.1 Fonctions d'un nombre fini de variables et vitesse de mélange

Ce premier résultat sur la vitesse de mélange ne requiert pas de régularité sur les fonctions considérées.

Théorème 6.1.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant et α-höldérien (où $\alpha \in (0, 1]$). Soient N un entier naturel non nul et*

$$f = \phi\big(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle, \ldots, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle\big),\ \ g = \psi\big(\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle, \ldots, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle\big)$$

des fonctions à valeurs réelles qui appartiennent à l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$. Alors il existe une constante $D_N > 0$ (qui dépend seulement de N et de $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$) telle que

$$\big|\mathcal{I}_n(f, g)\big| \leq \frac{D_N}{n^\alpha}\, ||f||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\, ||g||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}$$

pour tout entier naturel n non nul.

Démonstration. Comme les fonctions f et g ne dépendent que des variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle, \ldots, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle$, on peut calculer le chaos de Wiener de ces fonctions en travaillant dans l'espace gaussien

$$\mathcal{G}_N := \mathrm{vect}\big[\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle, \ldots, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle\big] \subset \mathcal{G}.$$

Nous pouvons ainsi développer la fonction f de la façon suivante :

$$f = \sum_{(i_{-N},\ldots,i_N)\in\mathbb{N}^{2N}} f_{i_{-N},\ldots,i_N} : (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle)^{i_{-N}} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle)^{i_N} :$$

où

$$||f||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \sum_{(i_{-N},\ldots,i_N)\in\mathbb{N}^{2N}} |f_{i_{-N},\ldots,i_N}|^2\, i_{-N}!\, \sigma_{-N}^{2i_{-N}} \ldots i_N!\, \sigma_N^{2i_N} < +\infty.$$

En fait, le chaos de Wiener de f s'écrit $f = \sum_{k\geq 0} f_k$, où pour tout entier naturel k,

$$f_k = \sum_{\substack{(i_{-N},\ldots,i_N)\in\mathbb{N}^{2N} \\ i_{-N}+\cdots+i_N=k}} f_{i_{-N},\ldots,i_N} : (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle)^{i_{-N}} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle)^{i_N} : .$$

De même,

$$g = \sum_{(j_{-N},\ldots,j_N)\in\mathbb{N}^{2N}} g_{j_{-N},\ldots,j_N} : (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N}, \cdot\rangle)^{j_{-N}} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_N, \cdot\rangle)^{j_N} :$$

où
$$||g||^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} = \sum_{(j_{-N},\ldots,j_N)\in\mathbb{N}^{2N}} |g_{j_{-N},\ldots,j_N}|^2 \, j_{-N}!\,\sigma_{-N}^{2j_{-N}} \ldots j_N!\,\sigma_N^{2j_N} < +\infty.$$

On écrit maintenant l'expression des corrélations $\mathcal{I}_n(f,g)$ entre f et g. Par définition, cette corrélation vaut
$$\mathcal{I}_n(f,g) = \int_{\mathcal{H}} f(T^n x) g(x)\, dm(x) - \int_{\mathcal{H}} f\, dm \int_{\mathcal{H}} g\, dm$$
et donc $\mathcal{I}_n(f,g)$ est égale à
$$\sum_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2} \sum_{\substack{(i_{-N},\ldots,i_N)\in\mathbb{N}^{2N}\\ i_{-N}+\cdots+i_N=k}} \sum_{\substack{(j_{-N},\ldots,j_N)\in\mathbb{N}^{2N}\\ j_{-N}+\cdots+j_N=\ell}} f_{i_{-N},\ldots,i_N}\, g_{j_{-N},\ldots,j_N}$$
$$\times \mathcal{I}_n\big(: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N},\cdot\rangle)^{i_{-N}} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{N},\cdot\rangle)^{i_N} :, : (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N},\cdot\rangle)^{j_{-N}} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{N},\cdot\rangle)^{j_N} : \big) \qquad (6.1)$$

où la somme sur k et ℓ commence à 1 car les variables aléatoires $: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N},\cdot\rangle)^{i_{-N}} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{N},\cdot\rangle)^{i_N} :$ sont centrées et car les fonctions $f_{0,\ldots,0}$ et $g_{0,\ldots,0}$ sont des fonctions constantes. On sait d'après le Corollaire 4.4.3 que la corrélation (6.1) est nulle lorsque k et ℓ sont des entiers naturels non nuls distincts. D'après le Lemme 4.3.7, lorsque $i_{-N} + \cdots + i_N = j_{-N} + \cdots + j_N = k$, la corrélation
$$\mathcal{I}_n\big(: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N},\cdot\rangle)^{i_{-N}} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{N},\cdot\rangle)^{i_N} :, : (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N},\cdot\rangle)^{j_{-N}} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{N},\cdot\rangle)^{j_N} : \big)$$
est égale à
$$\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_k} \big\langle \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_{-N},\cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle v_{\tau(1)},\cdot\rangle\big\rangle_{L^2(m)} \ldots \big\langle \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_{-N},\cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle v_{\tau(i_{-N})},\cdot\rangle\big\rangle_{L^2(m)}$$
$$\times \big\langle \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_{-N+1},\cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle v_{\tau(i_{-N}+1)},\cdot\rangle\big\rangle_{L^2(m)} \ldots \big\langle \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_{-N+1},\cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle v_{\tau(i_{-N}+i_{-N+1})},\cdot\rangle\big\rangle_{L^2(m)}$$
$$\times \cdots \times \big\langle \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_{N},\cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle v_{\tau(i_{-N}+\cdots+i_{N-1}+1)},\cdot\rangle\big\rangle_{L^2(m)} \ldots \big\langle \mathfrak{Re}\langle T^{*n}\mathfrak{e}_{N},\cdot\rangle, \mathfrak{Re}\langle v_{\tau(N)},\cdot\rangle\big\rangle_{L^2(m)}$$

où $v_1, \ldots, v_k$ sont les vecteurs de $\mathcal{H}$ tels que $v_1 = v_2 = \cdots = v_{j_{-N}} = \mathfrak{e}_{-N}$, $v_{j_{-N}+1} = \cdots = v_{j_{-N+1}} = \mathfrak{e}_{-N+1}, \ldots, v_{j_{-N}+\cdots+j_{N-1}+1} = \cdots = v_k = \mathfrak{e}_N$. En utilisant le Lemme 3.1.2 et la Proposition 2.3.2, on voit alors que
$$\big|\mathcal{I}_n\big(: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N},\cdot\rangle)^{i_{-N}} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{N},\cdot\rangle)^{i_N} :, : (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{-N},\cdot\rangle)^{j_{-N}} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{N},\cdot\rangle)^{j_N} : \big)\big|$$
est inférieure ou égale à
$$k!\frac{C(E,\alpha)^k}{n^{k\alpha}}\cdot$$
Par conséquent,
$$\big|\mathcal{I}_n(f,g)\big| \le \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!C(E,\alpha)^k}{n^{k\alpha}} \Bigg(\sum_{\substack{(i_{-N},\ldots,i_N)\in\mathbb{N}^{2N}\\ i_{-N}+\cdots+i_N=k}} |f_{i_{-N},\ldots,i_N}| \Bigg) \Bigg(\sum_{\substack{(j_{-N},\ldots,j_N)\in\mathbb{N}^{2N}\\ j_{-N}+\cdots+j_N=k}} |g_{j_{-N},\ldots,j_N}| \Bigg).$$

Maintenant il existe une constante $C_N > 0$ telle que pour tous entiers naturels $i_{-N}, \dots, i_N$ tels que $i_{-N} + \cdots + i_N = k$, on ait $C_N^{-k} \le \sigma_{-N}^{i_{-N}} \dots \sigma_N^{i_N}$ (il suffit de prendre $C_N = \max(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_N^{-1})$). On en déduit que

$$\sum_{\substack{(i_{-N},\dots,i_N)\in\mathbb{N}^{2N}\\ i_{-N}+\cdots+i_N=k}} |f_{i_{-N},\dots,i_N}| \le C_N^k \sum_{\substack{(i_{-N},\dots,i_N)\in\mathbb{N}^{2N}\\ i_{-N}+\cdots+i_N=k}} |f_{i_{-N},\dots,i_N}|\sigma_{-N}^{i_{-N}} \dots \sigma_N^{i_N}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(i_{-N},\dots,i_N)\in\mathbb{N}^{2N}\\ i_{-N}+\cdots+i_N=k}} |f_{i_{-N},\dots,i_N}|\sigma_{-N}^{i_{-N}} \dots \sigma_N^{i_N} &= \sum_{\substack{(i_{-N},\dots,i_N)\in\mathbb{N}^{2N}\\ i_{-N}+\cdots+i_N=k}} \frac{|f_{i_{-N},\dots,i_N}|\sqrt{i_{-N}!\dots i_N!}\,\sigma_{-N}^{i_{-N}} \dots \sigma_N^{i_N}}{\sqrt{i_{-N}!\dots i_N!}} \\
&\le \left(\sum_{\substack{(i_{-N},\dots,i_N)\in\mathbb{N}^{2N}\\ i_{-N}+\cdots+i_N=k}} \frac{1}{i_{-N}!\dots i_N!} \right)^{1/2} ||f||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \\
&= \sqrt{\frac{(2N)^k}{k!}}\,||f||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)},
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du Lemme A.2.5. En faisant la même chose pour la somme correspondant à la fonction g, on a aussi

$$\sum_{\substack{(j_{-N},\dots,j_N)\in\mathbb{N}^{2N}\\ j_{-N}+\cdots+j_N=k}} |g_{j_{-N},\dots,j_N}|\sigma_{-N}^{j_{-N}} \dots \sigma_N^{j_N} \le \sqrt{\frac{(2N)^k}{k!}}\,||g||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}.$$

En combinant les estimations précédentes, on trouve finalement que, si n est assez grand,

$$\big|\mathcal{I}_n(f,g)\big| \le \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[2C(E,\alpha)C_N^2 N]^k}{n^{k\alpha}} \right) ||f||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\,||g||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}.$$

Pour finir, il existe une constante $D_N > 0$ telle que pour tout entier naturel n non nul, on ait

$$\big|\mathcal{I}_n(f,g)\big| \le \frac{D_N}{n^\alpha} ||f||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\,||g||_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)},$$

ce qui conclut la preuve. □

Nous allons maintenant nous intéresser à la vitesse de convergence vers zéro des corrélations $\mathcal{I}_n(f,g)$ lorsque f et g sont la même fonction très particulière $x \longmapsto ||x||^2$.

6.2 Estimations des corrélations $\mathcal{I}_n\big(||\cdot||^2, ||\cdot||^2\big)$

On présente ici un exemple important d'estimation des corrélations en travaillant avec une fonction régulière très particulière. Celle-ci sera fondamentale pour démontrer notre théorème général sur la vitesse de mélange (Théorème 6.4.2). La méthode de calcul est basée de façon cruciale sur la formule de Parseval.

Proposition 6.2.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant et α-hölderien (où $\alpha \in (0,1]$). Pour tout entier naturel n non nul, on a*

$$0 \leq \mathcal{I}_n\big(||\cdot||^2, ||\cdot||^2\big) \leq \frac{C(E)^2\pi^{2\alpha}}{n^{2\alpha}}\, ||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}.$$

Démonstration. Rappelons que la corrélation $\mathcal{I}_n\big(||\cdot||^2, ||\cdot||^2\big)$ est définie par

$$\mathcal{I}_n\big(||\cdot||^2, ||\cdot||^2\big) = \int_{\mathcal{H}} ||T^n x||^2\, ||x||^2\, dm(x) - \bigg(\int_{\mathcal{H}} ||x||^2\, dm(x)\bigg)^2,$$

ce qui donne, en développant la fonction $||\cdot||^2$,

$$\mathcal{I}_n\big(||\cdot||^2, ||\cdot||^2\big) = \sum_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2} \int_{\mathcal{H}} |\langle e_k, T^n x\rangle|^2\, |\langle e_\ell, x\rangle|^2\, dm(x) - \bigg(\int_{\mathcal{H}} ||x||^2\, dm(x)\bigg)^2.$$

Pour tout entier naturel k non nul, $|\langle e_k, \cdot\rangle|^2 = (\mathfrak{Re}\langle e_k, \cdot\rangle)^2 + (\mathfrak{Im}\langle e_k, \cdot\rangle)^2$ et les variables aléatoires $\mathfrak{Re}\langle e_k, \cdot\rangle$ et $\mathfrak{Im}\langle e_k, \cdot\rangle$ sont (indépendantes et) de même loi gaussienne de variance σ_k^2. On a donc

$$\int_{\mathcal{H}} ||x||^2\, dm(x) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k^2. \tag{6.2}$$

On calcule maintenant l'intégrale

$$\int_{\mathcal{H}} |\langle e_k, T^n x\rangle|^2\, |\langle e_\ell, x\rangle|^2\, dm(x)$$

en décomposant les fonctions dans l'intégrale suivant leurs parties réelle et imaginaire. Pour tout vecteur z de $\mathcal{H}$, on sait d'après l'Exemple 4.3.5 que

$$(\mathfrak{Re}\langle z, \cdot\rangle)^2 =: (\mathfrak{Re}\langle z, \cdot\rangle)^2 : + \sigma_z^2.$$

On déduit de cette égalité que l'intégrale

$$\int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle e_k, T^n x\rangle)^2\, (\mathfrak{Re}\langle e_\ell, x\rangle)^2\, dm(x)$$

est égale à

$$\int_{\mathcal{H}} : (\mathfrak{Re}\langle T^{*n} e_k, \cdot\rangle)^2 : (x) : (\mathfrak{Re}\langle e_\ell, \cdot\rangle)^2 : (x)\, dm(x) + \sigma_k^2\sigma_\ell^2$$

car les variables aléatoires $: (\mathfrak{Re}\langle z, \cdot\rangle)^2 :$ sont centrées. Maintenant, en utilisant l'isométrie (4.5) entre les espaces $\big(: \mathcal{G}^2 :, \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big)$ et $\big(\mathcal{G}^2_\odot, \langle\cdot,\cdot\rangle_\odot\big)$ (et plus particulièrement l'Exemple 4.2.2) on voit que

$$\int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle e_k, T^n x\rangle)^2\, (\mathfrak{Re}\langle e_\ell, x\rangle)^2\, dm(x) = 2\bigg(\int_{\mathcal{H}} \mathfrak{Re}\langle T^{*n} e_k, x\rangle \mathfrak{Re}\langle e_\ell, x\rangle\, dm(x)\bigg)^2 + \sigma_k^2\sigma_\ell^2.$$

Le Lemme 3.1.2 nous donne enfin

$$\int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle e_k, T^n x\rangle)^2 \, (\mathfrak{Re}\langle e_\ell, x\rangle)^2 \, dm(x) = \frac{1}{2}(\mathfrak{Re}\langle RT^{*n}e_k, e_\ell\rangle)^2 + \sigma_k^2\sigma_\ell^2. \tag{6.3}$$

De plus, comme $\mathfrak{Im}\langle e_\ell, \cdot\rangle = \mathfrak{Re}\langle ie_\ell, \cdot\rangle$, on déduit de (6.3) que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Re}\langle e_k, T^n x\rangle)^2 \, (\mathfrak{Im}\langle e_\ell, x\rangle)^2 \, dm(x) &= \frac{1}{2}(\mathfrak{Re}\langle RT^{*n}e_k, ie_\ell\rangle)^2 + \sigma_k^2\sigma_\ell^2 \\ &= \frac{1}{2}(\mathfrak{Im}\langle RT^{*n}e_k, e_\ell\rangle)^2 + \sigma_k^2\sigma_\ell^2. \qquad (6.4)\end{aligned}$$

En utilisant la même méthode, on voit facilement que

$$\int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Im}\langle e_k, T^n x\rangle)^2 \, (\mathfrak{Re}\langle e_\ell, x\rangle)^2 \, dm(x) = \frac{1}{2}(\mathfrak{Im}\langle RT^{*n}e_k, e_\ell\rangle)^2 + \sigma_k^2\sigma_\ell^2 \tag{6.5}$$

et

$$\int_{\mathcal{H}} (\mathfrak{Im}\langle e_k, T^n x\rangle)^2 \, (\mathfrak{Im}\langle e_\ell, x\rangle)^2 \, dm(x) = \frac{1}{2}(\mathfrak{Re}\langle RT^{*n}e_k, e_\ell\rangle)^2 + \sigma_k^2\sigma_\ell^2. \tag{6.6}$$

En utilisant (6.3), (6.4), (6.5) et (6.6), on obtient

$$\int_{\mathcal{H}} |\langle e_k, T^n x\rangle|^2 \, |\langle e_\ell, x\rangle|^2 \, dm(x) = |\langle RT^{*n}e_k, e_\ell\rangle|^2 + 4\sigma_k^2\sigma_\ell^2.$$

D'après l'égalité (6.2), il vient

$$\mathcal{I}_n\big(||\cdot||^2, ||\cdot||^2\big) = \sum_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2} |\langle RT^{*n}e_k, e_\ell\rangle|^2. \tag{6.7}$$

A ce stade, on utilise la représentation intégrale (2.3) de $\langle RT^{*n}e_k, e_\ell\rangle$. Pour tous entiers naturels non nuls k et ℓ, on a

$$\langle RT^{*n}e_k, e_\ell\rangle = \int_{\mathbb{T}} \lambda^n \langle e_k, E(\lambda)\rangle \overline{\langle e_\ell, E(\lambda)\rangle} \, d\sigma(\lambda) = \left\langle e_k, \int_{\mathbb{T}} \lambda^n \overline{\langle e_\ell, E(\lambda)\rangle} E(\lambda) \, d\sigma(\lambda)\right\rangle,$$

et d'après la formule de Parseval,

$$\mathcal{I}_n\big(||\cdot||^2, ||\cdot||^2\big) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left|\left| \int_{\mathbb{T}} \lambda^n \overline{\langle e_\ell, E(\lambda)\rangle} E(\lambda) \, d\sigma(\lambda)\right|\right|^2.$$

On a donc besoin d'estimer le coefficient de Fourier

$$c_n = \int_{\mathbb{T}} \lambda^n \overline{\langle e_\ell, E(\lambda)\rangle} E(\lambda) \, d\sigma(\lambda).$$

La méthode est la même que celle de la preuve de la Proposition 2.3.2 : en notant $\theta_n := \theta + \frac{\pi}{n}$, on peut écrire que

$$c_n = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\Big[\overline{\langle e_\ell, E(e^{i\theta}) - E(e^{i\theta_n})\rangle} E(e^{i\theta}) + \overline{\langle e_\ell, E(e^{i\theta_n})\rangle}\big(E(e^{i\theta}) - E(e^{i\theta_n})\big)\Big] \frac{d\theta}{2\pi}.$$

En utilisant maintenant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ (valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$), on trouve que

$$2||c_n||^2 \leq A_1 + A_2$$

où on a posé

$$A_1 = \left|\left| \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \overline{\langle e_\ell, E(e^{i\theta}) - E(e^{i\theta_n})\rangle} E(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \right|\right|^2$$

et

$$A_2 = \left|\left| \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \overline{\langle e_\ell, E(e^{i\theta_n})\rangle} \big(E(e^{i\theta}) - E(e^{i\theta_n})\big) \frac{d\theta}{2\pi} \right|\right|^2.$$

On estime ensuite les quantités A_1 et A_2 séparément. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$A_1 \leq \left(\int_0^{2\pi} \big|\langle e_\ell, E(e^{i\theta}) - E(e^{i\theta_n})\rangle\big|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right) ||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}.$$

De plus, en appliquant aussi l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la quantité A_2 et en utilisant le fait que le champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E est une fonction α-hölderienne (avec constante de Hölder $C(E)$), on obtient

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \int_0^{2\pi} \big|\langle e_\ell, E(e^{i\theta_n})\rangle\big|^2 \big|\big|E(e^{i\theta}) - E(e^{i\theta_n})\big|\big|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \frac{C(E)^2\pi^{2\alpha}}{n^{2\alpha}} \int_0^{2\pi} \big|\langle e_\ell, E(e^{i\theta_n})\rangle\big|^2 \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

La formule de Parseval nous donne alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{I}_n\big(||\cdot||^2, ||\cdot||^2\big) &\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \big|\big|E(e^{i\theta}) - E(e^{i\theta_n})\big|\big|^2 \frac{d\theta}{2\pi} + \frac{C(E)^2\pi^{2\alpha}}{n^{2\alpha}} \right) ||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})} \\ &\leq \frac{C(E)^2\pi^{2\alpha}}{n^{2\alpha}} ||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})} \end{aligned}$$

car la fonction E est α-hölderienne (avec constante de Hölder $C(E)$). □

Ce résultat montre que la suite des corrélations $\big(\mathcal{I}_n\big(||\cdot||^2, ||\cdot||^2\big)\big)_{n\geq 1}$ converge vers zéro à la vitesse $n^{-2\alpha}$. En utilisant (6.7), on peut réécrire la Proposition 6.2.1 de la façon suivante.

Corollaire 6.2.2. *Sous les hypothèses de la Proposition 6.2.1, on a*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k^4 \, ||T^n e_k||^2 \leq \frac{C(E)^2\pi^{2\alpha}}{4n^{2\alpha}} ||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}$$

pour tout entier naturel n non nul.

Démonstration. On a déjà vu (voir par exemple la preuve de la Proposition 4.4.5) que pour tous entiers naturels k et ℓ non nuls, $\langle RT^{*n}e_k, e_\ell\rangle = 2\sigma_\ell^2\langle e_k, T^n e_\ell\rangle$. D'après l'égalité (6.7), il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_n\big(||\cdot||^2, ||\cdot||^2\big) &= \sum_{(k,\ell)\in(\mathbb{N}^*)^2} |\langle RT^{*n}e_k, e_\ell\rangle|^2 \\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\langle RT^{*n}e_k, e_\ell\rangle|^2\right) \\ &= 4\sum_{\ell=1}^{+\infty} \sigma_\ell^4\, ||T^n e_\ell||^2 \\ &\leq \frac{C(E,\alpha)^2}{n^{2\alpha}} ||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})},\end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient de la Proposition 6.2.1. Ceci achève la preuve du Corollaire 6.2.2. □

6.3 Estimations complémentaires

Pour démontrer le résultat principal sur la vitesse de mélange (Théorème 6.4.2), on a besoin d'estimer certaines quantités comme les moments d'ordres pairs d'une mesure gaussienne. Nous établissons dans cette section les estimations requises.

6.3.1 Estimation de la série $\sum_{k\geq 1} \sigma_k^2\, ||T^n e_k||^2$

On a montré en particulier dans le Corollaire 6.2.2 que la quantité $\sum_{k\geq 1} \sigma_k^4\, ||T^n e_k||^2$ converge vers zéro quand n tend vers $+\infty$. Le but du prochain lemme est de montrer que si on remplace σ_k^4 par σ_k^2 dans cette série, alors la série correspondante est convergente et uniformément bornée en n.

Lemme 6.3.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant. Pour tout entier naturel n, la série $\sum_{k\geq 1} \sigma_k^2\, ||T^n e_k||^2$ est convergente. Plus précisément, on a la majoration*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_k^2\, ||T^n e_k||^2 \leq \frac{||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}}{2} \tag{6.8}$$

pour tout entier naturel n.

Démonstration. Comme $Re_k = 2\sigma_k^2 e_k$, l'équation d'entrelacement $TK = KV$ nous donne

$$2\sigma_k^2 T^n e_k = T^n KK^* e_k = KV^n K^* e_k = \int_{\mathbb{T}} \lambda^n \overline{\langle e_k, E(\lambda)\rangle} E(\lambda)\, d\sigma(\lambda).$$

Pour tout entier naturel k non nul, on note ω_k la fonction de $L^2(\mathbb{T},\sigma)$ définie par

$$\omega_k(\lambda) = \frac{\overline{\langle e_k, E(\lambda)\rangle}}{\sigma_k\sqrt{2}}.$$

En utilisant la formule de Parseval dans $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, on voit que

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{+\infty}\sigma_k^2\,||T^n e_k||^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\left|\int_{\mathbb{T}}\lambda^n\frac{\overline{\langle e_k, E(\lambda)\rangle}}{\sigma_k\sqrt{2}}E(\lambda)\,d\sigma(\lambda)\right|\right|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\left|\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{T}}\lambda^n\omega_k(\lambda)\langle e_p, E(\lambda)\rangle\,d\sigma(\lambda)\right)e_p\right|\right|^2 \\
&= \sum_{(k,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}\left|\int_{\mathbb{T}}\lambda^n\omega_k(\lambda)\langle e_p, E(\lambda)\rangle\,d\sigma(\lambda)\right|^2.
\end{aligned}$$

Or, d'après le Corollaire 3.1.4, la suite $\left(\overline{\omega_k}\right)_{k\geq 1}$ est orthonormale dans l'espace $L^2(\mathbb{T},\sigma)$. Ainsi, si on note $\Phi_{n,p}$ la fonction de $L^2(\mathbb{T},\sigma)$ définie par $\Phi_{n,p}(\lambda) = \overline{\lambda^n\langle e_p, E(\lambda)\rangle}$, l'inégalité de Bessel appliquée dans l'espace $L^2(\mathbb{T},\sigma)$ montre que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\int_{\mathbb{T}}\omega_k(\lambda)\overline{\Phi_{n,p}(\lambda)}\,d\sigma(\lambda)\right|^2 \leq ||\Phi_{n,p}||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma)} &= \int_{\mathbb{T}}\left|\lambda^n\langle e_p, E(\lambda)\rangle\right|^2 d\sigma(\lambda) \\
&= \int_{\mathbb{T}}\left|\langle e_p, E(\lambda)\rangle\right|^2 d\sigma(\lambda).
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à sommer sur les entiers naturels p non nuls (et à appliquer la formule de Parseval dans $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$). □

6.3.2 Estimation des moments d'ordres pairs de la mesure gaussienne m

Comme la mesure m est une mesure gaussienne, on sait que ses moments sont finis. On en donne ici une estimation. Comme d'habitude, on suppose ici que les vecteurs propres de $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un unique champ de vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$.

Proposition 6.3.2. *Pour tout entier naturel k non nul, on a l'estimation*

$$\int_{\mathcal{H}}||x||^{2k}\,dm(x) \leq k!\,||E||^{2k}_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}.$$

Démonstration. Nous commençons par traiter le cas où $k = 1$, ce qui nous sera utile pour le cas général. On sait d'après le Corollaire 3.1.4 que la variance de la variable aléatoire $\langle e_k, \cdot\rangle$ par rapport à la mesure m (et de $\langle e_k, E(\cdot)\rangle$ par rapport à la mesure σ) est égale à $2\sigma_k^2$ et donc

$$\int_{\mathcal{H}}||x||^2\,dm(x) = 2\sum_{j=1}^{+\infty}\sigma_j^2 = ||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}.$$

Soit maintenant un entier naturel k non nul. On peut écrire que

$$\int_{\mathcal{H}} ||x||^{2k}\, dm(x) = \sum_{(j_1,\ldots,j_k)\in(\mathbb{N}^*)^k} \int_{\mathcal{H}} |\langle e_{j_1}, x\rangle|^2 \ldots |\langle e_{j_k}, x\rangle|^2\, dm(x)$$

et on veut estimer les intégrales

$$\int_{\mathcal{H}} |\langle e_{j_1}, x\rangle|^2 \ldots |\langle e_{j_k}, x\rangle|^2\, dm(x).$$

Chacune de ces intégrales peut s'écrire sous la forme

$$\int_{\mathcal{H}} |\langle e_{i_1}, x\rangle|^{2\ell_1} \ldots |\langle e_{i_r}, x\rangle|^{2\ell_r}\, dm(x)$$

où $r \in \{1,\ldots,k\}$, $\ell_1,\ldots,\ell_r \in \mathbb{N}^*$ avec $\ell_1 + \cdots + \ell_r = k$ et $i_1 < \cdots < i_r$. D'après la Proposition 3.1.5, on sait que

$$\int_{\mathcal{H}} |\langle y, x\rangle|^{2i}\, dm(x) = i!\, 2^i \sigma_y^{2i}$$

pour tout vecteur y de $\mathcal{H}$ et pour tout entier naturel i. Comme les variables aléatoires $\langle e_k, \cdot\rangle$ sont indépendantes (d'après la Proposition 3.1.3), on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{H}} |\langle e_{i_1}, x\rangle|^{2\ell_1} \ldots |\langle e_{i_r}, x\rangle|^{2\ell_r}\, dm(x) &= \prod_{t=1}^{r} \left(\int_{\mathcal{H}} |\langle e_{i_t}, x\rangle|^{2\ell_t}\, dm(x)\right) \\
&= \prod_{t=1}^{r} \left(\ell_t!\, 2^{\ell_t} \sigma_{i_t}^{2\ell_t}\right) \\
&= \left(\prod_{t=1}^{r} \ell_t!\right) 2^k \sigma_{i_1}^{2\ell_1} \ldots \sigma_{i_r}^{2\ell_r},
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que $\ell_1 + \cdots + \ell_r = k$. En utilisant l'ingalité $i!\,j! \leq (i+j)!$ (valable pour tous entiers naturels i, j), on en déduit que

$$\int_{\mathcal{H}} |\langle e_{i_1}, x\rangle|^{2\ell_1} \ldots |\langle e_{i_r}, x\rangle|^{2\ell_r}\, dm(x) \leq k!\, 2^k \sigma_{i_1}^{2\ell_1} \ldots \sigma_{i_r}^{2\ell_r}.$$

D'après le début de la preuve, il vient

$$\int_{\mathcal{H}} ||x||^{2k}\, dm(x) \leq k!\, 2^k \sum_{(j_1,\ldots,j_k)\in(\mathbb{N}^*)^k} \sigma_{j_1}^2 \ldots \sigma_{j_k}^2 = k! \left(2 \sum_{j=1}^{+\infty} \sigma_j^2\right)^k = k!\, ||E||^{2k}_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})},$$

ce qui démontre la Proposition 6.3.2. □

En utilisant l'estimation des moments de la mesure gaussienne m de la Proposition 6.3.2, on peut montrer que si f est un élément de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$ (dont le chaos de Wiener s'écrit $f = \sum_{k\geq 0} f_k$ et où chaque fonction f_k s'écrit comme dans (5.5)) tel que les applications $\mathcal{B}_{f_k}$ définissent des formes multilinéaires bornées, alors la série

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \left|\alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k}\right|^2 \sigma_{i_1}^2 \ldots \sigma_{i_{k-1}}^2 \tag{6.9}$$

est convergente pour tout entier naturel k non nul. C'est en particulier le cas si f est une fonction infiniment différentiable sur $\mathcal{H}$ (voir le début du chapitre 5) vérifiant la condition (5.2), c'est-à-dire telle que l'intégrale

$$\int_{\mathcal{H}} \left|\left|D^k f(x)\right|\right| dm(x)$$

est convergente pour tout entier naturel k.

Remarque 6.3.3. On sait d'après la Proposition 5.1.4, que si $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$, alors la série

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \left|\alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k}\right|^2 \sigma^2_{i_1} \ldots \sigma^2_{i_{k-1}} \sigma^2_{i_k}$$

est convergente (ceci est la traduction du fait que $f_k \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$). Avec une hypothèse de bornitude sur les formes multilinéaires $\mathcal{B}_{f_k}$ associées aux composantes f_k de la fonction f, on peut montrer que la série (6.9) converge aussi.

Proposition 6.3.4. *Soit $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}, \mathcal{B}, m)$ où chaque fonction f_k s'écrit comme dans* (5.5) *et telle que chaque application $\mathcal{B}_{f_k}$ définisse une forme k-linéaire bornée. Alors la série*

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \left|\alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k}\right|^2 \sigma^2_{i_1} \ldots \sigma^2_{i_{k-1}}$$

est convergente pour tout entier naturel k non nul. Plus précisément, on a l'estimation

$$\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \left|\alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k}\right|^2 \sigma^2_{i_1} \ldots \sigma^2_{i_{k-1}} \leq \left|\left|\mathcal{B}_{f_k}\right|\right|^2 \left|\left|E\right|\right|^{2(k-1)}_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})} \tag{6.10}$$

pour tout entier naturel k non nul.

Démonstration. Pour démontrer cette estimation, on introduit la quantité

$$\mathcal{S}_k := \sum_{i_k\in\mathbb{Z}^*} \int_{\mathcal{H}} \left(\sum_{(i_1,\ldots,i_{k-1})\in(\mathbb{Z}^*)^{k-1}} \alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k} : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_{k-1}}, \cdot\rangle : (x) \right)^2 dm(x). \tag{6.11}$$

Dans un premier temps, nous estimons la somme $\mathcal{S}_k$ (nous verrons au passage que la somme qui apparaît dans l'intégrale (6.11) est bien définie). Nous la calculerons ensuite explicitement.

▷ **Estimation de la somme $\mathcal{S}_k$.**

On rappelle que pour tout entier naturel j non nul et pour toute fonction g de $\mathcal{G}^j$, la transformée de Wick de g est définie par : $g := g - \mathcal{P}_j(g)$, où $\mathcal{P}_j$ désigne la projection orthogonale sur $\overline{\text{vect}}^{L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\big[\mathcal{G}^i\,;\, 0 \leq i \leq j-1\big]$. Comme les fonctions $\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_{k-1}}, \cdot\rangle$ appartiennent à $\mathcal{G}^{k-1}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_k &= \sum_{i_k \in \mathbb{Z}^*} \left|\left| (Id_{\mathcal{G}^{k-1}} - \mathcal{P}_{k-1}) \left(\sum_{(i_1,\dots,i_{k-1}) \in (\mathbb{Z}^*)^{k-1}} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_{k-1}}, \cdot\rangle \right) \right|\right|^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \\ &\leq \sum_{i_k \in \mathbb{Z}^*} \left|\left| \sum_{(i_1,\dots,i_{k-1}) \in (\mathbb{Z}^*)^{k-1}} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_{k-1}}, \cdot\rangle \right|\right|^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)}\end{aligned}$$

car la norme opérateur de $Id_{\mathcal{G}^{k-1}} - \mathcal{P}_{k-1}$ est égale à 1. On utilise maintenant le fait que la forme k-linéaire $\mathcal{B}_{f_k}$ est bornée. Pour tout vecteur x de $\mathcal{H}$ et pour tout $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}^*} \in \ell_2(\mathbb{Z}^*, \mathbb{R})$, on a

$$\left| \sum_{(i_1,\dots,i_k) \in (\mathbb{Z}^*)^k} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, x\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_{k-1}}, x\rangle y_{i_k} \right| \leq ||\mathcal{B}_{f_k}||\, ||x||^{k-1} ||y||_2. \tag{6.12}$$

En particulier, ceci nous dit que la forme linéaire réelle

$$\begin{array}{rccc}\phi_x : & \ell_2(\mathbb{Z}^*, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \mathcal{B}_{f_k}\big((\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_i, x\rangle)_{i \in \mathbb{Z}^*}, \dots, (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_i, x\rangle)_{i \in \mathbb{Z}^*}, y\big).\end{array}$$

est bornée (de norme inférieure ou égale à $||\mathcal{B}_{f_k}||\, ||x||^{k-1}$) et la norme de ϕ_x est égale à

$$||\phi_x|| = \left(\sum_{i_k \in \mathbb{Z}^*} \left(\sum_{(i_1,\dots,i_{k-1}) \in (\mathbb{Z}^*)^{k-1}} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, x\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_{k-1}}, x\rangle \right)^2 \right)^{1/2}. \tag{6.13}$$

Ainsi, en prenant la borne supérieure sur les vecteurs y de $\ell_2(\mathbb{Z}^*, \mathbb{R})$ dont la norme est inférieure ou égale à 1 dans l'inégalité (6.12), on voit que

$$||\phi_x|| \leq ||\mathcal{B}_{f_k}||\, ||x||^{k-1}$$

et donc, d'après (6.13),

$$\sum_{i_k \in \mathbb{Z}^*} \left(\sum_{(i_1,\dots,i_{k-1}) \in (\mathbb{Z}^*)^{k-1}} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, x\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_{k-1}}, x\rangle \right)^2 \leq ||\mathcal{B}_{f_k}||^2\, ||x||^{2(k-1)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{H}} \left[\sum_{i_k \in \mathbb{Z}^*} \left(\sum_{(i_1,\dots,i_{k-1}) \in (\mathbb{Z}^*)^{k-1}} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k}\, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, x\rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_{k-1}}, x\rangle \right)^2 \right] dm(x) \\ &\qquad\qquad \leq ||\mathcal{B}_{f_k}||^2 \int_{\mathcal{H}} ||x||^{2(k-1)}\, dm(x),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i_k\in\mathbb{Z}^*}\left|\left|\sum_{(i_1,\ldots,i_{k-1})\in(\mathbb{Z}^*)^{k-1}}\alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k}\,\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_{i_1},\cdot\rangle\ldots\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_{i_{k-1}},\cdot\rangle\right|\right|^2_{L^2(\mathcal{H},\mathcal{B},m)} \leq ||\mathcal{B}_{f_k}||^2\int_{\mathcal{H}}||x||^{2(k-1)}\,dm(x).$$

D'après le début de la preuve, on a

$$\mathcal{S}_k \leq ||\mathcal{B}_{f_k}||^2\int_{\mathcal{H}}||x||^{2(k-1)}\,dm(x) \leq (k-1)!\,||\mathcal{B}_{f_k}||^2\,||E||^{2(k-1)}_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}, \tag{6.14}$$

où la dernière inégalité provient de la Proposition 6.3.2. Remarquons que cette première étape de la preuve nous a permis de voir que la somme qui apparaît dans l'intégrale (6.11) est convergente m-presque sûrement, ce qui assure l'existence de $\mathcal{S}_k$. La deuxième partie de la preuve consiste à calculer explicitement la somme $\mathcal{S}_k$.

▷ **Calcul de la somme S_k.**
On commence par développer la somme $\mathcal{S}_k$. On a

$$\mathcal{S}_k = \sum_{i_k\in\mathbb{Z}^*}\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_{k-1})\in(\mathbb{Z}^*)^{k-1}\\(j_1,\ldots,j_{k-1})\in(\mathbb{Z}^*)^{k-1}}}\alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k}\,\alpha^{(k)}_{j_1,\ldots,j_{k-1},i_k}$$
$$\times\int_{\mathcal{H}}:\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_{i_1},\cdot\rangle\ldots\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_{i_{k-1}},\cdot\rangle:(x):\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle\ldots\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_{j_{k-1}},\cdot\rangle:(x)\,dm(x). \tag{6.15}$$

D'après la Proposition 4.4.5 (appliquée pour $n=0$), l'intégrale (6.15) est égale à

$$\sigma^2_{j_1}\ldots\sigma^2_{j_{k-1}}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{k-1}}\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_{i_1},\mathfrak{e}_{j_{\tau(1)}}\rangle\ldots\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_{i_{k-1}},\mathfrak{e}_{j_{\tau(k-1)}}\rangle.$$

Or on sait que pour tous entiers relatifs non nuls i et j, $\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_i,\mathfrak{e}_j\rangle$ est non nul égal à 1 si et seulement si $i=j$. On en déduit que l'intégrale (6.15) est non nulle si et seulement si il existe une permutation τ de $\mathfrak{S}_{k-1}$ telle que $i_\ell = j_{\tau(\ell)}$ pour tout $\ell\in\{1,\ldots,k-1\}$, $i_\ell = j_{\tau(\ell)}$. En particulier, cette intégrale est non nulle si et seulement si les ensembles d'indices $\{i_1,\ldots,i_{k-1}\}$ et $\{j_1,\ldots,j_{k-1}\}$ coïncident (avec multiplicité). Par conséquent, en utilisant le fait que la suite $\left(\alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k}\right)_{(i_1,\ldots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k}$ est symétrique, la somme $\mathcal{S}_k$ se réécrit

$$\mathcal{S}_k = \sum_{i_k\in\mathbb{Z}^*}\sum_{(i_1,\ldots,i_{k-1})\in(\mathbb{Z}^*)^{k-1}}\sum_{\substack{(j_1,\ldots,j_{k-1})\in(\mathbb{Z}^*)^{k-1}\\\{j_1,\ldots,j_{k-1}\}=\{i_1,\ldots,i_{k-1}\}}}\left|\alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i_k}\right|^2$$
$$\times\int_{\mathcal{H}}:\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_{i_1},\cdot\rangle\ldots\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_{i_{k-1}},\cdot\rangle:(x):\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_{j_1},\cdot\rangle\ldots\mathfrak{Re}\langle\mathfrak{e}_{j_{k-1}},\cdot\rangle:(x)\,dm(x).$$

Fixons maintenant un $(k-1)$-uplet d'entiers relatifs non nuls $(i_1,\ldots,i_{k-1})$. Il existe alors des entiers $r\in\{1,\ldots,k-1\}$, $\ell_1,\ldots,\ell_r$ et $p_1,\ldots,p_r$ tels que

$$\{i_1,\ldots,i_{k-1}\} = \{\underbrace{\ell_1,\ldots,\ell_1}_{p_1\text{ fois}},\ldots,\underbrace{\ell_r,\ldots,\ell_r}_{p_r\text{ fois}}\}, \tag{6.16}$$

avec $p_1 + \cdots + p_r = k-1$ et $\ell_1 < \cdots < \ell_r$. D'après la Proposition 4.3.10, on voit alors que pour ce $(k-1)$-uplet $(i_1, \ldots, i_{k-1})$,

$$\int_{\mathcal{H}} \big(: \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_{k-1}}, \cdot\rangle : (x)\big)^2 \, dm(x) = \mathrm{var}_m\big[: (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{\ell_1}, \cdot\rangle)^{p_1} \ldots (\mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{\ell_r}, \cdot\rangle)^{p_r} : \big]$$
$$= p_1! \ldots p_r! \; \sigma_{\ell_1}^{2p_1} \ldots \sigma_{\ell_r}^{2p_r}.$$

Or, d'après le Lemme A.2.6, le nombre de $(k-1)$-uplets $(j_1, \ldots, j_{k-1})$ vérifiant (6.16) est égal (avec nos notations) à $\frac{(k-1)!}{p_1! \ldots p_r!}$. On en déduit alors que

$$\mathcal{S}_k = (k-1)! \sum_{(i_1,\ldots,i_k) \in (\mathbb{Z}^*)^k} \big|\alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k}\big|^2 \sigma_{i_1}^2 \ldots \sigma_{i_{k-1}}^2, \tag{6.17}$$

et le résultat découle de (6.14) et (6.17) en simplifiant par $(k-1)!$. □

6.4 Le résultat

A l'aide des estimations obtenues dans les sections précédentes, on peut démontrer le résulat principal sur la vitesse de mélange (Théorème 6.4.2). On rappelle que T est un opérateur linéaire borné sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m et dont les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de vecteurs propres E qui est σ-engendrant et α-hölderien (avec constante de Hölder $C(E)$). Tout d'abord, on s'intéresse à la convergence vers zéro des corrélations pour des fonctions régulières appartenant à un espace $:\mathcal{G}^k:$.

Théorème 6.4.1. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module* 1 *sont paramétrés par un champ de vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant et α-hölderien (où $\alpha \in (0,1]$). Soient f_k, g_k des éléments de l'espace $:\mathcal{G}^k:$ telles que les formes k-linéaires associées $\mathcal{B}_{f_k}$ et $\mathcal{B}_{g_k}$ sont bornées. Alors on a l'estimation*

$$\big|\mathcal{I}_n(f_k, g_k)\big| \leq k! \, \frac{C(E,\alpha)}{n^\alpha} \, ||E||^{2k-1}_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})} \, ||\mathcal{B}_{f_k}|| \, ||\mathcal{B}_{g_k}||$$

pour tout entier naturel n non nul.

Démonstration. Comme d'habitude, on écrit les fonctions f_k et g_k comme dans (5.5) (avec des coefficients $\beta^{(k)}_{j_1,\ldots,j_k}$ pour la fonction g_k). Comme les variables aléatoires f_k et g_k sont centrées, on a

$$\mathcal{I}_n(f_k, g_k) = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_k) \in (\mathbb{Z}^*)^k \\ (j_1 \ldots, j_k) \in (\mathbb{Z}^*)^k}} \alpha^{(k)}_{i_1,\ldots,i_k} \beta^{(k)}_{j_1,\ldots,j_k}$$
$$\times \int_{\mathcal{H}} : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, \cdot\rangle : (T^n x) : \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_1}, \cdot\rangle \ldots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{j_k}, \cdot\rangle : (x) \, dm(x). \tag{6.18}$$

L'intégrale (6.18) a été calculée dans la Proposition 4.4.5. On en déduit que $\mathcal{I}_n(f_k, g_k)$ est égale à

$$\sum_{\tau \in \mathfrak{S}_k} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k \\ (j_1 \dots,j_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k}} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} \beta^{(k)}_{j_1,\dots,j_k} \sigma^2_{j_1} \dots \sigma^2_{j_k} \, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, T^n \mathfrak{e}_{j_{\tau(1)}} \rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, T^n \mathfrak{e}_{j_{\tau(k)}} \rangle.$$

Comme la suite de nombres réels $\big(\beta^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}\big)_{(j_1,\dots,j_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k}$ est symétrique, il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n(f_k, g_k) &= k! \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k \\ (j_1 \dots,j_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k}} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} \beta^{(k)}_{j_1,\dots,j_k} \sigma^2_{j_1} \dots \sigma^2_{j_k} \, \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, T^n \mathfrak{e}_{j_1} \rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, T^n \mathfrak{e}_{j_k} \rangle \\ &= k! \sum_{(j_1,\dots,j_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \beta^{(k)}_{j_1,\dots,j_k} \sigma^2_{j_1} \dots \sigma^2_{j_k} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, T^n \mathfrak{e}_{j_1} \rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, T^n \mathfrak{e}_{j_k} \rangle \end{aligned}$$

et donc $\big|\mathcal{I}_n(f_k, g_k)\big|$ est inférieure ou égale à

$$k! \sum_{(j_1,\dots,j_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \big|\beta^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}\big| \sigma^2_{j_1} \dots \sigma^2_{j_k} \left| \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \alpha^{(k)}_{i_1,\dots,i_k} \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_1}, T^n \mathfrak{e}_{j_1} \rangle \dots \mathfrak{Re}\langle \mathfrak{e}_{i_k}, T^n \mathfrak{e}_{j_k} \rangle \right|.$$

Or la forme k-linéaire $\mathcal{B}_{f_k}$ est bornée donc $\big|\mathcal{I}_n(f_k, g_k)\big|$ est inférieure ou égale à

$$k! \, ||\mathcal{B}_{f_k}|| \sum_{(j_1,\dots,j_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \big|\beta^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}\big| \sigma^2_{j_1} \dots \sigma^2_{j_k} \, ||T^n \mathfrak{e}_{j_1}|| \dots ||T^n \mathfrak{e}_{j_k}||,$$

c'est-à-dire à

$$k! \, ||\mathcal{B}_{f_k}|| \sum_{(j_1,\dots,j_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \Big(\big|\beta^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}\big| \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_{k-1}}\Big)\Big(\sigma_{j_1} \, ||T^n \mathfrak{e}_{j_1}|| \dots \sigma_{j_{k-1}} \, ||T^n \mathfrak{e}_{j_{k-1}}|| \, \sigma^2_{j_k} \, ||T^n \mathfrak{e}_{j_k}||\Big).$$

On applique ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \big|\mathcal{I}_n(f_k, g_k)\big| \leq k! \, ||\mathcal{B}_{f_k}|| \left(\sum_{(j_1,\dots,j_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \big|\beta^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}\big|^2 \sigma^2_{j_1} \dots \sigma^2_{j_{k-1}} \right)^{1/2} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^*} \sigma^2_j \, ||T^n \mathfrak{e}_j||^2 \right)^{(k-1)/2} \\ \times \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^*} \sigma^4_j \, ||T^n \mathfrak{e}_j||^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que $\mathfrak{e}_\ell = e_\ell$ et $\mathfrak{e}_{-\ell} = ie_\ell$ pour tout entier naturel ℓ non nul. Ainsi, $||T^n \mathfrak{e}_j|| = ||T^n e_{-j}||$ pour tout entier j strictement négatif. On déduit du Corollaire 6.2.2 que

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^*} \sigma^4_j \, ||T^n \mathfrak{e}_j||^2 = 2 \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \sigma^4_j \, ||T^n e_j||^2 \leq \frac{C(E, \alpha)^2}{n^{2\alpha}} ||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}$$

et d'après le Lemme 6.3.1,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^*} \sigma^2_j \, ||T^n \mathfrak{e}_j||^2 = 2 \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \sigma^2_j \, ||T^n e_j||^2 \leq ||E||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}.$$

Ensuite, la Proposition 6.3.4 fournit la majoration

$$\sum_{(j_1,\dots,j_k)\in(\mathbb{Z}^*)^k} \left|\beta^{(k)}_{j_1,\dots,j_k}\right|^2 \sigma^2_{j_1}\dots\sigma^2_{j_{k-1}} \leq ||\mathcal{B}_{g_k}||^2 ||E||^{2(k-1)}_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}.$$

Finalement, on conclut que

$$\left|\mathcal{I}_n(f_k,g_k)\right| \leq k!\,\frac{C(E,\alpha)}{n^\alpha}\,||E||^{2k-1}_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}\,||\mathcal{B}_{f_k}||\,||\mathcal{B}_{g_k}||.$$

□

Avec ce résultat sur la vitesse de mélange dans chaque espace $:\mathcal{G}^k:$, on peut démontrer le théorème principal sur la vitesse de mélange pour des fonctions régulières de $L^2_{\mathbb{R}}(\mathcal{H},\mathcal{B},m)$. Plus précisément, on s'intéresse à la convergence vers zéro des corrélations $\mathcal{I}_n(f,g)$ entre une fonction f de l'espace $\mathcal{X}$ et une fonction g de l'espace $\mathcal{Y}$.

Théorème 6.4.2. *Soit $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de vecteurs propres $E:\mathbb{T}\longrightarrow\mathcal{H}$ qui est σ-engendrant et α-höldérien (où $\alpha\in(0,1]$). Alors il existe une constante $D(E)>0$ telle que pour tous $f\in\mathcal{X}$ et $g\in\mathcal{Y}$, on ait*

$$\left|\mathcal{I}_n(f,g)\right| \leq \frac{D(E)}{n^\alpha}\,||f||_{\mathcal{X}}\,||g||_{\mathcal{Y}}$$

pour tout entier naturel n non nul.

Démonstration. On considère les chaos de Wiener des fonctions $f\in\mathcal{X}$ et $g\in\mathcal{Y}$, c'est-à-dire $f=\sum_{k\geq 0} f_k$ et $g=\sum_{\ell\geq 0} g_\ell$. On sait d'après le Corollaire 4.4.3 que $\mathcal{I}_n(f_k,g_\ell)=0$ si k et ℓ sont des entiers naturels distincts. De plus, comme f_0 et g_0 sont des fonctions constantes, $\mathcal{I}_n(f_0,g_0)=0$. On en déduit que

$$\mathcal{I}_n(f,g)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathcal{I}_n(f_k,g_k).$$

Comme les fonctions f_k et g_k appartiennent au même espace $:\mathcal{G}^k:$, on peut appliquer le Théorème 6.4.1. Rappelons qu'on peut supposer, quitte à prendre la constante de Hölder $C(E)$ plus petite, que $||E||_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}<1$. L'inégalité triangulaire et le Théorème 6.4.1 nous donnent alors

$$\begin{aligned}
\big|\mathcal{I}_n(f,g)\big| &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \big|\mathcal{I}_n(f_k,g_k)\big| \\
&\leq \frac{C(E,\alpha)}{n^\alpha}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k!\,||E||^{2k-1}_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}\,||\mathcal{B}_{f_k}||\,||\mathcal{B}_{g_k}||\right) \\
&\leq \frac{C(E,\alpha)}{n^\alpha}\Big(\sup_{k\geq 0} k!\,||\mathcal{B}_{g_k}||\Big)\left(\sum_{k\geq 1} ||E||^{2k-1}_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}\,||\mathcal{B}_{f_k}||\right) \\
&\leq \frac{C(E,\alpha)}{n^\alpha}||g||_{\mathcal{Y}}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} ||E||^{4k-2}_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}\right)^{1/2}||f||_{\mathcal{X}}.
\end{aligned}$$

Le résultat est alors démontré avec la constante

$$D(E) := C(E,\alpha)\left(\sum_{k=1}^{+\infty} ||E||^{4k-2}_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}\right)^{1/2}.$$

□

Le théorème précédent s'applique aux exemples de fonctions qu'on a trouvés dans le chapitre 5. En particulier, on a le corollaire suivant.

Corollaire 6.4.3. *Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ qui est fortement mélangeant par rapport à la mesure gaussienne m sur $\mathcal{H}$. On suppose que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont paramétrés par un champ de vecteurs propres $E : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{H}$ qui est σ-engendrant et α-hölderien (où $\alpha \in (0,1]$). Alors pour toute fonction $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de type exponentiel $\kappa < \big(2||E||_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}\big)^{-1}$ et pour tout polynôme p en les variables $\mathfrak{Re}\langle e_i,\cdot\rangle$, on a*

$$\big|\mathcal{I}_n\big(\mathfrak{Re}\big(\phi\circ||\cdot||^2\big),p\big)\big| \leq \frac{D(E)}{n^\alpha}\big|\big|\mathfrak{Re}\big(\phi\circ||\cdot||^2\big)\big|\big|_{\mathcal{X}}\,||p||_{\mathcal{Y}}$$

pour tout entier naturel n non nul, où la constante $D(E)$ est celle du Théorème 6.4.2.

6.5 Cas d'une famille finie ou infinie dénombrable de champs de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $(E_i)_{i\in I}$

Lorsque les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 de l'opérateur T sont σ-engendrants et paramétrés par une famille finie ou infinie dénombrable de champs de vecteurs propres $(E_i)_{i\in I}$ qui sont tous α-hölderiens pour un certain $\alpha \in (0,1]$, la conclusion du Théorème 6.4.2 reste vraie. En effet, on a des estimations analogues à celles des Propositions 6.2.1 et 6.3.2 et du Lemme 6.3.1. Il s'agit en fait de remplacer dans les énoncés de ces résultats la norme $||E||_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}$ par la quantité

$$\sum_{i\in I} \alpha_i^2||E_i||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}$$

et la constante de Hölder $C(E)$ par la quantité

$$\sum_{i\in I}\alpha_i^2 C(E_i)^2,$$

où $C(E_i)$ désigne la constante de Hölder de E_i. Par exemple, dans la Proposition 6.2.1, on obtiendrait l'estimation

$$0\leq \mathcal{I}_n\big(||\cdot||^2,||\cdot||^2\big)\leq \frac{\big(\sum_{i\in I}\alpha_i^2 C(E_i)^2\big)\pi^{2\alpha}}{n^{2\alpha}}\left(\sum_{i\in I}\alpha_i^2||E_i||^2_{L^2(\mathbb{T},\sigma,\mathcal{H})}\right).$$

Les mêmes calculs conduisent alors au Théorème 6.4.2 sur la vitesse de mélange dans les espaces $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ lorsque les vecteurs propres associés aux valeurs propres de module 1 de T sont (σ-engendrants et) paramétrés par une famille finie ou infinie dénombrable de champs de $\mathbb{T}$-vecteurs propres $(E_i)_{i\in I}$.

Deuxième partie

Autour des suites de Jamison

Chapitre 7

Suites de Jamison

Ce chapitre consiste à introduire les *suites de Jamison* (Définition 7.1.4) et à dégager les problèmes qui feront l'objet des chapitres suivants. Nous rappelons quelques résultats importants sur les suites de Jamison et nous expliquons les idées générales de certaines preuves qui seront réutilisées dans la suite. L'un des objectifs sera de transposer les résultats sur les suites de Jamison au cadre des semi-groupes d'opérateurs fortement continus (voir chapitre 9). On réfère aux articles [29], [30], [2], [1] et [14] pour plus de détails sur les suites de Jamison.

7.1 Introduction

Si T est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach, rappelons que son *spectre ponctuel unimodulaire* désigne l'ensemble

$$\sigma_p(T) \cap \mathbb{T} = \big\{\lambda \in \mathbb{T}\,;\, \ker(T-\lambda) \neq \{0\}\big\}$$

des valeurs propres de T de module 1.

Dans toute la suite, on considère un espace de Banach complexe séparable X de dimension infinie et un opérateur linéaire borné T sur X. Un résultat de B. Jamison [19] montre que le comportement de la suite $(||T^n||)_{n\geq 0}$ des normes des itérés de T est lié à la taille de son spectre ponctuel unimodulaire.

Théorème 7.1.1. [19] *Si T est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach complexe séparable X tel que $\sup_{n\geq 0} ||T^n|| < +\infty$, alors l'ensemble $\sigma_p(T)\cap\mathbb{T}$ est au plus dénombrable.*

La séparabilité est essentielle dans cette étude. En effet, si A est un ensemble non dénombrable, alors on peut construire un opérateur diagonal unitaire sur $\ell_2(A)$ dont le spectre ponctuel est non dénombrable.
Dans le même esprit, on peut mentionner le résultat suivant de Nikolskii relatif au cadre hilbertien.

Théorème 7.1.2. [27] *Soient H un espace de Hilbert complexe séparable et T un opérateur linéaire borné sur H. Si l'ensemble $\sigma_p(T)\cap\mathbb{T}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive, alors la série $\sum_{n\geq 0}||T^n||^{-2}$ est convergente.*

Dans ce contexte, on peut s'intéresser à la taille du spectre ponctuel unimodulaire d'un opérateur qui est *à puissances bornées par rapport à une suite d'entiers naturels.*

Définition 7.1.3. [30] Soit X un espace de Banach complexe séparable. Soient $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante et $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire borné sur X. On dit que T est *à puissances bornées par rapport à la suite* $(n_k)_{k\geq 0}$ si $\sup_{k\geq 0}||T^{n_k}|| < +\infty$.

Remarquons que la condition $\sup_{k\geq 0}||T^{n_k}|| < +\infty$ entraîne que le spectre $\sigma(T)$ de T est contenu dans le disque unité fermé. Les opérateurs à puissances bornées par rapport à une suite d'entiers naturels ont d'abord été étudiés par Ransford [29] puis par Ransford et Roginskaya [30]. Ils ont montré que la condition d'être à puissances bornées n'entraînait pas nécessairement que le spectre ponctuel unimodulaire soit au plus dénombrable. Ceci dépend en effet de la suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$ et notamment de sa croissance et de ses propriétés arithmétiques. Les suites $(n_k)_{k\geq 0}$ pour lesquelles la conclusion du Théorème 7.1.1 est vraie sont appelées *suites de Jamison.*

Définition 7.1.4. [2] Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante. On dit que $(n_k)_{k\geq 0}$ est une *suite de Jamison* si pour tout espace de Banach complexe séparable X et pour tout opérateur linéaire borné T sur X, l'ensemble $\sigma_p(T)\cap\mathbb{T}$ est au plus dénombrable dès que T est à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$.

Avec cette terminologie, le Théorème 7.1.1 nous dit que la suite de terme général $n_k = k$ est une suite de Jamison. Plus généralement, Ransford et Roginskaya [30] ont démontré qu'une suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ vérifiant $\sup_{k\geq 0}\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) < +\infty$ est une suite de Jamison. Par contre, la suite $n_k = 2^{2^k}$ n'en est pas une. Ils ont en effet construit un opérateur à puissances bornées par rapport à $(n_k)_{k\geq 0}$ sur un sous-espace *séparable* de $\ell_\infty(\mathbb{N})$ (muni d'une nouvelle norme dépendant de l'opérateur) et ayant un spectre ponctuel unimodulaire non dénombrable. En fait, il a été prouvé dans [2] que si $\lim_{k\to+\infty}\frac{n_{k+1}}{n_k} = +\infty$, alors $(n_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite de Jamison. Pour plus d'exemples et de contre-exemples sur les suites de Jamison, on renvoie le lecteur aux articles [2] et [1].

7.2 Caractérisation des suites de Jamison

Les suites de Jamison ont été complètement caractérisées par C. Badea et S. Grivaux dans [1]. Remarquons qu'on peut toujours supposer que $n_0 = 1$ dans cette étude. On peut alors associer à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ un distance sur $\mathbb{T}$ définie par :

$$d_{(n_k)}(\lambda,\mu) = \sup_{k\geq 0}|\lambda^{n_k} - \mu^{n_k}|$$

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$.

Théorème 7.2.1. ([1, Théorème 2.8]) *Soit* $(n_k)_{k\geq 0}$ *une suite strictement croissante d'entiers avec* $n_0 = 1$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *la suite* $(n_k)_{k\geq 0}$ *est une suite de Jamison ;*
(2) *il existe* $\epsilon > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, *on ait* $\sup_{k\geq 0} |\lambda^{n_k} - 1| \geq \epsilon$;
(3) *pour tout sous-ensemble non dénombrable* K *de* $\mathbb{T}$, *l'espace métrique* $(K, d_{(n_k)})$ *n'est pas séparable.*

La condition (2) du Théorème 7.2.1 signifie que deux points distincts du cercle $\mathbb{T}$ sont toujours ϵ-séparés pour la distance $d_{(n_k)}$. Cette condition permet de voir facilement si une suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite de Jamison. Par exemple, il est facile de voir que si la suite $\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)_{k\geq 0}$ est bornée, alors $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite de Jamison ([1, Exemple 2.3]).

Le point difficile de la preuve du Théorème 7.2.1 est de montrer que s'il existe un sous-ensemble non dénombrable K de $\mathbb{T}$ tel que l'espace métrique $(K, d_{(n_k)})$ est séparable, alors $(n_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite de Jamison. Autrement dit, il s'agit de construire un espace de Banach séparable et un opérateur linéaire borné T sur X à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ tel que l'ensemble $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ soit non dénombrable. Dans la preuve (voir [1, Théorème 2.1]), C. Badea et S. Grivaux partent de l'espace de Hilbert

$$H = \left\{ (x_j)_{j\geq 0}\,;\, ||x|| = \left(\sum_{j\geq 0} \frac{|x_j|^2}{j^2+1} \right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

et ils considèrent l'opérateur de décalage S sur cet espace défini par $Se_0 = 0$ et $Se_n = e_{n-1}$ si $n \geq 1$ (où $(e_n)_{n\geq 0}$ désigne la base canonique usuelle de H). Pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$, $e_\lambda = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots)$ est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ. Si on renorme l'espace H avec la norme

$$||x||_* := \left(||x||, \sup_{j\geq 0} 2^{-(j+1)} \sup_{k_0,\dots,k_j} \left|\left| \prod_{\ell=0}^{j} (S^{n_{k_\ell}} - I)x \right|\right| \right), \tag{7.1}$$

on montre facilement que l'opérateur S est à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ sur l'espace $H_* := \{x \in H\,;\, ||x||_* < +\infty\}$. Ils montrent ensuite que l'espace

$$H_*^K := \overline{\mathrm{vect}}^{H_*}\left[e_\lambda\,;\, \lambda \in K\right]$$

est séparable en utilisant la séparabilité de l'espace métrique $(K, d_{(n_k)})$.

Dans la construction précédente, l'espace de départ H est un espace de Hilbert mais le nouvel espace $\left(H_*^K, ||\cdot||_*\right)$ n'a plus de structure hilbertienne. Les auteurs se sont naturellement posés la question suivante.

Question 7.2.2. [2] Lorsque $(n_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite de Jamison, existe-t-il un opérateur linéaire borné T sur un espace de Hilbert séparable H à puissances bornées par rapport à cette suite et tel que $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ soit non dénombrable ?

On trouve une réponse partielle à cette question dans [2].

Théorème 7.2.3. ([2, Théorème 3.1]) *Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels non nuls telle que la série*

$$\sum_{k\geq 0}\left(\frac{n_k}{n_{k+1}}\right)^2$$

soit convergente. Alors il existe un opérateur linéaire borné T sur un espace de Hilbert séparable H à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ et tel que $\sigma_p(T)\cap\mathbb{T}$ soit non dénombrable.

La réponse à la Question 7.2.2 a été donnée par T. Eisner et S. Grivaux dans [14]. Les suites $(n_k)_{k\geq 0}$ d'entiers naturels pour lesquelles on peut faire la construction sur un espace de Hilbert séparable sont appelées les *suites Jamison hilbertiennes* (Définition 7.3.1). On présente dans la prochaine section le résultat (relatif aux suites Jamison hilbertiennes) ainsi que les grandes lignes de la preuve, ce qui nous servira pour démontrer le résultat principal du chapitre 8 (Théorème 8.3.1).

7.3 Suites Jamison hilbertiennes

Les *suites Jamison hilbertiennes* sont celles qui font l'objet de la Question 7.2.2.

Définition 7.3.1. Une suite d'entiers naturels strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ est dite *Jamison hilbertienne* si pour tout espace de Hilbert complexe séparable H et pour tout opérateur linéaire borné T sur H qui est à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$, l'ensemble $\sigma_p(T)\cap\mathbb{T}$ est au plus dénombrable.

Il est clair que toute suite de Jamison est une suite Jamison hilbertienne. En 2011, T. Eisner et S. Grivaux ont démontré dans [14] que la réciproque est vraie. Rappelons que si T est un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert séparable H et si σ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$ (pas nécessairement la mesure de Lebesgue normalisée), alors on dit que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont σ-*engendrants* si pour tout sous-ensemble σ-mesurable A de $\mathbb{T}$ tel que $\sigma(A)=1$, les sous-espaces propres $\ker(T-\lambda)$ $(\lambda\in A)$ engendrent un sous-espace dense de H. On dira aussi que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 sont *parfaitement engendrants* s'il existe une mesure de probabilité continue σ sur $\mathbb{T}$ pour laquelle ces vecteurs propres sont σ-engendrants.

Théorème 7.3.2. ([14, Théorème 2.1]) *Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante (avec $n_0=1$) telle que pour tout $\epsilon>0$, il existe $\lambda\in\mathbb{T}\setminus\{1\}$ tel que*

$$\sup_{k\geq 0}|\lambda^{n_k}-1|\leq\epsilon.$$

Soit $\delta > 0$. Il existe un opérateur linéaire borné T sur l'espace de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$ tel que les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 soient parfaitement engendrants et tel que

$$\sup_{k\geq 0} ||T^{n_k}|| \leq 1+\delta.$$

En particulier, le spectre ponctuel unimodulaire de T est non dénombrable.

On montrera dans le chapitre 8 que ce résultat reste vrai si on remplace l'espace $\ell_2(\mathbb{N})$ par un espace de Banach séparable admettant *une décomposition de Schauder inconditionnelle* (Définition 8.2.1). Dans cette optique, on va maintenant présenter les idées générales de la preuve du Théorème 7.3.2 (voir [14] pour plus de détails). On commence par présenter la construction de l'opérateur T.

7.3.1 Construction de l'opérateur T

On se place sur l'espace de Hilbert $\ell_2(\mathbb{N})$ (noté H) où la base canonique est notée $(e_n)_{n\geq 1}$. L'opérateur $T \in \mathcal{B}(H)$ est défini comme la somme d'un opérateur diagonal unitaire D et d'un opérateur de décalage pondéré B dont la construction dépend de deux suites $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ qui sont choisies dans la preuve de sorte que les conditions du Théorème 7.3.2 soient satisfaites. On introduit pour cela une fonction $j : \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) pour tout $n \geq 2$, $j(n) < n$;

(ii) pour tout $k \geq 1$, l'ensemble $\{n \geq 2\,;\, j(n) = k\}$ est infini (autrement dit, la fonction j prend toutes les valeurs entières non nulles une infinité de fois).

On définit maintenant les opérateurs D et B.

▷ **Définition de l'opérateur D.**
On considère l'opérateur diagonal (unitaire) sur H défini par $De_n = \lambda_n e_n$ pour tout entier $n \geq 1$, où $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ est une suite de nombres complexes de module 1 deux à deux distincts (à choisir dans la preuve). Alors, D est un opérateur linéaire borné sur H et pour tout entier naturel n, l'opérateur D^n est de norme 1.

▷ **Définition de l'opérateur B.**
On définit l'opérateur de décalage pondéré B par $Be_1 = 0$ et pour tout entier $n \geq 2$, $Be_n = \alpha_{n-1}e_{n-1}$, où les poids α_n sont définis par

$$\alpha_1 = w_1|\lambda_2 - \lambda_{j(2)}| \tag{7.2}$$

et pour tout $n \geq 2$,

$$\alpha_n = w_n \frac{|\lambda_{n+1} - \lambda_{j(n+1)}|}{|\lambda_n - \lambda_{j(n)}|}. \tag{7.3}$$

Remarquons que les poids α_n sont bien définis. En effet, comme $j(n) < n$, les nombres complexes λ_n et $\lambda_{j(n)}$ sont distincts. Sous réserve que l'opérateur B soit borné sur H, on peut écrire que pour tout vecteur $x = \sum_{k\geq 1} x_k e_k$ de H,

$$Bx = \sum_{k\geq 1} \alpha_k x_{k+1} e_k.$$

On définit enfin l'opérateur $T = D + B$. La première étape de la preuve consiste à trouver des conditions pour que T soit un opérateur borné sur H.

7.3.2 L'opérateur T est borné sur H

On explique brièvement la construction des poids λ_n qui rend l'opérateur T borné sur H. Comme D est borné sur H, il suffit de trouver une condition pour que B soit un opérateur borné. Si $\gamma > 0$ est fixé, alors $||B|| \leq \gamma$ si $\alpha_n \leq \gamma$ pour tout entier naturel n non nul, c'est-à-dire

$$w_1|\lambda_2 - \lambda_{j(2)}| \leq \gamma \qquad \text{et} \qquad w_{n-1}\left|\frac{\lambda_n - \lambda_{j(n)}}{\lambda_{n-1} - \lambda_{j(n-1)}}\right| \leq \gamma \qquad \text{pour tout } n \geq 3. \tag{7.4}$$

On se donne une suite *arbitraire* de poids strictement positifs $(w_n)_{n\geq 1}$ et on construit une suite de nombres complexes de module 1 deux à deux distincts $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de sorte que les conditions (7.4) soient vérifiées. La construction est la suivante :

• on commence par choisir un nombre complexe $\lambda_1 \in \mathbb{T}$ arbitraire (par exemple $\lambda_1 = 1$) ;

• on a $j(2) = 1$ (voir condition (i) sur la fonction j). On choisit $\lambda_2 \in \mathbb{T}$ tel que

$$|\lambda_2 - \lambda_1| \leq \frac{\gamma}{w_1}$$

avec $\lambda_2 \neq \lambda_1$;

• ensuite, $j(3) \in \{1, 2\}$. On choisit $\lambda_3 \in \mathbb{T}$ « proche » de $\lambda_{j(3)}$ de sorte que

$$|\lambda_3 - \lambda_{j(3)}| \leq \frac{\gamma}{w_2}|\lambda_2 - \lambda_{j(2)}|$$

avec $\lambda_3 \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$;

• à l'étape $n \geq 2$: si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ ont été construits, on choisit $\lambda_n \in \mathbb{T}$ « proche » de $\lambda_{j(n)}$ (on a $j(n) \in \{1, \ldots, n-1\}$ d'après la condition (i) sur la fonction j) de sorte que

$$|\lambda_n - \lambda_{j(n)}| \leq \frac{\gamma}{w_{n-1}}|\lambda_{n-1} - \lambda_{j(n-1)}|$$

avec $\lambda_n \notin \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\}$.

La suite de la preuve consiste à choisir convenablement les suites $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ de sorte que le spectre ponctuel unimodulaire de T soit non dénombrable et de sorte que T soit à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$.

7.3.3 Rendre $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ non dénombrable

Tout d'abord, on calcule les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1. Si $x = \sum_{k\geq 1} x_k e_k$ est un vecteur de H et $\lambda \in \mathbb{T}$, alors un simple calcul montre que l'équation algébrique $Tx = \lambda x$ est vraie si et seulement si

$$x_k = \frac{(\lambda - \lambda_{k-1}) \dots (\lambda - \lambda_1)}{\alpha_{k-1} \dots \alpha_1} x_1 \qquad \text{pour tout } k \geq 2.$$

Si on note $u^{(n)}$ le vecteur de H défini par

$$u^{(n)} = e_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\lambda_n - \lambda_{k-1}) \dots (\lambda_n - \lambda_1)}{\alpha_{k-1} \dots \alpha_1} e_k,$$

alors on voit que $\ker(T - \lambda_n)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u^{(n)}$: $\ker(T - \lambda_n) = \mathrm{vect}\big[u^{(n)}\big]$. Le résultat suivant donne alors une condition suffisante pour que $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ soit non dénombrable.

Lemme 7.3.3. ([14, Théorème 2.3]) *Soient X un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie et T un opérateur linéaire borné sur X. On suppose qu'il existe une suite $(u^{(n)})_{n\geq 1}$ de vecteurs de X telle que :*

(a) *pour tout $n \geq 1$, $u^{(n)}$ est un vecteur propre de T associé à une valeur propre λ_n de module* 1 *où les λ_ℓ sont deux à deux distinctes* ;

(b) $\mathrm{vect}\big[u^{(n)}\,;\, n \geq 1\big]$ *est dense dans X* ;

(c) *pour tout $n \geq 1$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $m \neq n$ tel que*

$$\big|\big|u^{(m)} - u^{(n)}\big|\big| \leq \epsilon.$$

Alors les vecteurs propres de T sont parfaitement engendrants. En particulier, $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ est non dénombrable.

On peut voir facilement que les conditions (a) et (b) sur la suite $(u^{(n)})_{n\geq 1}$ du Lemme 7.3.3 sont satisfaites. La condition (c) est une conséquence du résultat suivant et du fait que la fonction j visite chaque entier naturel non nul fixé infiniement souvent (condition (ii) sur la fonction j).

Lemme 7.3.4. ([14, Lemme 2.4]) *En choisissant convenablement les coefficients w_n et λ_n, on a pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\big|\big|u^{(n)} - u^{(j(n))}\big|\big| \leq 2^{-n}.$$

Moralement, l'idée de cette preuve consiste à prendre w_{n-1} « grand » à la $n^{\text{ème}}$ étape puis λ_n « proche » de $\lambda_{j(n)}$. On explique maintenant l'idée de la preuve du fait que T soit à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$.

7.3.4 Rendre T à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$

La réelle difficulté de la preuve du Théorème 7.3.2 est de trouver des conditions sur les λ_n de sorte que T soit à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$. L'idée est de montrer que $||T^{n_p} - D^{n_p}|| \leq \delta$. On introduit quelques notations qui seront réutilisées dans le chapitre 8. Pour tous les entiers $k, \ell \geq 1$ et $n \geq 1$, soit

$$t_{k,\ell}^{(n)} = \langle e_k, T^n e_\ell \rangle$$

le coefficient situé sur la $k^{\text{ème}}$ rangée et $\ell^{\text{ème}}$ colonne dans la représentation matricielle de T^n. On note d'abord que si $k > \ell$, alors $t_{k,\ell}^{(n)} = 0$ (tous les coefficients en dessous de la diagonale principale sont nuls dans la représentation matricielle de T^n). De même, si $\ell - k > n$, alors $t_{k,\ell}^{(n)} = 0$ (les coefficients qui ne se trouvent pas sur les n premières sur-diagonales de la matrice de T^n sont nuls). De plus, il est clair que $t_{k,k}^{(n)} = \lambda_k^n$ pour tout entier $k \geq 1$. Enfin, les coefficients $t_{k,\ell}^{(n)}$ pour $1 \leq \ell - k \leq n$ se calculent par récurrence.

Lemme 7.3.5. ([14, Lemme 2.6]) *Pour tous les entiers naturels k et ℓ tels que $1 \leq \ell - k \leq n$, on a*

$$t_{k,\ell}^{(n)} = \alpha_{\ell-1}\alpha_{\ell-2}\dots\alpha_k \sum_{j_k+\cdots+j_\ell = n-(\ell-k)} \lambda_k^{j_k}\dots\lambda_\ell^{j_\ell}.$$

Ces quantités interviennent naturellement dans l'estimation des normes $||T^{n_p} - D^{n_p}||$. En effet, si $x = \sum_{\ell\geq 1} x_\ell e_\ell$, alors

$$(T^{n_p} - D^{n_p})x = \sum_{\ell\geq 1} x_\ell \left(\sum_{k\geq 1} t_{k,\ell}^{(n_p)} e_k \right) - \sum_{\ell \geq 1} x_\ell \, t_{\ell,\ell}^{(n_p)} e_\ell = \sum_{\ell\geq 2} x_\ell \left(\sum_{k=\max(1,\ell-n_p)}^{\ell-1} t_{k,\ell}^{(n_p)} e_k \right)$$

et donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$||T^{n_p} - D^{n_p}||^2 \leq \sum_{\ell\geq 2} \sum_{k=\max(1,\ell-n_p)}^{\ell-1} \left| t_{k,\ell}^{(n_p)} \right|^2. \tag{7.5}$$

Le but est donc d'estimer, pour tout $\ell \geq 2$ et pour tout $p \geq 1$, la quantité

$$\sum_{k=\max(1,\ell-n_p)}^{\ell-1} \left| t_{k,\ell}^{(n_p)} \right|^2. \tag{7.6}$$

Pour tous les entiers naturels $k, \ell, n \geq 1$ tels que $1 \leq \ell - k \leq n$, on note $s_{k,\ell}^{(n)}$ la quantité

$$s_{k,\ell}^{(n)} = \sum_{j_k+\cdots+j_\ell = n-(\ell-k)} \lambda_k^{j_k}\dots\lambda_\ell^{j_\ell}, \tag{7.7}$$

de sorte que d'après le Lemme 7.3.5,

$$t_{k,\ell}^{(n)} = \alpha_{\ell-1}\dots\alpha_k \, s_{k,\ell}^{(n)} = w_{\ell-1}\dots w_k \frac{|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}|}{|\lambda_k - \lambda_{j(k)}|} s_{k,\ell}^{(n)}.$$

On mentionne le résultat technique suivant qui est le cœur de la preuve du Théorème 7.3.2.

Lemme 7.3.6. [14] *En choisissant les* λ_n *suffisamment proches des* $\lambda_{j(n)}$*, on a pour tout entier* $p \geq 0$ *et pour tout* $\ell \geq 2$*,*

$$\sum_{k=\max(1,\ell-n_p)}^{\ell-1} w_{\ell-1}^2 \dots w_k^2 \frac{|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}|^2}{|\lambda_k - \lambda_{j(k)}|^2} |s_{k,\ell}^{(n_p)}|^2 \leq \delta^2 2^{-\ell}.$$

En utilisant l'estimation (7.5) et le Lemme 7.3.6, on trouve que $||T^{n_p} - D^{n_p}|| \leq \delta$ pour tout entier naturel p, ce qui montre que T est à puissances bornées par rapport à $(n_k)_{k\geq 0}$ avec l'estimation $\sup_{p\geq 0} ||T^{n_p}|| \leq 1 + \delta$.

Remarque 7.3.7. En recopiant la preuve du Lemme 7.3.6 (voir [14]), on peut montrer de la même manière que, si p est un nombre réel supérieur ou égal à 1, on a en choisissant les λ_n suffisamment proches des $\lambda_{j(n)}$:

$$\sum_{k=\max(1,\ell-n_q)}^{\ell-1} w_{\ell-1}^p \dots w_k^p \frac{|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}|^p}{|\lambda_k - \lambda_{j(k)}|^p} |s_{k,\ell}^{(n_q)}|^p \leq \delta 2^{-\ell}$$

pour tous les entiers $q \geq 0$ et $\ell \geq 2$. Cette estimation nous sera utile pour démontrer notre résultat sur les espaces *Jamison universels* (Théorème 8.3.1).

Dans le chapitre suivant, on généralise l'étude de la Question 7.2.2.

Question 7.3.8. Si $(n_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite de Jamison, sur quels espaces de Banach complexes séparables X peut-on construire un opérateur T à puissances bornées par rapport à cette suite et ayant un spectre ponctuel unimodulaire non dénombrable ?

Lorsque $(n_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite de Jamison, les espaces de Banach complexes séparables sur lesquels ont peut construire un opérateur linéaire borné à puissances bornées par rapport à $(n_k)_{k\geq 0}$ avec un spectre ponctuel unimodulaire non dénombrable sont appelés *espaces Jamison universels* (Définition 8.1.2). Dans le chapitre 8, on étudie ces espaces et on trouve une large classe d'espaces de Banach séparables qui ont cette propriété (Théorème 8.3.1). Dans le chapitre 9, on s'intéresse aux suites de Jamison pour les semi-groupes fortement continus, appelées *suites* $\mathbb{R}_+$*-Jamison* (Définition 9.1.4). On donne un analogue du Théorème 7.2.1 qui caractérise les suites $\mathbb{R}_+$-Jamison (Théorème 9.2.2). On étudie aussi les *espaces Jamison universels pour les semi-groupes.*

7.4 Dimension de Hausdorff de $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$

Il est aussi naturel de s'intéresser à la taille du spectre ponctuel unimodulaire au sens de la dimension de Hausdorff. En effet, Ransford et Roginskaya [30] ont montré que si T est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach séparable à puissances bornées par rapport à une suite d'entiers naturels strictement croissante, alors le spectre ponctuel unimodulaire est de mesure de Lebesgue nulle ([30, Théorème 1.1]). De plus, ils ont montré que le fait qu'un opérateur soit à puissances bornées imposait certaines restrictions sur la dimension de Hausdorff de son spectre ponctuel unimodulaire.

Théorème 7.4.1. ([30, Théorème 1.3]) *Soient X un espace de Banach complexe séparable et T un opérateur linéaire borné sur X à puissances bornées par rapport à une suite d'entiers naturels strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que*

$$P := \liminf_{k\to+\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} > 1 \qquad \text{et} \qquad Q := \liminf_{k\to+\infty} n_k^{1/k} < +\infty.$$

Alors l'ensemble $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ est de dimension de Hausdorff inférieure ou égale à $1 - (\log P / \log Q)$.

Ce résultat a été complété dans [1] où l'on dispose d'un critère pour qu'un opérateur à puissances bornées par rapport à une suite d'entiers naturels strictement croissante ait un « large » spectre ponctuel unimodulaire. L'idée de la preuve du résultat ci-dessous est essentiellement la même que celle de [1, Théorème 2.8].

Théorème 7.4.2. ([1, Corollaire 3.3]) *Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels (avec $n_0 = 1$). Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *il existe un espace de Banach complexe séparable X et un opérateur linéaire borné T sur X à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ tel que $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ soit de dimension de Hausdorff égale à 1 ;*
(2) *il existe un sous-ensemble K de $\mathbb{T}$ de dimension de Hausdorff égale à 1 tel que l'espace métrique $(K, d_{(n_k)})$ soit séparable.*

Le Théorème 7.4.2 a pour conséquence le résultat suivant qui donne un critère portant sur la croissance de la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ pour qu'il existe un opérateur admettant un spectre ponctuel unimodulaire de dimension de Hausdorff maximale égale à 1.

Théorème 7.4.3. ([1, Théorème 3.4]) *Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers (avec $n_0 = 1$) telle que $\frac{n_{k+1}}{n_k} \longrightarrow +\infty$. Il existe un espace de Banach complexe séparable X et un opérateur linéaire borné T sur X à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ tel que $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ soit de dimension de Hausdorff égale à 1.*

On renvoie à [1] pour plus de détails sur la construction du sous-ensemble K de $\mathbb{T}$ de dimension de Hausdorff égale à 1 pour lequel l'espace métrique $(K, d_{(n_k)})$ est séparable lorsque la suite $\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)_{k\geq 0}$ tend vers $+\infty$. Dans le chapitre 9, on démontrera un résultat analogue dans le cadre des semi-groupes fortement continus (Corollaire 9.4.3).

Chapitre 8

Espaces Jamison universels

L'objet de ce chapitre est d'étudier les espaces de Banach complexes séparables X qui ont la propriété suivante : dès que $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite d'entiers naturels strictement croissante *qui n'est pas une suite de Jamison*, alors il existe un opérateur linéaire borné sur l'espace X qui est borné par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ et dont le spectre ponctuel unimodulaire est non dénombrable (voir Question 7.3.8). On donnera notamment une généralisation du Théorème 7.3.2 en montrant que tout espace de Banach complexe séparable qui possède une *décomposition de Schauder inconditionnelle* (Définition 8.2.1) est un espace qui vérifie cette propriété.

8.1 Définitions et exemples

On commence par définir la notion de suite de Jamison *par rapport à un espace de Banach séparable fixé.*

Définition 8.1.1. Soit X un espace de Banach complexe séparable. Une suite d'entiers naturels strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ est dite X-*Jamison* si pour tout opérateur linéaire borné T sur X à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$, l'ensemble $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ est au plus dénombrable.

On définit maintenant la notion principale de ce chapitre qui fait référence à la Question 7.3.8.

Définition 8.1.2. Un espace de Banach complexe séparable X est un espace *Jamison universel* si toute suite X-Jamison est une suite de Jamison.

Autrement dit, un espace de Banach complexe séparable X est un espace Jamison universel si à chaque fois que $(n_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite de Jamison, il existe un opérateur linéaire borné sur X à puissances bornées par rapport à cette suite dont le spectre ponctuel unimodulaire est non dénombrable. Le chapitre précédent permet de donner quelques exemples d'espaces Jamison universels.

Exemple 8.1.3. D'après le Théorème 7.3.2, les espaces de Hilbert complexes séparables sont des espaces Jamison universels. Plus généralement, en combinant la preuve du Théorème 7.3.2 et la Remarque 7.3.7, on voit facilement que pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'espace $\ell_p(\mathbb{N})$ est un espace Jamison universel.

Le but est de généraliser le résultat en montrant que tout espace de Banach complexe séparable admettant une *décomposition de Schauder inconditionnelle* est un espace Jamison universel.

8.2 Espaces de Banach admettant une décomposition de Schauder inconditionnelle

On introduit ici une large classe d'espaces de Banach séparables qui feront l'objet du résultat principal (Théorème 8.3.1).

Définition 8.2.1. Un espace de Banach complexe séparable X de dimension infinie admet une *décomposition de Schauder inconditionnelle* s'il existe une suite infinie dénombrable $(X_\ell)_{\ell \geq 1}$ de sous-espaces fermés non nuls de X telle que tout vecteur x de X s'écrive de manière unique sous la forme d'une série inconditionnellement convergente :

$$x = \sum_{\ell \geq 1} x_\ell, \quad \text{où } x_\ell \in X_\ell \text{ pour tout entier naturel } \ell \text{ non nul.}$$

On peut donner quelques exemples d'espaces de Banach admettant une décomposition de Schauder inconditionnelle. Tout d'abord, la notion de décomposition de Schauder inconditionnelle généralise celle de base inconditionnelle.

Exemple 8.2.2. Un espace de Banach qui a une base inconditionnelle admet une décomposition de Schauder inconditionnelle.

On rappelle ici que l'espace de fonctions continues $C([0,1])$ est *universel* au sens où $C([0,1])$ contient une copie de tout espace de Banach séparable.

Exemple 8.2.3. Un espace de Banach séparable X contenant une copie complémentée d'un espace admettant une décomposition de Schauder inconditionnelle a une décomposition de Schauder inconditionnelle. En particulier, si X contient une copie de $c_0(\mathbb{N})$, alors X admet une décomposition de Schauder inconditionnelle. Par exemple, l'espace $C([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ admet une décomposition de Schauder inconditionnelle.

Démonstration. Le fait que X admette une décomposition de Schauder inconditionnelle découle directement de la Définition 8.2.1. Ensuite, si X contient une copie de $c_0(\mathbb{N})$, un résultat de Sobczyk nous dit que cette copie est complémentée dans X. Enfin, comme l'espace $C([0,1])$ est universel, il contient une copie de $c_0(\mathbb{N})$. $\square$

Supposons que l'espace de Banach X admette une décomposition de Schauder inconditionnelle que l'on note $(X_\ell)_{\ell\geq 1}$. Soit $(I_k)_{k\geq 1}$ une partition de $\mathbb{N}^*$, où les ensembles I_k sont finis ou infinis. Pour tout entier naturel k, on note

$$Y_k := \overline{\text{vect}}\left(\bigcup_{\ell\in I_k} X_\ell\right).$$

Alors, $(Y_k)_{k\geq 1}$ est aussi une décomposition de Schauder inconditionnelle de X. Par conséquent, on peut supposer dans la suite que chaque espace X_ℓ est de dimension infinie, ce qui nous permettra de définir sans confusion un opérateur de décalage sur un espace admettant une telle décomposition.

Pour pouvoir définir des opérateurs de décalage sur un espace de Banach séparable admettant une décomposition de Schauder inconditionnelle, on a besoin d'introduire la notion de *système biorthogonal*. On note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker (c'est-à-dire $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ sinon).

Définition 8.2.4. ([25, Définition 1.f.1.]) Soit Z un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie et pour tout entier naturel i non nul, soient z_i et z_i^* des éléments de Z et Z^* respectivement. On dit que la double suite $\big((z_i)_{i\geq 1}, (z_i^*)_{i\geq 1}\big)$ est un système biorthogonal de Z si pour tous les entiers $i, j \geq 1$, on a $\langle z_i^*, z_j\rangle = \delta_{i,j}$.

Le résultat fondamental suivant assure l'existence d'un tel système dans un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie quelconque.

Théorème 8.2.5. ([25, Théorème 1.f.4]) *Soit Z un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie. Il existe un système biorthogonal $\big((z_i)_{i\geq 1}, (z_i^*)_{i\geq 1}\big)$ dans Z (où $z_i \in Z$ et $z_i^* \in Z^*$) tel que :*
(1) $\sup_{i\geq 1} ||z_i||\, ||z_i^*|| < +\infty$;
(2) $\text{vect}[z_i\,;\, i \geq 1]$ *est un sous-espace dense de Z* ;
(3) *pour tout vecteur z de Z, si $\langle z_i^*, z\rangle = 0$ pour tout entier naturel i non nul, alors $z = 0$.*

Pour plus d'informations sur les systèmes biorthogonaux, on renvoie le lecteur au livre [25].

8.3 Le résultat

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de ce chapitre qui donne un élément de réponse à la Question 7.3.8.

Théorème 8.3.1. *Soit X un espace de Banach complexe séparable admettant une décomposition de Schauder inconditionnelle. Alors X est un espace Jamison universel.*

Démonstration. On se donne une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ d'entiers naturels non nuls strictement croissante (avec $n_0 = 1$) qui n'est pas une suite de Jamison. L'objectif est de construire un opérateur linéaire borné T sur X à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ dont le spectre ponctuel unimodulaire est non dénombrable. On va se ramener à la preuve de [14, Théorème 2.1] en utilisant le fait que l'espace X admet une décomposition de Schauder inconditionnelle. On sait qu'il existe une suite $(X_\ell)_{\ell\geq 1}$ de sous-espaces fermés de X de dimension infinie telle que pour tout vecteur x de X, il existe une unique suite de vecteurs $(x_\ell)_{\ell\geq 1}$ (où x_ℓ appartient à X_ℓ pour tout entier naturel ℓ non nul) telle que $x = \sum_{\ell\geq 1} x_\ell$, où la série converge inconditionnellement. En particulier, on a la décomposition

$$X = \bigoplus_{\ell\geq 1} X_\ell.$$

D'après le Théorème 8.2.5, on peut considérer dans chaque espace X_ℓ un système biorthogonal $\big((x_{i,\ell})_{i\geq 1}, (x^*_{i,\ell})_{i\geq 1}\big)$ tel que

$$||x_{i,\ell}|| = 1 \text{ pour tout } i \geq 1 \text{ et } M_\ell := \sup_{i\geq 1} ||x^*_{i,\ell}|| < +\infty. \tag{8.1}$$

Remarquons que pour tout entier naturel ℓ non nul, $M_\ell \geq 1$ (puisque $\langle x^*_{i,\ell}, x_{i,\ell}\rangle = 1$ et $||x_{i,\ell}|| = 1$). On commence par définir l'opérateur T et on montre qu'il est borné sur X. On étudiera ensuite les vecteurs propres de T associés aux valeurs propres de module 1 puis on estimera les normes $||T^{n_p} - D^{n_p}||$.

▷ **Définition de l'opérateur T.**
Comme dans la preuve de [14, Théorème 2.1], T va être la somme d'un opérateur de multiplication et d'un opérateur de décalage pondéré. On considère une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes deux à deux distincts de module 1 (que l'on choisira dans la suite). On peut définir l'opérateur de multiplication $D : X \longrightarrow X$ associé à la suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ par

$$D\left(\sum_{\ell\geq 1} x_\ell\right) = \sum_{\ell\geq 1} \lambda_\ell x_\ell$$

pour tout vecteur $x = \sum_{\ell\geq 1} x_\ell$ de X. Comme la décomposition $X = \bigoplus_{\ell\geq 1} X_\ell$ est inconditionnelle, D est bien défini et est à puissances bornées.

On veut maintenant définir un opérateur de décalage sur X à l'aide du système biorthogonal $\big((x_{i,\ell})_{i\geq 1}, (x^*_{i,\ell})_{i\geq 1}\big)$. Comme

$$X = X_\ell \bigoplus \overline{\text{vect}}\left(\bigcup_{p\neq \ell} X_p\right),$$

on peut étendre la forme linéaire $x^*_{i,\ell}$ à X en posant $x^*_{i,\ell} = 0$ sur $\overline{\text{vect}}\big(\bigcup_{p\neq\ell} X_p\big)$. On considère encore une double suite $((w_{i,\ell})_{i\geq 1})_{\ell\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs (à choisir dans la preuve) et on définit l'opérateur $B : X \longrightarrow X$ en posant (sous réserve de convergence),

$$Bx = \sum_{\ell\geq 2}\sum_{i\geq 1}\langle x^*_{i,\ell}, x\rangle \alpha_{i,\ell-1}x_{i,\ell-1} \quad \text{pour tout vecteur } x \text{ de } X,$$

où, par analogie avec (7.2) et (7.3),

$$\alpha_{i,1} = w_{i,1}|\lambda_2 - \lambda_{j(2)}| \qquad \text{pour tout } i \geq 1 \tag{8.2}$$

et

$$\alpha_{i,\ell} = w_{i,\ell}\frac{|\lambda_{\ell+1} - \lambda_{j(\ell+1)}|}{|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}|} \qquad \text{pour tous } \; i \geq 1 \text{ et } \ell \geq 2, \tag{8.3}$$

où les nombres réels $w_{i,\ell} > 0$ vont être choisis dans la suite. Ici, la fonction j est définie de la même manière que dans la preuve de [14, Théorème 2.1]. Autrement dit, la fonction $j : \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ vérifie les conditions suivantes :

(i) pour tout $n \geq 2$, $j(n) < n$;

(ii) pour tout $k \geq 1$, l'ensemble $\{n \geq 2\,;\, j(n) = k\}$ est infini.

On commence par choisir les poids $\alpha_{i,\ell}$ pour que B définisse un opérateur borné sur X.

▷ **L'opérateur T est borné.**

On spécifie ici les poids $w_{i,\ell}$. On pose, pour tous $i, \ell \geq 1$,

$$w_{i,\ell} = \frac{w_\ell}{2^i M_{\ell+1}}, \tag{8.4}$$

où les coefficients w_ℓ sont des nombres réels strictement positifs (à choisir dans la preuve). Comme D est borné, il suffit de montrer que l'opérateur B est borné sur X. Pour cela, on donne une condition sur les nombres complexes λ_ℓ pour que B soit un opérateur nucléaire, c'est-à-dire pour que la série

$$\mathcal{N} := \sum_{\ell\geq 2}\sum_{i\geq 1}\alpha_{i,\ell-1}\,||x_{i,\ell-1}||\,||x^*_{i,\ell}||$$

soit convergente. D'après nos conditions (8.1) et (8.4) et les définitions de nos poids (8.2) et (8.3), on voit que

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \sum_{\ell\geq 1}\sum_{i\geq 1}\alpha_{i,\ell}\,||x^*_{i,\ell+1}||\\ &\leq w_1|\lambda_2 - \lambda_{j(2)}| + \sum_{\ell=2}^{+\infty} w_\ell\frac{|\lambda_{\ell+1} - \lambda_{j(\ell+1)}|}{|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}|}.\end{aligned}$$

On voit alors que si $(w_\ell)_{\ell\geq 1}$ est une suite arbitraire de nombres réels strictement positifs, on peut choisir λ_ℓ suffisamment proche de $\lambda_{j(\ell)}$ pour chaque entier naturel ℓ pour que la série

$$\sum_{\ell\geq 2} w_\ell\frac{|\lambda_{\ell+1} - \lambda_{j(\ell+1)}|}{|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}|}$$

soit convergente. Par exemple, à l'étape ℓ, on peut choisir $\lambda_\ell \in \mathbb{T}$ tel que

$$|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}| \leq \frac{|\lambda_{\ell-1} - \lambda_{j(\ell-1)}|}{2^\ell w_{\ell-1}}$$

avec $\lambda_\ell \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-1}\}$. L'opérateur B est alors un opérateur nucléaire et donc en particulier un opérateur borné.

▷ **Le spectre ponctuel unimodulaire de T est non dénombrable.**
Considérons le sous-espace fermé

$$\hat{X}_1 := \overline{\text{vect}}\big[x_{1,\ell}\,;\, \ell \geq 1\big]$$

de X. On sait que $Bx_{1,1} = 0$ et $Bx_{1,\ell} = \alpha_{1,\ell-1}x_{1,\ell-1}$ pour tout $\ell \geq 1$, ce qui prouve que l'espace $\hat{X}_1$ est T-invariant. On peut donc considérer la restriction de l'opérateur T à cet espace :

$$\begin{aligned} T_1 : \hat{X}_1 &\longrightarrow \hat{X}_1 \\ x &\longmapsto T_1 x := Tx. \end{aligned}$$

On remarque aussi que comme la décomposition $X = \bigoplus_{\ell \geq 1} X_\ell$ est inconditionnelle, la suite $(x_{1,\ell})_{\ell \geq 1}$ est une base inconditionnelle de l'espace $\hat{X}_1$. Si $x = \sum_{\ell \geq 1} c_\ell x_{1,\ell}$ est un vecteur de $\hat{X}_1$ et si $\lambda \in \mathbb{T}$, on voit que $T_1 x = \lambda x$ si et seulement si

$$c_k = \frac{(\lambda - \lambda_{k-1}) \dots (\lambda - \lambda_1)}{\alpha_{1,k-1} \dots \alpha_{1,1}} c_1 \qquad \text{pour tout } k \geq 2.$$

Ainsi, si on note $u_1^{(n)}$ le vecteur de $\hat{X}_1$ défini par

$$u_1^{(n)} := x_{1,1} + \sum_{\ell=2}^{n} \frac{(\lambda_n - \lambda_{\ell-1}) \dots (\lambda_n - \lambda_1)}{\alpha_{1,\ell-1} \dots \alpha_{1,1}} x_{1,\ell},$$

alors on voit que $\ker(T_1 - \lambda_n)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1^{(n)}$: $\ker(T_1 - \lambda_n) = \text{vect}\big[u_1^{(n)}\big]$. Le fait de choisir λ_ℓ « suffisamment proche » de $\lambda_{j(\ell)}$ pour tout entier $\ell \geq 2$ permet d'appliquer le Lemme 7.3.3. En réécrivant la preuve de [14, Proposition 2.5], on trouve que les vecteurs propres de T_1 associés aux valeurs propres de module 1 sont parfaitement engendrants et donc, en particulier, l'ensemble $\sigma_p(T_1) \cap \mathbb{T}$ est non dénombrable. Comme $\sigma_p(T_1) \cap \mathbb{T} \subset \sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$, le spectre ponctuel unimodulaire de l'opérateur T est non dénombrable également.

▷ **Estimation des normes $||T^{n_p}||$.**
On utilise les mêmes idées que dans la preuve du Théorème 7.3.2. En l'occurrence, on veut estimer les normes $||T^{n_p} - D^{n_p}||$. Pour tous les entiers naturels non nuls k, ℓ, i et n, on pose

$$t_{k,\ell}^{(i,n)} = \langle x_{i,k}^*, T^n x_{i,\ell} \rangle.$$

On remarque que (comme pour les coefficients $t_{k,\ell}^{(n)}$ du chapitre 7), $t_{k,\ell}^{(i,n)} = 0$ dès que $k > \ell$ ou $\ell - k > n$. De plus, $t_{k,k}^{(i,n)} = \lambda_k^n$. Ensuite, le Lemme 7.3.5 nous donne l'expression de $t_{k,\ell}^{(i,n)}$ lorsque $1 \leq \ell - k \leq n$.

Lemme 8.3.2. *Pour tous les entiers $k, \ell, i, n \geq 1$ tels que $1 \leq \ell - k \leq n$, on a*

$$t_{k,\ell}^{(i,n)} = \alpha_{i,\ell-1}\alpha_{i,\ell-2}\ldots\alpha_{i,k} \sum_{j_k+\cdots+j_\ell = n-(\ell-k)} \lambda_k^{j_k}\ldots\lambda_\ell^{j_\ell}.$$

Démonstration. Ceci vient du fait que pour $i \geq 1$ fixé, l'opérateur B_i défini sur l'espace $Y_i := \overline{\mathrm{vect}}\big[x_{i,\ell}\,;\,\ell \geq 1\big]$ par $B_i x_{i,\ell} := Bx_{i,\ell} = \alpha_{i,\ell-1}x_{i,\ell-1}$ si $\ell \geq 2$ et $B_i x_{i,1} = 0$ est un opérateur de décalage pondéré comme dans la preuve du Théorème 7.3.2. En fait, comme $X = \bigoplus_{\ell \geq 1} X_\ell$ est une décomposition de Schauder inconditionnelle, la suite $(x_{i,\ell})_{\ell \geq 1}$ est une base inconditionnelle de Y_i et donc tout vecteur x de Y_i s'écrit (de manière unique) sous la forme $x = \sum_{\ell \geq 1}\langle x_{i,\ell}^*, x\rangle x_{i,\ell}$. Par conséquent,

$$B_i x = \sum_{\ell \geq 2}\langle x_{i,\ell}^*, x\rangle \alpha_{i,\ell-1}x_{i,\ell-1}.$$

Ainsi, en fixant l'indice i, on peut appliquer le Lemme 7.3.5, ce qui nous donne l'expression des coefficients $t_{k,\ell}^{(i,n)}$. □

On en vient maintenant à l'estimation des quantités $||T^{n_p} - D^{n_p}||$. Dans chaque espace X_ℓ, on considère le sous-espace $\tilde{X}_\ell$ engendré par les vecteurs $x_{i,\ell}$ $(i \geq 1)$:

$$\tilde{X}_\ell = \mathrm{vect}\big[x_{i,\ell}\,;\, i \geq 1\big].$$

Comme $\tilde{X}_\ell$ contient les vecteurs $x_{i,\ell}$ $(i \geq 1)$, $\tilde{X}_\ell$ est un sous-espace dense de X_ℓ. Par conséquent, la somme directe $Y := \bigoplus_{\ell \geq 1}\tilde{X}_\ell$ est dense dans X. Si on montre qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout y de l'espace Y, on ait $||(T^{n_p} - D^{n_p})y|| \leq C||y||$ pour tout entier naturel p, alors par continuité des opérateurs $T^{n_p} - D^{n_p}$, on aura bien montré que $||T^{n_p} - D^{n_p}|| \leq C$ pour tout entier naturel p. On fixe un élément y de Y. Pour tout entier entier naturel ℓ non nul, il existe un entier $i_\ell \geq 1$ tel que

$$y_\ell = \sum_{i=1}^{i_\ell}\langle x_{i,\ell}^*, y\rangle x_{i,\ell},$$

où y_ℓ est la composante du vecteur y dans l'espace $\tilde{X}_\ell$. Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} T^n y = \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i_\ell}\langle x_{i,\ell}^*, y\rangle T^n x_{i,\ell} &= \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i_\ell}\langle x_{i,\ell}^*, y\rangle \sum_{k=\max(1,\ell-n)}^{\ell}\langle x_{i,k}^*, T^n x_{i,\ell}\rangle x_{i,k} \\ &= \sum_{\ell=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{i_\ell}\langle x_{i,\ell}^*, y\rangle \sum_{k=\max(1,\ell-n)}^{\ell} t_{k,\ell}^{(i,n)} x_{i,k}. \end{aligned}$$

De plus,

$$D^n y = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \lambda_\ell^n \sum_{i=1}^{i_\ell} \langle x_{i,\ell}^*, y\rangle x_{i,\ell} = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{i_\ell} \langle x_{i,\ell}^*, y\rangle t_{\ell,\ell}^{(i,n)} x_{i,\ell}.$$

On en déduit donc que

$$(T^n - D^n)y = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{i=1}^{i_\ell} \langle x_{i,\ell}^*, y\rangle \sum_{k=\max(1,\ell-n)}^{\ell-1} t_{k,\ell}^{(i,n)} x_{i,k}.$$

D'après la condition (8.1), on obtient

$$\begin{aligned} ||(T^n - D^n)y|| &\leq ||y|| \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{i=1}^{i_\ell} ||x_{i,\ell}^*|| \left(\sum_{k=\max(1,\ell-n)}^{\ell-1} \left|t_{k,\ell}^{(i,n)}\right| \right) \\ &\leq ||y|| \sum_{\ell=2}^{+\infty} M_\ell \left(\sum_{i=1}^{i_\ell} \sum_{k=\max(1,\ell-n)}^{\ell-1} \left|t_{k,\ell}^{(i,n)}\right| \right). \end{aligned}$$

Or, d'après le Lemme 8.3.2, les coefficients $t_{k,\ell}^{(i,n)}$ pour $1 \leq \ell - k \leq n$ sont donnés par

$$t_{k,\ell}^{(i,n)} = \alpha_{i,\ell-1}\alpha_{i,\ell-2}\dots\alpha_{i,k} s_{k,\ell}^{(n)},$$

où les coefficients $s_{k,\ell}^{(n)}$ ont été définis dans le chapitre 7 (voir (7.7)). D'après les expressions (8.3) et (8.4) de nos coefficients $\alpha_{i,\ell}$ (et $w_{i,\ell}$), il vient

$$t_{k,\ell}^{(i,n)} = \frac{w_{\ell-1}w_{\ell-2}\dots w_k}{2^{(\ell-k)i} M_\ell M_{\ell-1}\dots M_{k+1}} \cdot \frac{|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}|}{|\lambda_k - \lambda_{j(k)}|} \cdot s_{k,\ell}^{(n)}.$$

Comme $M_\ell \geq 1$ pour tout $\ell \geq 1$, on a

$$\left|t_{k,\ell}^{(i,n)}\right| \leq \frac{w_{\ell-1}w_{\ell-2}\dots w_k}{2^{(\ell-k)i} M_\ell} \cdot \frac{|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}|}{|\lambda_k - \lambda_{j(k)}|} \cdot \left|s_{k,\ell}^{(n)}\right|.$$

En remarquant que $\sum_{1\leq i\leq i_\ell} 2^{-i(\ell-k)} \leq 1$ (car $\ell - k \geq 1$), on trouve que pour tout vecteur y de Y et pour tout entier naturel p, on a

$$||(T^{n_p} - D^{n_p})y|| \leq ||y|| \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{k=\max(1,\ell-n_p)}^{\ell-1} w_{\ell-1}\dots w_k \cdot \frac{|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}|}{|\lambda_k - \lambda_{j(k)}|} \cdot \left|s_{k,\ell}^{(n_p)}\right|$$

et donc par densité,

$$||T^{n_p} - D^{n_p}|| \leq \sum_{\ell=2}^{+\infty} \sum_{k=\max(1,\ell-n_p)}^{\ell-1} w_{\ell-1}\dots w_k \cdot \frac{|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}|}{|\lambda_k - \lambda_{j(k)}|} \cdot \left|s_{k,\ell}^{(n_p)}\right| \quad \text{pour tout } p \geq 0.$$

Il s'agit alors d'estimer, pour tous les entiers $p \geq 0$ et $\ell \geq 2$, la quantité

$$\sum_{k=\max(1,\ell-n_p)}^{\ell-1} w_{\ell-1}\dots w_k \cdot \frac{|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}|}{|\lambda_k - \lambda_{j(k)}|} \cdot \left|s_{k,\ell}^{(n_p)}\right|,$$

ce qui est le coeur de la preuve de [14, Théorème 2.1]. Plus précisément, cette estimation est l'objet de la Remarque 7.3.7 (pour $p = 1$). Ainsi, en choisissant λ_ℓ suffisamment proche de $\lambda_{j(\ell)}$, on peut s'arranger pour que pour tous les entiers $p \geq 0$ et $\ell \geq 2$, on ait

$$\sum_{k=\max(1,\ell-n_p)}^{\ell-1} w_{\ell-1} \dots w_k \cdot \frac{|\lambda_\ell - \lambda_{j(\ell)}|}{|\lambda_k - \lambda_{j(k)}|} \cdot \left|s_{k,\ell}^{(n_p)}\right| \leq 2^{1-\ell}.$$

Ceci permet de conclure que pour tout entier naturel p,

$$||T^{n_p} - D^{n_p}|| \leq 1,$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

Remarque 8.3.3. Une idée naturelle pour démontrer le Théorème 8.3.1 serait de considérer dans chaque composante X_ℓ de la décomposition de Schauder inconditionnelle $X = \bigoplus_{\ell \geq 1} X_\ell$ de X un vecteur non nul x_ℓ, de manière à travailler avec un sous-espace fermé $Y := \overline{\text{vect}}\big[x_\ell\, ;\, \ell \geq 1\big]$ qui admet $(x_\ell)_{\ell \geq 1}$ comme base inconditionnelle. On construirait alors sur Y un opérateur linéaire borné $T : Y \longrightarrow Y$ à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k \geq 0}$ et dont le spectre ponctuel unimodulaire est non dénombrable (en réécrivant la preuve de [14, Théorème 2.1]). Le problème est qu'on ne peut à priori pas étendre T à l'espace X. Il est donc nécessaire de considérer un système biorthogonal dans chaque composante X_ℓ et de construire l'opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ à l'aide de ces systèmes biorthogonaux.

L'Exemple 8.2.3 va nous permettre de donner de nouveaux exemples d'espaces Jamison universels.

8.4 Exemples

On donne maintenant quelques exemples et contre-exemples d'espaces Jamison universels.

8.4.1 L'espace de James

On rappelle ici la définition de l'espace de James usuel.

Définition 8.4.1. L'espace de James $\mathcal{J}$ est l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \geq 1}$ de l'espace $c_0(\mathbb{N})$ telles que

$$||x||_{\mathcal{J}} := \sup \left\{ |x_{p_1} - x_{p_2}|^2 + \dots + |x_{p_{k-1}} - x_{p_k}|^2 \right\} < +\infty,$$

où la borne supérieure est prise sur tous les k-uplets $(p_1, \dots, p_k)$ d'entiers naturels non nuls tels que $p_1 < \dots < p_k$.

On rappelle que la base canonique $(e_n)_{n\geq 1}$ de $c_0(\mathbb{N})$ est une base de Schauder de $\mathcal{J}$ qui n'est pas inconditionnelle (on renvoie au livre [17] pour plus d'informations sur l'espace de James). Pour montrer que l'espace de James est un espace Jamison universel, on introduit le sous-espace suivant :

$$\mathcal{J}_2 = \big\{x \in \mathcal{J}\,;\, x_{2k} = 0 \text{ pour tout } k \geq 1\big\}.$$

On démontre alors les deux faits bien connus suivants.

Fait 8.4.2. *Le sous-espace $\mathcal{J}_2$ de $\mathcal{J}$ est isomorphe à $\ell_2(\mathbb{N})$.*

Démonstration. Un vecteur x de $\mathcal{J}_2$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{k\geq 0} x_{2k+1}e_{2k+1}$ et pour tout entier naturel k,

$$|x_1 - x_2|^2 + |x_2 - x_3|^2 + \cdots + |x_{2k} - x_{2k+1}|^2 \leq ||x||_{\mathcal{J}}^2,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=0}^{k} |x_{2j+1}|^2 \leq ||x||_{\mathcal{J}}^2,$$

ce qui montre que x appartient à $\ell_2(\mathbb{N})$ et que $||x||_2 \leq ||x||_{\mathcal{J}}$. Inversement, si $x \in \ell_2(\mathbb{N})$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{k\geq 0} x_{2k+1}e_k$, alors pour tout k-uplet $(p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{N}^k$ tel que $p_1 < \cdots < p_k$,

$$\begin{aligned}\left|x_{2p_1+1} - x_{2p_2+1}\right|^2 + \cdots + \left|x_{2p_{k-1}+1} - x_{2p_k+1}\right|^2 &\leq 2\left(\sum_{j=1}^{k-1}\left|x_{2p_j+1}\right|^2 + \sum_{j=2}^{k}\left|x_{2p_j+1}\right|^2\right)\\ &\leq 4||x||_2^2.\end{aligned}$$

et donc $x \in \mathcal{J}_2$ et $||x||_{\mathcal{J}} \leq 2||x||_2$. Finalement, les espaces $\mathcal{J}_2$ et $\ell_2(\mathbb{N})$ sont isomorphes. □

D'après le Fait 8.4.2, l'espace de James $\mathcal{J}$ contient une copie de l'espace $\ell_2(\mathbb{N})$. Il s'agit maintenant de montrer que cette copie est complémentée dans $\mathcal{J}$.

Fait 8.4.3. *$\mathcal{J}_2$ est complémenté dans $\mathcal{J}$.*

Démonstration. On doit trouver une projection $\mathcal{P} \in \mathcal{B}(\mathcal{J})$ dont l'image est $\mathcal{J}_2$. On considère l'opérateur $\mathcal{P} : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ défini par

$$\mathcal{P}x = \sum_{k=0}^{+\infty}(x_{2k+1} - x_{2k+2})e_{2k+1}$$

pour tout $x = \sum_{n\geq 1} x_n e_n \in \mathcal{J}$. Il est clair que $x \in \mathcal{J}_2$ si et seulement si $\mathcal{P}x = x$, ce qui montre que l'image de $\mathcal{P}$ est $\mathcal{J}_2$ et que $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$. Montrons maintenant que $\mathcal{P}$

est un opérateur borné sur $\mathcal{J}$. Si $x = \sum_{n\geq 1} x_n e_n$ est un vecteur de $\mathcal{J}$, alors pour tous $p_1 < \cdots < p_k$, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k-1} \left|x_{2p_j+1} - x_{2p_j+2} - \left(x_{2p_{j+1}+1} - x_{2p_{j+1}+2}\right)\right|^2 \\
&\qquad\qquad \leq 2\left(\sum_{j=1}^{k-1} \left|x_{2p_j+1} - x_{2p_{j+1}+1}\right|^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \left|x_{2p_j+2} - x_{2p_{j+1}+2}\right|^2\right) \\
&\qquad\qquad \leq 4||x||_{\mathcal{J}}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, la projection $\mathcal{P}$ est bornée (et $||\mathcal{P}|| \leq 2$). Finalement, $\mathcal{J}_2$ est complémenté dans $\mathcal{J}$. □

Les Faits 8.4.2 et 8.4.3 ainsi que l'Exemple 8.2.3 montrent que l'espace de James admet une décomposition de Schauder inconditionnelle. On a donc la proposition suivante.

Proposition 8.4.4. *L'espace de James $\mathcal{J}$ est un espace Jamison universel.*

8.4.2 Espaces de Banach contenant une copie de $c_0(\mathbb{N})$

On a vu dans l'Exemple 8.2.3 que tout espace de Banach complexe séparable contenant $c_0(\mathbb{N})$ admet une décomposition de Schauder inconditionnelle. Il en découle directement le résultat suivant.

Proposition 8.4.5. *Tout espace de Banach complexe séparable contenant une copie de $c_0(\mathbb{N})$ est un espace Jamison universel.*

En particulier, l'espace $C[0,1]$ (qui est universel) est un espace Jamison universel. En fait, on sait d'après l'Exemple 8.2.3 que tout espace de Banach complexe séparable contenant une copie complémentée d'un espace admettant une décomposition de Schauder inconditionnelle est un espace Jamison universel.

Remarque 8.4.6. Dans le cas où l'espace de Banach X se décompose comme une somme directe $X = Y \oplus Z$ où Y est un espace de Banach séparable admettant une décomposition de Schauder inconditionnelle (par exemple $Y = \ell_p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < +\infty$, ou $Y = c_0(\mathbb{N})$), on peut montrer directement que X est un espace Jamison universel (sans parler de décomposition de Schauder inconditionnelle de X). En effet, si $(n_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite de Jamison, alors on sait qu'il existe un opérateur borné T sur l'espace Y à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ et dont le spectre ponctuel unimodulaire est non dénombrable (d'après le Théorème 8.3.1). L'opérateur $\tilde{T} := T \oplus 0_{\mathcal{B}(Z)}$ est alors un opérateur à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ (puisque $||\tilde{T}^{n_k}|| = ||T^{n_k}||$ pour tout entier naturel k) dont le spectre ponctuel unimodulaire, qui est égal au spectre ponctuel unimodulaire de T, est non dénombrable.

8.4.3 Espaces héréditairement indécomposables

En 1996, W.T. Gowers [18] a montré avec sa célèbre dichotomie concernant la structure des espaces de Banach que la notion de base inconditionnelle dans un espace de Banach est fortement opposée à celle d'être un espace *héréditairement indécomposable* (Définition 8.4.7). Plus précisément, il a montré que si X est un espace de Banach, alors soit il contient une suite basique inconditionnelle, soit il contient un sous-espace héréditairement indécomposable. Ces deux propriétés sont aussi en opposition du point de vue des espaces Jamison universels. On commence par rappeler la définition d'un espace héréditairement indécomposable.

Définition 8.4.7. Un espace de Banach X de dimension infinie est dit *décomposable* s'il existe deux sous-espaces vectoriels fermés Y et Z de X de dimension infinie tels que $X = Y \oplus Z$. On dit que X est *héréditairement indécomposable* s'il ne contient pas de sous-espace vectoriel fermé décomposable de dimension infinie.

La proposition suivante, qui décrit les opérateurs sur les espaces héréditairement indécomposables, montre qu'un tel espace ne peut jamais être un espace Jamison universel (voir [26]).

Proposition 8.4.8. *Si X est un espace de Banach héréditairement indécomposable, alors tout opérateur linéaire borné sur X est de la forme $\lambda Id_X + S$ où λ est un nombre complexe et où S est un opérateur strictement singulier. En particulier, le spectre de tout opérateur $T \in \mathcal{B}(X)$ est au plus dénombrable.*

On en déduit directement le résultat suivant.

Proposition 8.4.9. *Un espace de Banach héréditairement indécomposable n'est pas Jamison universel.*

On a étudié ici la propriété d'être un espace Jamison universel dans deux cas fortement opposés du point de vue de la dichotomie de Gowers. Il s'agirait maintenant de s'intéresser à la situation intermédiaire où, par exemple, X est un espace de Banach contenant une copie (non complémentée) d'un espace admettant une base inconditionnelle.

Chapitre 9

Suites $\mathbb{R}_+$-Jamison

Le but de ce chapitre est d'adapter les résultats de [1] au cadre des semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach. On caractérisera notamment les suites de Jamison pour les semi-groupes fortement continus (Théorème 9.2.2). On s'intéressera également à la taille du spectre ponctuel du générateur d'un tel semi-groupe en donnant un analogue du Théorème 7.4.3 dans ce cadre. Dans tout ce chapitre, X désigne un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie.

9.1 Suites de Jamison pour les C_0-semi-groupes

Avant de définir les suites de Jamison pour les semi-groupes, on commence par rappeler la définition d'un C_0-semi-groupe (voir le livre [15] pour plus de détails).

Définition 9.1.1. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $(T_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach X est appelée un C_0-*semi-groupe* (ou un *semi-groupe fortement continu*) sur X si les conditions suivantes sont vérifiées :
(1) $T_0 = Id_X$;
(2) pour tous $s, t \geq 0$, $T_{t+s} = T_t T_s$;
(3) pour tout $x \in X$, $\lim\limits_{t\to 0^+} ||T_t x - x|| = 0$.

Remarque 9.1.2. Si $(T_t)_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur un espace de Banach X, alors la famille $\big\{||T_t x|| \,;\, 0 \leq t \leq 1\big\}$ est bornée pour tout vecteur x de X. D'après le principe de la borne uniforme, l'ensemble $\big\{T_t \,;\, t \in [0,1]\big\}$ est borné.

Le *générateur infinitésimal* d'un C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X est l'application $A : D(A) \longrightarrow X$ définie par

$$D(A) := \left\{x \in X \,;\, \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t x - x}{t} \text{ existe}\right\},$$
$$Ax := \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t x - x}{t} \quad (x \in D(A)).$$

Rappelons que $\sigma_p(T_t) \setminus \{0\} = \exp(t\sigma_p(A))$ pour tout $t \geq 0$ (voir par exemple [15, Chapitre 4]), ce qui entraîne que

$$\sigma_p(T_1) \cap \mathbb{T} = \exp(\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}).$$

On introduit d'abord la notion de *semi-groupe borné par rapport à une suite de nombres réels positifs.*

Définition 9.1.3. Soit X un espace de Banach complexe séparable. Soient $(t_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs strictement croissante et $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X. On dit que le semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est *borné par rapport à la suite* $(t_k)_{k\geq 0}$ si $\sup_{k\geq 0} ||T_{t_k}|| < +\infty$.

Remarquons que si la suite $(t_k)_{k\geq 0}$ est bornée, alors tout semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach X est borné par rapport à la suite $(t_k)_{k\geq 0}$. Dans la suite, on s'intéressera donc aux suites de nombres réels positifs $(t_k)_{k\geq 0}$ strictement croissantes qui tendent vers $+\infty$. De plus, on pourra toujours supposer que $t_0 = 1$. On définit maintenant l'analogue des suites de Jamison pour les semi-groupes fortement continus.

Définition 9.1.4. Soit $(t_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs strictement croissante qui tend vers $+\infty$. On dit que $(t_k)_{k\geq 0}$ est une *suite* $\mathbb{R}_+$*-Jamison* si pour tout espace de Banach complexe séparable X et pour tout C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $(T_t)_{t\geq 0}$ sur X (de générateur infinitésimal noté A), l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ est au plus dénombrable dès que $(T_t)_{t\geq 0}$ est borné par rapport à la suite $(t_k)_{k\geq 0}$.

Les suites $\mathbb{R}_+$-Jamison ont déjà été étudiées dans [29], [30] et [2] et la plupart des résultats sur les suites de Jamison se transposent aisément au cadre des semi-groupes fortement continus. Par exemple, si la suite $\left(\frac{t_{k+1}}{t_k}\right)_{k\geq 0}$ est bornée, alors la suite $(t_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison ([30, Théorème 4.1]). On souhaite ici caractériser les suites $\mathbb{R}_+$-Jamison. Pour cela, on utilisera la caractérisation des suites de Jamison ([1, Théorème 2.1]) et plus particulièrement les idées de la preuve de [1, Théorème 2.8] qui ont été rappelées dans le chapitre 7.

9.2 Caractérisation des suites $\mathbb{R}_+$-Jamison

Avant d'énoncer le résultat principal de ce chapitre, on a besoin d'introduire la distance d'un nombre réel à l'entier le plus proche. Pour tout nombre réel θ, on note $||\theta||$ la distance de θ à l'ensemble des entiers relatifs, c'est-à-dire :

$$||\theta|| := \mathrm{dist}(\theta, \mathbb{Z}) = \inf\left\{|\theta - n|\,;\, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Rappelons, sans preuve, quelques propriétés élémentaires de cette fonction.

Proposition 9.2.1. (i) *La fonction* $||\cdot||$ *est paire.*
(ii) *Pour tous nombres réels* θ, ϕ, $||\theta + \phi|| \leq ||\theta|| + ||\phi||$.

(iii) Si $\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$*, alors* $||\theta|| = |\theta|$.
(iv) Il existe des constantes C_1 *et* C_2 *strictement positives telles que pour tout nombre réel* θ*, on ait*

$$C_2||\theta|| \leq \left|e^{2i\pi\theta} - 1\right| \leq C_1||\theta||.$$

La caractérisation des suites $\mathbb{R}_+$-Jamison s'énonce en terme de la fonction $||\cdot||$. Le but est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 9.2.2. *Soit* $(t_k)_{k\geq 0}$ *une suite de nombres réels strictement croissante telle que* $t_0 = 1$ *et* $t_k \longrightarrow +\infty$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *la suite* $(t_k)_{k\geq 0}$ *est une suite* $\mathbb{R}_+$*-Jamison ;*
(2) *il existe* $\epsilon > 0$ *tel que pour tout* $\theta \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$*, on ait*

$$\sup_{k\geq 0} ||t_k\theta|| \geq \epsilon.$$

Pour démontrer ce résultat, on va s'appuyer sur la caractérisation des suites de Jamison ([1, Théorème 2.8]). On s'intéresse donc dans un premier temps aux *suites d'entiers* $\mathbb{R}_+$-Jamison et nous faisons le lien avec les suites de Jamison (Théorème 9.2.3). Nous verrons ensuite comment la caractérisation des *suites d'entiers* $\mathbb{R}_+$-Jamison permet d'obtenir la caractérisation des *suites de nombres réels* $\mathbb{R}_+$-Jamison.

9.2.1 Suites d'entiers $\mathbb{R}_+$-Jamison

On se donne une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ strictement croissante d'entiers naturels telle que $n_0 = 1$. Rappelons qu'on lui associe une distance $d_{(n_k)}$ sur $\mathbb{T}$ définie par :

$$\text{pour tous } \lambda, \mu \in \mathbb{T}, \qquad d_{(n_k)}(\lambda, \mu) = \sup_{k\geq 0} \left|\lambda^{n_k} - \mu^{n_k}\right|.$$

Nous allons maintenant démontrer le résultat suivant.

Théorème 9.2.3. *Soit* $(n_k)_{k\geq 0}$ *une suite d'entiers naturels strictement croissante telle que* $n_0 = 1$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *la suite* $(n_k)_{k\geq 0}$ *est une suite* $\mathbb{R}_+$*-Jamison ;*
(2) *la suite* $(n_k)_{k\geq 0}$ *est une suite de Jamison ;*
(3) *il existe* $\epsilon > 0$ *tel que deux points distincts de* $\mathbb{T}$ *sont toujours* ϵ*-séparés pour la distance* $d_{(n_k)}$ *:*

$$\textit{pour tous } \lambda \neq \mu, \qquad d_{(n_k)}(\lambda, \mu) \geq \epsilon.$$

Démonstration. On sait déjà d'après le Théorème 7.2.1 que les assertions (2) et (3) sont équivalentes. On commence par montrer que (3) $\Rightarrow$ (1). Soient X un espace de Banach complexe séparable et $(T_t)_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X tel que $M := \sup_{k\geq 0} ||T_{n_k}|| < +\infty$. On note A le générateur infinitésimal du semi-groupe

$(T_t)_{t\geq 0}$. Soient alors $i\eta$ et $i\xi$ des valeurs propres de A (avec $\eta, \xi \in \mathbb{R}$) et x_η, x_ξ des vecteurs propres associés à ces valeurs propres avec $||x_\eta|| = ||x_\xi|| = 1$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} Ax_\eta = i\eta x_\eta \\ Ax_\xi = i\xi x_\xi. \end{cases}$$

On sait que pour tout entier naturel k, on a

$$\begin{cases} T_{n_k} x_\eta = e^{i\eta n_k} x_\eta \\ T_{n_k} x_\xi = e^{i\xi n_k} x_\xi. \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| e^{i\eta n_k} - e^{i\xi n_k} \right| - ||x_\eta - x_\xi|| \leq ||T_{n_k}(x_\eta - x_\xi)|| \leq M||x_\eta - x_\xi||. \tag{9.1}$$

Posons $\lambda_\theta = e^{i\theta}$ pour tout nombre réel θ. On déduit de (9.1) que

$$||x_\eta - x_\xi|| \geq \frac{\sup_{k\geq 0} \left| \lambda_{\eta-\xi}^{n_k} - 1 \right|}{M+1}.$$

On suppose maintenant qu'il existe un entier relatif ℓ tel que $\eta, \xi \in [2\ell\pi, 2(\ell+1)\pi[$ et que $\eta \neq \xi$. Dans ce cas, $\lambda_{\eta-\xi} \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ et on sait que $\sup_{k\geq 0} \left| \lambda_{\eta-\xi}^{n_k} - 1 \right| \geq \epsilon$ d'après l'hypothèse. On en déduit donc que

$$||x_\eta - x_\xi|| \geq \frac{\epsilon}{M+1}.$$

Comme l'espace X est séparable, l'ensemble $\sigma_p(A) \cap [2i\ell\pi, 2i(\ell+1)\pi[$ est au plus dénombrable. Par conséquent, l'ensemble

$$\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R} = \bigcup_{\ell \in \mathbb{Z}} \left(\sigma_p(A) \cap [2i\ell\pi, 2i(\ell+1)\pi[\right),$$

qui est une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, est au plus dénombrable. Finalement, la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison.

Montrons maintenant que (1) $\Rightarrow$ (3) en raisonnant par contraposée. D'après le Théorème 7.2.1, il suffit de montrer que s'il existe un sous-ensemble non dénombrable K de $\mathbb{T}$ tel que l'espace métrique $(K, d_{(n_k)})$ est séparable, alors la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison. On doit donc construire un espace de Banach complexe séparable X et un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés $(S_t)_{t\geq 0}$ sur X, de générateur infinitésimal A, borné par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ et tel que l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ soit non dénombrable. On considère l'espace

$$X = \left\{ f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} \,;\, ||f|| := \left(\int_0^{+\infty} \frac{|f(t)|^2}{1+t^2}\, dt \right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

et le semi-groupe de translation $(S_t)_{t\geq 0}$ sur X défini par

$$S_t f(x) = f(x+t) \qquad (f \in X,\ t, x \geq 0).$$

On introduit un nouvel espace en posant $X_* := \{f \in X\,;\, ||f||_* < +\infty\}$, où la norme $||\cdot||_*$ est définie par

$$||f||_* := \max\left(||f||, \sup_{j\geq 0} 4^{-(j+1)} \sup_{k_0,\dots,k_j\geq 0}\left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}(S_{n_{k_\ell}}-I)f\right|\right|\right),$$

où on a noté I l'opérateur identité sur l'espace X. On montre dans un premier temps que le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ est borné par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$. On construira ensuite un sous-espace séparable de X_* sur lequel le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ est fortement continu et pour lequel le générateur infinitésimal A est tel que l'ensemble $\sigma_p(A)\cap i\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

▷ **Le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ est borné par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$.**
Pour $f \in X_*$ et $k \in \mathbb{N}$, la norme $||S_{n_k}f||_*$ est égale au maximum entre les deux quantités

$$||S_{n_k}f|| \qquad \text{et} \qquad \sup_{j\geq 0} 4^{-(j+1)} \sup_{k_0,\dots,k_j\geq 0}\left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}(S_{n_{k_\ell}}-I)S_{n_k}f\right|\right|.$$

On estime ces deux quantités séparèment. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}||S_{n_k}f|| = ||f+(S_{n_k}-I)f|| &\leq ||f|| + ||(S_{n_k}-I)f||\\ &\leq ||f||_* + 4\cdot\frac{1}{4}||(S_{n_k}-I)f||\\ &\leq 5||f||_*.\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout entier $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $(j+1)$-uplet $(k_0,\dots,k_j) \in \mathbb{N}^{j+1}$, on a

$$\begin{aligned}4^{-(j+1)}\left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}(S_{n_{k_\ell}}-I)S_{n_k}f\right|\right| &\leq 4\cdot 4^{-(j+2)}\left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}(S_{n_{k_\ell}}-I)(S_{n_k}-I)f\right|\right|\\ &\quad + 4^{-(j+1)}\left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}(S_{n_{k_\ell}}-I)f\right|\right|.\end{aligned}$$

On en déduit donc que, pour tout entier naturel k,

$$||S_{n_k}f||_* \leq 4||f||_* + ||f||_* = 5||f||_*.$$

Autrement dit, la suite $(||S_{n_k}||_*)_{k\geq 0}$ est bornée et $\sup_{k\geq 0}||S_{n_k}||_* \leq 5$.

▷ **Valeurs propres du générateur infinitésimal.**
On note A le générateur infinitésimal associé au semi-groupe de translation $(S_t)_{t\geq 0}$ sur X_*. Pour tout nombre réel $\eta \in [0, 2\pi[$, on désigne par e_η la fonction définie par $e_\eta(x) = e^{i\eta x}$ $(x \in \mathbb{R})$. Remarquons que e_η est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $i\eta$. En effet, on a $S_t e_\eta = e^{i\eta t}e_\eta$ et donc

$$Ae_\eta = \lim_{t\to 0^+}\frac{S_t e_\eta - e_\eta}{t} = \left(\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{i\eta t}-1}{t}\right)e_\eta = i\eta e_\eta.$$

De plus, e_η appartient à l'espace X_* car $||e_\eta|| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et pour entier naturel j et tout $(j+1)$-uplet $(k_0, \ldots, k_j) \in \mathbb{N}^{j+1}$,

$$\left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}(S_{n_{k_\ell}} - I)e_\eta\right|\right| = \left(\prod_{\ell=0}^{j}\left|e^{i\eta n_{k_\ell}} - 1\right|\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leq 2^{j+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ce qui prouve que

$$||e_\eta||_* = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et donc en particulier que e_η appartient à l'espace X_*. Il nous reste encore à construire un sous-espace *séparable* de X_* sur lequel le générateur infinitésimal A est tel que l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ reste non dénombrable et sur lequel le semi-groupe de translation $(S_t)_{t\geq 0}$ est *fortement continu.*

$\triangleright$ **Rendre l'espace X_* séparable.**
A ce stade de la preuve, on utilise l'hypothèse. On sait qu'il existe un sous-ensemble non dénombrable K de $\mathbb{T}$ tel que l'espace métrique $(K, d_{(n_k)})$ est séparable. On considère l'ensemble non dénombrable

$$I_K := \left\{\eta \in [0, 2\pi[\, ; \, e^{i\eta} \in K\right\},$$

et on définit le sous-espace

$$X_*^K := \overline{\mathrm{vect}}^{||\cdot||_*}\left[e_\eta \, ; \, \eta \in I_K\right]$$

de X_*, muni de la norme $||\cdot||_*$. On peut considérer le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ sur cet espace (de générateur infinitésimal encore noté A) et l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$, qui contient I_K, est non dénombrable. De plus, le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ reste borné par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ (et $\sup_{k\geq 0} ||S_{n_k}||_* \leq 5$). La séparabilité de l'espace X_*^K est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 9.2.4. *Le champ de vecteurs propres $E : I_K \longrightarrow X_*$ défini par $E(\eta) = e_\eta$ est continu sur I_K.*

Démonstration. Soient $\eta, \xi \in [0, 2\pi[$. On doit estimer la quantité $||e_\eta - e_\xi||_*$ qui est égale à

$$\max\left(||e_\eta - e_\xi||, \sup_{j\geq 0} 4^{-(j+1)} \sup_{k_0,\ldots,k_j\geq 0}\left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}\left(e^{i\eta n_{k_\ell}} - 1\right)e_\eta - \prod_{\ell=0}^{j}\left(e^{i\xi n_{k_\ell}} - 1\right)e_\xi\right|\right|\right).$$

Pour tout entier naturel j et pour tout $(j+1)$-uplet $(k_0, \ldots, k_j) \in \mathbb{N}^{j+1}$, on a

$$\begin{aligned}\left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}\left(e^{i\eta n_{k_\ell}} - 1\right)e_\eta - \prod_{\ell=0}^{j}\left(e^{i\xi n_{k_\ell}} - 1\right)e_\xi\right|\right| &\leq ||e_\eta - e_\xi|| \prod_{\ell=0}^{j}\left|e^{i\eta n_{k_\ell}} - 1\right| \\ &\quad + ||e_\xi||\left|\prod_{\ell=0}^{j}\left(e^{i\eta n_{k_\ell}} - 1\right) - \prod_{\ell=0}^{j}\left(e^{i\xi n_{k_\ell}} - 1\right)\right|,\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}\big(e^{i\eta n_{k_\ell}}-1\big)e_\eta-\prod_{\ell=0}^{j}\big(e^{i\xi n_{k_\ell}}-1\big)e_\xi\right|\right|\leq 2^{j+1}||e_\eta-e_\xi|| \\ +\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left|\prod_{\ell=0}^{j}\big(e^{i\eta n_{k_\ell}}-1\big)-\prod_{\ell=0}^{j}\big(e^{i\xi n_{k_\ell}}-1\big)\right|. \qquad (9.2)$$

On souhaite estimer le terme (9.2). Pour cela, on introduit la quantité

$$d_j\big(e^{i\eta},e^{i\xi}\big)=\sup_{k_0,\dots,k_j\geq 0}\left|\prod_{\ell=0}^{j}\big(e^{i\eta n_{k_\ell}}-1\big)-\prod_{\ell=0}^{j}\big(e^{i\xi n_{k_\ell}}-1\big)\right|.$$

L'identité

$$\prod_{\ell=0}^{j}\big(e^{i\eta n_{k_\ell}}-1\big)-\prod_{\ell=0}^{j}\big(e^{i\xi n_{k_\ell}}-1\big)=\big(e^{i\eta n_{k_0}}-e^{i\xi t_{k_0}}\big)\prod_{\ell=1}^{j}\big(e^{i\eta n_{k_\ell}}-1\big) \\ +\big(e^{i\xi n_{k_0}}-1\big)\left(\prod_{\ell=1}^{j}\big(e^{i\eta n_{k_\ell}}-1\big)-\prod_{\ell=1}^{j}\big(e^{i\xi n_{k_\ell}}-1\big)\right)$$

fournit alors l'estimation

$$d_j\big(e^{i\eta},e^{i\xi}\big)\leq 2^j d_{(n_k)}\big(e^{i\eta},e^{i\xi}\big)+2d_{j-1}\big(e^{i\eta},e^{i\xi}\big).$$

Une récurrence immédiate permet de conclure que, pour tout entier naturel j,

$$d_j\big(e^{i\eta},e^{i\xi}\big)\leq (j+1)2^j d_{(n_k)}\big(e^{i\eta},e^{i\xi}\big).$$

On déduit alors de ces estimations que

$$||e_\eta-e_\xi||_*\leq\max\left(||e_\eta-e_\xi||,\sup_{j\geq 0}\left(2^{-(j+1)}||e_\eta-e_\xi||+\sqrt{\frac{\pi}{2}}(j+1)2^{-(j+2)}d_{(n_k)}\big(e^{i\eta},e^{i\xi}\big)\right)\right),$$

ce qui entraîne l'existence d'une constante $C>0$ telle que pour tous $\eta,\xi\in[0,2\pi[$, on ait

$$||e_\eta-e_\xi||_*\leq C\big(||e_\eta-e_\xi||+d_{(n_k)}\big(e^{i\eta},e^{i\xi}\big)\big).$$

Soit maintenant $\epsilon>0$. Il existe un nombre réel $A_\epsilon>0$ tel que

$$\int_{A_\epsilon}^{+\infty}\frac{\big|e_\eta(t)-e_\xi(t)\big|^2}{1+t^2}\,dt\leq\int_{A_\epsilon}^{+\infty}\frac{4}{1+t^2}\,dt\leq\epsilon^2$$

et donc

$$||e_\eta-e_\xi||_*\leq C\left(\left(\int_0^{A_\epsilon}\frac{\big|e^{i\eta t}-e^{i\xi t}\big|^2}{1+t^2}\,dt\right)^{1/2}+d_{(n_k)}\big(e^{i\eta},e^{i\xi}\big)+\epsilon\right),$$

ce qui prouve que le champ de vecteurs propres $E:\eta\longmapsto e_\eta$ est continu sur I_K. $\square$

On en déduit donc que l'espace $(X_*^K, ||\cdot||_*)$ est séparable. Dans une dernière étape, on montre que le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ est fortement continu sur l'espace X_*^K.

$\triangleright$ **Le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ est fortement continu sur X_*^K.**
On doit vérifier que pour tout élément f de X_*^K, on a $\lim_{x\to 0^+} ||S_x f - f||_* = 0$. Remarquons d'abord que c'est le cas pour les éléments de la forme e_η ($\eta \in I_K$). En effet, d'une part

$$\begin{aligned} ||S_x e_\eta - e_\eta||^2 &= \int_0^{+\infty} \frac{\left|e^{i\eta x}\cdot e^{i\eta t} - e^{i\eta t}\right|^2}{1+t^2}\,dt \\ &= \frac{\pi}{2}\left|1 - e^{i\eta x}\right|^2 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

et d'autre part, pour tout entier naturel j et pour tout $(j+1)$-uplet $(k_0,\ldots,k_j) \in \mathbb{N}^{j+1}$,

$$\begin{aligned} \left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}(S_{n_{k_\ell}} - I)(S_x - I)e_\eta\right|\right| &= \left|\left|\left(e^{i\eta x} - 1\right)\left(\prod_{\ell=0}^{j}\left(e^{i\eta n_{k_\ell}} - 1\right)\right)e_\eta\right|\right| \\ &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}2^{j+1}\left|e^{i\eta x} - 1\right|, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\sup_{j\geq 0} 4^{-(j+1)} \sup_{k_0,\ldots,k_j\geq 0} \left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}(S_{n_{k_\ell}} - I)(S_x - I)e_\eta\right|\right| \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

et donc $||S_x e_\eta - e_\eta||_*$ converge vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Ensuite, on remarque que la famille $\left\{||S_x||_*\,;\, 0 \leq x \leq 1\right\}$ est bornée. En effet, si $x \in [0,1]$ et $f \in X_*^K$, on a d'une part

$$||S_x f||^2 = \int_0^{+\infty} \frac{|f(t+x)|^2}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{|f(t+x)|^2}{1+(t+x)^2}\cdot\frac{1+(t+x)^2}{1+t^2}\,dt \leq 3||f||^2$$

et d'autre part, pour tout entier naturel j et pour tout $(j+1)$-uplet $(k_0,\ldots,k_j) \in \mathbb{N}^{j+1}$,

$$\left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}(S_{n_{k_\ell}} - I)S_x f\right|\right| = \left|\left|S_x\left(\prod_{\ell=0}^{j}(S_{n_{k_\ell}} - I)f\right)\right|\right| \leq \sqrt{3}\left|\left|\prod_{\ell=0}^{j}(S_{n_{k_\ell}} - I)f\right|\right|,$$

ce qui montre finalement que $||S_x||_* \leq \sqrt{3}$ pour tout $x \in [0,1]$. Pour montrer que le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ est fortement continu, on utilise un argument de densité et les remarques précédentes : étant donnés $\epsilon > 0$ et $f \in X_*^K$, il existe une combinaison linéaire finie des vecteurs e_η, notée f_ϵ telle que $||f - f_\epsilon||_* \leq \epsilon$. Pour tout nombre réel $x \in [0,1]$, on a alors

$$\begin{aligned} ||S_x f - f||_* &= ||S_x(f - f_\epsilon) + (S_x f_\epsilon - f_\epsilon) - (f - f_\epsilon)||_* \\ &\leq (\sqrt{3}+1)\epsilon + ||S_x f_\epsilon - f_\epsilon||_*. \end{aligned}$$

Or on a vu que $||S_x f_\epsilon - f_\epsilon||_*$ converge vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et donc

$$||S_x f - f||_* \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Autrement dit, le semi-groupe $(S_t)_{t\geq 0}$ est fortement continu sur l'espace X_*^K, ce qui conclut la preuve du Théorème 9.2.3. □

Remarque 9.2.5. Pour démontrer le Théorème 9.2.2, nous pouvons aussi écrire une preuve directe (sans passer par les suites d'entiers) comme l'ont fait C. Badea et S. Grivaux [1] pour démontrer leur théorème caractérisant les suites de Jamison. La raison pour laquelle nous préférons passer des suites de nombres réels aux suites d'entiers est que cette méthode permet de faire le lien entre les suites de Jamison et les suites $\mathbb{R}_+$-Jamison. C'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant (Théorème 9.2.9).

En combinant les Théorèmes 7.2.1 et 9.2.3, on peut démontrer la caractérisation des suites $\mathbb{R}_+$-Jamison (Théorème 9.2.2).

9.2.2 Lien avec les suites réelles $\mathbb{R}_+$-Jamison

On se donne une suite de nombres réels $(t_k)_{k\geq 0}$ strictement croissante telle que $t_0 = 1$ et $t_k \longrightarrow +\infty$. Pour tout entier naturel k, on notera n_k la partie entière de t_k. En particulier, $n_0 = 1$. On commence par prouver le fait suivant.

Fait 9.2.6. *Si $(T_t)_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach X tel que* $\sup_{k\geq 0} ||T_{n_k}|| < +\infty$*, alors* $\sup_{k\geq 0} ||T_{t_k}|| < +\infty$.

Démonstration. La preuve est une conséquence immédiate du fait que la famille $\{T_s\,;\, s \in [0,1]\}$ est bornée. En effet, pour tout entier naturel k, on a $t_k = n_k + \{t_k\}$ (où $\{\cdot\}$ désigne la fonction partie fractionnaire). En utilisant la propriété de multiplicativité du semi-groupe, on obtient :

$$||T_{t_k}|| = \big|\big|T_{n_k} T_{\{t_k\}}\big|\big| \leq ||T_{n_k}||\, \big|\big|T_{\{t_k\}}\big|\big| \leq \Big(\sup_{0\leq s\leq 1} ||T_s||\Big) ||T_{n_k}||$$

et le résultat découle de l'hypothèse. □

La caractérisation des suites $\mathbb{R}_+$-Jamison (Théorème 9.2.2) est alors une conséquence des deux lemmes suivants.

Lemme 9.2.7. (1) *Si $(t_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison, alors $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison.*
(2) *Si $\big(1, (n_k + 1)_{k\geq 0}\big)$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison, alors $(t_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison.*

Démonstration. On commence par montrer (1). Supposons que la suite $(t_k)_{k\geq 0}$ soit une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison et soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe (de générateur infinitésimal noté A) d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach complexe séparable X tel que

$\sup_{k\geq 0}||T_{n_k}|| < +\infty$. D'après le Fait 9.2.6, on a aussi $\sup_{k\geq 0}||T_{t_k}|| < +\infty$. Comme $(t_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison, l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ est au plus dénombrable, ce qui montre que la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison. La propriété (2) se démontre de la même manière : on suppose que $\big(1, (n_k + 1)_{k\geq 0}\big)$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison et on considère un C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ (de générateur infinitésimal noté A) d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach complexe séparable X tel que $\sup_{k\geq 0}||T_{t_k}|| < +\infty$. Par définition de n_k, on peut écrire $n_k + 1 = t_k + \epsilon_k$, où $\epsilon_k \in]0, 1]$. En utilisant la preuve du Fait 9.2.6, on voit facilement que $\sup_{k\geq 0}||T_{n_k+1}|| < +\infty$. Comme $\big(1, (n_k + 1)_{k\geq 0}\big)$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison, on en déduit que l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ est au plus dénombrable, ce qui montre que la suite $(t_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison. □

Le deuxième lemme fait le lien entre les suites $(n_k)_{k\geq 0}$ et $\big(1, (n_k + 1)_{k\geq 0}\big)$ du point de vue des suites de Jamison.

Lemme 9.2.8. *La suite $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite de Jamison si et seulement si la suite $\big(1, (n_k + 1)_{k\geq 0}\big)$ est une suite de Jamison.*

Démonstration. On suppose que $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite de Jamison. D'après le Théorème 7.2.1, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, on ait $\sup_{k\geq 0}\big|\lambda^{n_k} - 1\big| \geq \epsilon$. Soit $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ tel que $\big|\lambda - 1\big| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Pour tout entier naturel k, on a

$$\big|\lambda^{n_k+1} - 1\big| = \big|\lambda\big(\lambda^{n_k} - 1\big) + \lambda - 1\big| \geq \big|\lambda^{n_k} - 1\big| - \frac{\epsilon}{2}$$

et donc

$$\sup_{k\geq 0}\big|\lambda^{n_k+1} - 1\big| \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

On en déduit alors que pour tout $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$,

$$\max\left(\big|\lambda - 1\big|, \sup_{k\geq 0}\big|\lambda^{n_k+1} - 1\big|\right) \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

D'après le Théorème 7.2.1, la suite $\big(1, (n_k + 1)_{k\geq 0}\big)$ est une suite de Jamison. Inversement, supposons que la suite $\big(1, (n_k + 1)_{k\geq 0}\big)$ soit une suite de Jamison. Il est facile de voir que tout opérateur borné sur un espace de Banach qui est à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ est aussi à puissances bornées par rapport à la suite $\big(1, (n_k + 1)_{k\geq 0}\big)$, ce qui montre que $(n_k)_{k\geq 0}$ est aussi une suite de Jamison. □

En combinant les Théorèmes 7.2.1 et 9.2.3 et les Lemmes 9.2.7 et 9.2.8, on obtient le résultat suivant.

Théorème 9.2.9. *Soit $(t_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement croissante telle que $t_0 = 1$ et $t_k \longrightarrow +\infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) la suite $(t_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison ;
(2) la suite $(\lfloor t_k \rfloor)_{k\geq 0}$ est une suite de Jamison ;
(3) il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, on ait $\sup_{k\geq 0}\big|\lambda^{\lfloor t_k \rfloor} - 1\big| \geq \epsilon$.

Démonstration. L'équivalence entre les assertions (2) et (3) est le contenu du Théorème 7.2.1. Ensuite, si $(t_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison, alors en appliquant consécutivement le Lemme 9.2.7 et le Théorème 9.2.3, on trouve que $(\lfloor t_k \rfloor)_{k\geq 0}$ est une suite de Jamison, ce qui prouve l'implication (1) $\Rightarrow$ (2). Inversement, si $(\lfloor t_k \rfloor)_{k\geq 0}$ est une suite de Jamison, alors $\big(1, (\lfloor t_k \rfloor + 1)_{k\geq 0}\big)$ est une suite de Jamison d'après le Lemme 9.2.8. En appliquant maintenant le Théorème 9.2.3 à la suite $\big(1, (\lfloor t_k \rfloor + 1)_{k\geq 0}\big)$, on voit que cette suite est $\mathbb{R}_+$-Jamison. Il ne reste plus qu'à appliquer le Lemme 9.2.7 qui nous dit que la suite $(t_k)_{k\geq 0}$ est $\mathbb{R}_+$-Jamison, ce qui montre que (2) $\Rightarrow$ (1). $\square$

Le Théorème 9.2.2 est alors une conséquence du Théorème 9.2.9 et de la proposition suivante.

Proposition 9.2.10. *Soit $(t_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement croissante telle que $t_0 = 1$ et $t_k \longrightarrow +\infty$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, on ait $\sup_{k\geq 0} \big|\lambda^{\lfloor t_k \rfloor} - 1\big| \geq \epsilon$;
(ii) il existe $\epsilon' > 0$ tel que pour tout $\theta \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, on ait $\sup_{k\geq 0} ||t_k\theta|| \geq \epsilon'$.

Démonstration. Supposons que (i) ne soit pas vérifiée et soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ tel que pour tout entier naturel k, $\big|\lambda^{\lfloor t_k \rfloor} - 1\big| \leq \frac{C_2\epsilon}{2}$ (où la constante C_2 est celle de la Proposition 9.2.1). On peut écrire $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ avec $\theta \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. Pour tout entier naturel k, on a alors

$$||\lfloor t_k \rfloor \theta|| \leq \frac{\big|\lambda^{\lfloor t_k \rfloor} - 1\big|}{C_2} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

En particulier, pour $k = 0$, on obtient $0 < \theta \leq \epsilon/2$ (puisque $t_0 = 1$). Maintenant, en notant $\{r\}$ la partie fractionnaire d'un nombre réel r (c'est-à-dire $\{r\} = r - \lfloor r \rfloor$), on peut écrire que $t_k\theta = \lfloor t_k \rfloor \theta + \{t_k\}\theta$. Par conséquent,

$$||t_k\theta|| \leq ||\lfloor t_k \rfloor \theta|| + ||\{t_k\}\theta|| \leq ||\lfloor t_k \rfloor \theta|| + \theta \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ce qui contredit l'assertion (ii). L'autre implication se démontre en utilisant exactement la même méthode. $\square$

9.3 Espaces Jamison universels pour les C_0-semi-groupes

Les résultats démontrés dans le chapitre 8 s'adaptent facilement au cadre des semi-groupes fortement continus. On commence par introduire la terminologie dans le contexte des semi-groupes.

Définition 9.3.1. Soit X un espace de Banach complexe séparable. Une suite de nombres réels positifs strictement croissante (qui tend vers $+\infty$) est dite *X-Jamison pour les semi-groupes fortement continus* si pour tout C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X (de générateur infinitésimal A) borné par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$, l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.

On peut définir la notion d'*espace* $\mathbb{R}_+$-*Jamison universel.*

Définition 9.3.2. Un espace de Banach complexe séparable X est un *espace* $\mathbb{R}_+$-*Jamison universel* si toute suite X-Jamison pour les semi-groupes fortement continus est une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison.

On dispose alors de l'analogue du Théorème 8.3.1 pour les semi-groupes.

Théorème 9.3.3. *Soit X un espace de Banach complexe séparable admettant une décomposition de Schauder inconditionnelle. Alors X est un espace $\mathbb{R}_+$-Jamison universel.*

Démonstration. On se donne une suite $(t_k)_{k\geq 0}$ de nombres réels positifs strictement croissante (telle que $t_0 = 1$ et $t_k \longrightarrow +\infty$) qui n'est pas une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison. On veut construire un C_0-semi-groupe (de générateur infinitésimal A) d'opérateur linéaires bornés sur l'espace X tel que l'ensemble $\sigma_p(A)\cap i\mathbb{R}$ ne soit pas dénombrable. On note n_k la partie entière de t_k pour tout entier naturel k (en particulier $n_0 = 1$). Comme $(t_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite $\mathbb{R}_+$-Jamison, la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite de Jamison (d'après le Théorème 9.2.9). On considère ici l'opérateur $T = D+B$ construit dans la preuve du Théorème 8.3.1 : cet opérateur est à puissances bornées par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ et son spectre ponctuel unimodulaire est non dénombrable. Dans cette preuve, on peut choisir λ_1 proche du point 1 sur $\mathbb{T}$ (par exemple tel que $|\lambda_1 - 1| = \frac{1}{3}$) puis on prend les λ_n deux à deux distincts dans l'arc délimité par les points 1 et λ_1. On a $\sigma(D) = \overline{\{\lambda_n\,;\, n\geq 1\}}$ et en prenant λ_n suffisamment proche de $\lambda_{j(n)}$, on peut s'arranger pour que $||B|| < \frac{1}{3}$, ce qui entraîne que $\sigma(T)\subset\sigma(D)_{1/3}$, où

$$K_\epsilon := \{z\in\mathbb{C}\,;\,\mathrm{dist}(z,K)<\epsilon\}$$

désigne le ϵ-dilaté du sous-ensemble K du plan complexe. En particulier, l'ensemble $\sigma(T)$ est contenu dans le demi plan $\mathcal{P}_{1/2} := \{z\in\mathbb{C}\,;\,\mathfrak{Re}\, z > \frac{1}{2}\}$. Comme la détermination principale du logarithme complexe est holomorphe sur ce domaine, le calcul fonctionnel holomorphe nous permet de considérer l'opérateur $\operatorname{Log} T\in\mathcal{B}(X)$. Le semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ de générateur infinitésimal $\operatorname{Log} T$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs linéaires bornés sur X et

$$\text{pour tout } t\geq 0,\qquad T_t = e^{t\operatorname{Log} T}.$$

Comme pour tout $z\in\mathcal{P}_{1/2}$, on a l'égalité $e^{n\operatorname{Log} z} = z^n$, on en déduit que pour tout entier naturel k, $T_{n_k} = T^{n_k}$. D'après le Fait 9.2.6, le semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est borné par rapport à la suite $(t_k)_{k\geq 0}$. De plus, comme

$$\sigma_p(T)\cap\mathbb{T} = \sigma_p(T_1)\cap\mathbb{T} = \exp(\sigma_p(\operatorname{Log} T)\cap i\mathbb{R}),$$

l'ensemble $\sigma_p(\operatorname{Log} T)\cap i\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. $\square$

9.4 Dimension de Hausdorff de $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$

Comme dans le cadre discret (chapitre 7), Ransford et Roginskaya [30] ont montré que si un C_0-semi-groupe (de générateur infinitésimal A) d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach complexe séparable était borné par rapport à une suite de nombres réels positifs strictement croissante (qui tend vers $+\infty$), alors l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle ([30, Théorème 4.1]). Il est donc naturel de s'intéresser à la dimension de Hausdorff de l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$. On a aussi un analogue du Théorème 7.4.1 pour les semi-groupes avec un contrôle de la dimension de Hausdorff de l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ (voir [30, Théorème 4.1]). L'objectif est de démontrer l'analogue du Théorème 7.4.3 dans le cadre des semi-groupes. On reprend ici les idées de la preuve de [1, Théorème 3.4]. On commence par démonter le résultat suivant.

Théorème 9.4.1. *Soient $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante telle que $n_0 = 1$ et $\mathcal{S}$ une famille de parties de $\mathbb{T}$ telle que tout sous-ensemble d'un élément de $\mathcal{S}$ est un élément de $\mathcal{S}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) pour tout espace de Banach complexe séparable et pour tout C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X borné par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$, l'ensemble $\sigma_p(T_1) \cap \mathbb{T}$ appartient à $\mathcal{S}$;
(2) pour tout sous-ensemble K de $\mathbb{T}$ n'appartenant pas à $\mathcal{S}$, l'espace métrique $(K, d_{(n_k)})$ n'est pas séparable ;
(3) pour tout sous-ensemble K de $\mathbb{T}$ n'appartenant pas à $\mathcal{S}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que K contienne une famille non dénombrable et ϵ-séparée pour la distance $d_{(n_k)}$.

Démonstration. Les assertions (2) et (3) sont clairement équivalentes. Montrons que (3) $\Rightarrow$ (1). Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach complexe séparable X tel que $M := \sup_{k\geq 0} ||T_{n_k}|| < +\infty$ et supposons que l'ensemble $\sigma_p(T_1) \cap \mathbb{T}$ n'appartienne pas à $\mathcal{S}$. D'après (3), il existe $\epsilon > 0$ tel que l'ensemble $\sigma_p(T_1) \cap \mathbb{T}$ contienne une famille non dénombrable et ϵ-séparée pour la distance $d_{(n_k)}$. Soient λ et μ deux valeurs propres unimodulaires distinctes de T_1 et e_λ, e_μ des vecteurs propres de norme 1 associées à ces valeurs propres. Le même raisonnement que dans la preuve du Théorème 9.2.3 fournit :

$$||e_\lambda - e_\mu|| \geq \frac{d_{(n_k)}(\lambda, \mu)}{M+1} \geq \frac{\epsilon}{M+1},$$

ce qui contredit la séparabilité de X. La preuve de (1) $\Rightarrow$ (2) est la même que dans la preuve du Théorème 9.2.3. Si (2) n'est pas vérifiée, alors on peut trouver un sous-ensemble K de $\mathbb{T}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{S}$ tel que l'espace métrique $(K, d_{(n_k)})$ est séparable. Si on recopie la preuve du Théorème 9.2.3, on trouve que le spectre ponctuel unimodulaire de l'opérateur S_1 contient l'ensemble K, ce qui montre que (1) n'est pas satisfaite d'après la propriété de l'ensemble $\mathcal{S}$. $\square$

Si $\mathcal{S}$ désigne les sous-ensembles de $\mathbb{T}$ dont la dimension de Hausdorff est strictement inférieure à 1, le Théorème 9.4.1 conduit au résultat suivant.

Corollaire 9.4.2. *Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante telle que $n_0 = 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) il existe un espace de Banach complexe séparable X et un C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X borné par rapport à la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ et tel que l'ensemble $\sigma_p(T_1) \cap \mathbb{T}$ soit de dimension de Hausdorff égale à 1 ;
(2) il existe un sous-ensemble K de $\mathbb{T}$ de dimension de Hausdorff égale à 1 tel que l'espace métrique $(K, d_{(n_k)})$ soit séparable.

L'existence d'un sous-ensemble K de $\mathbb{T}$ de dimension de Hausdorff égale à 1 tel que l'espace métrique $(K, d_{(n_k)})$ soit séparable a déjà été prouvée dans [1] lorsque la suite $\frac{n_{k+1}}{n_k}$ tend vers $+\infty$ (voir la preuve de [1, Théorème 3.4]).

Théorème 9.4.3. *Soit $(t_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels strictement croissante telle que $t_0 = 1$ et $\frac{t_{k+1}}{t_k} \longrightarrow +\infty$. Il existe un espace de Banach complexe séparable X et un C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X borné par rapport à la suite $(t_k)_{k\geq 0}$ tel que l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ soit de dimension de Hausdorff égale à 1.*

Démonstration. Pour tout entier naturel k on note n_k la partie entière de t_k. Comme $\frac{t_{k+1}}{t_k} \longrightarrow +\infty$, on a $\frac{n_{k+1}}{n_k} \longrightarrow +\infty$ et $n_0 = 1$. Or, d'après la preuve de [1, Théorème 3.4], il existe un sous-ensemble K de $\mathbb{T}$ avec $\dim_H(K) = 1$ et tel que l'espace métrique (K, d_{n_k}) soit séparable. On déduit alors du Corollaire 9.4.2 qu'il existe un espace de Banach complexe séparable X et un C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur X (de générateur infinitésimal A) borné par rapport à la suite d'entiers $(n_k)_{k\geq 0}$ tel que $\dim_H(\sigma_p(T_1) \cap \mathbb{T}) = 1$. D'après le Fait 9.2.6, le semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ est aussi borné par rapport à la suite $(t_k)_{k\geq 0}$. Par ailleurs, on sait qu'une fonction lipschitzienne diminue la dimension de Hausdorff. Or, si $f : i\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ désigne la fonction exponentielle, alors on a l'égalité $\sigma_p(T_1) \cap \mathbb{T} = f(\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R})$ et la fonction f est lipschitzienne. On en déduit alors que

$$1 = \dim_H(\sigma_p(T_1) \cap \mathbb{T}) \leq \dim_H(\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}) \leq 1.$$

Finalement, la dimension de Hausdorff de l'ensemble $\sigma_p(A) \cap i\mathbb{R}$ est égale à 1. □

Chapitre 10

Suites G-Jamison

Nous souhaitons maintenant généraliser l'étude des suites de Jamison pour des suites $(g_k)_{k\geq 0}$ appartenant à un groupe (ou à un semi-groupe) G quelconque. On étudie le problème suivant. On se donne un groupe (ou un semi-groupe) G et $(g_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de G et on suppose que pour tout espace de Banach complexe séparable X (de dimension infinie) et pour tout morphisme de groupes (ou de semi-groupes) $\rho : G \longrightarrow \mathcal{GL}(X)$ continu, on a $\sup_{k\geq 0} ||\rho(g_k)|| < +\infty$. Que peut-on dire de l'ensemble des *valeurs propres unimodulaires* (Définition 10.1.1) de la représentation ρ ? A quelle condition (portant sur la suite $(g_k)_{k\geq 0}$) cet ensemble de valeurs propres est-il au plus dénombrable ? Les suites $(g_k)_{k\geq 0}$ pour lesquelles l'ensemble des valeurs propres unimodulaires de $\rho : G \longrightarrow \mathcal{GL}(X)$ est au plus dénombrable (où ρ est telle que $\sup_{k\geq 0} ||\rho(g_k)|| < +\infty$) seront appelées les suites G-Jamison (Définition 10.1.3) par analogie avec les suites $\mathbb{R}_+$-Jamison pour les semi-groupes fortement continus d'opérateurs du chapitre 9.

10.1 Définitions générales

Même si les définitions suivantes se transposent aisément au cadre des semi-groupes (c'est-à-dire aux ensembles munis d'une loi de composition interne associative qui est régulière et qui possède un élément neutre), nous allons nous restreindre dans la suite au cas des groupes (abéliens) G. Dans un premier temps, nous devons définir précisément les objets avec lesquels nous allons travailler. Etant donné un groupe G, on appellera *représentation* de G tout morphisme de groupes $\rho : G \longrightarrow \mathcal{GL}(X)$ continu, où X est un espace de Banach séparable de dimension infinie. On rappelle qu'un *caractère* du groupe G est un morphisme de groupes $\chi : G \longrightarrow \mathbb{T}$ continu. Dans la suite, on notera $\hat{G}$ l'ensemble des caractères du groupe G et $\mathbf{1}$ le caractère unité de G, c'est-à-dire le morphisme $g \longmapsto 1_G$ (où 1_G désigne l'élément neutre de G). Les caractères permettent de définir la notion de *valeur propre unimodulaire d'une représentation.*

Définition 10.1.1. Soient G un groupe, X un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie et $\rho : G \longrightarrow \mathcal{GL}(X)$ une représentation de G. Un caractère $\chi : G \longrightarrow \mathbb{T}$

est appelé *une valeur propre unimodulaire de* ρ s'il existe un vecteur non nul e_χ de X tel que pour tout $g \in G$, e_χ est un vecteur propre de l'opérateur $\rho(g) \in \mathcal{GL}(X)$ associé à la valeur propre $\chi(g)$, c'est-à dire : pour tout $g \in G$,

$$\rho(g)e_\chi = \chi(g)e_\chi.$$

L'ensemble des valeurs propres unimodulaires de ρ (encore appelé *spectre ponctuel unimodulaire* de ρ) est noté $\sigma_p(\rho) \cap \mathbb{T}^G$.

La définition précédente généralise la notion usuelle de valeur propre pour un opérateur.

Exemple 10.1.2. (le groupe $\mathbb{Z}$ ou le semi-groupe $\mathbb{N}$)
Comme le groupe $\mathbb{Z}$ est monogène (engendré par l'élément 1), une représentation de $\mathbb{Z}$ est uniquement déterminée par la donnée d'un espace de Banach complexe séparable (de dimension infinie) et d'un opérateur $T \in \mathcal{GL}(X)$ inversible. On sait que les caractères du groupe $\mathbb{Z}$ sont les morphismes de la forme

$$\begin{aligned} \chi_\lambda : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{T} \\ n &\longmapsto \lambda^n \end{aligned} \tag{10.1}$$

où $\lambda \in \mathbb{T}$. Il est alors clair qu'un caractère χ_λ est une valeur propre d'une représentation $\rho_T : n \longmapsto T^n$ de $\mathbb{Z}$ (au sens de la Définition 10.1.1) si et seulement si λ est une valeur propre de l'opérateur T. En transposant les définitions précédentes au cadre d'un semi-groupe G, on voit de la même manière que les représentations du semi-groupe $\mathbb{N}$ sont uniquement déterminées par les opérateurs $T \in \mathcal{B}(X)$ et que les caractères sont les morphismes (10.1) (avec pour ensemble de définition l'ensemble $\mathbb{N}$). Par conséquent, un caractère χ_λ est une valeur propre d'une représentation ρ_T de $\mathbb{N}$ si et seulement si λ est une valeur propre de T.

On peut maintenant définir l'analogue des suites de Jamison dans le cadre des groupes généraux (ou, par extension, aux semi-groupes).

Définition 10.1.3. Soient G un groupe et $(g_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de G. On dit que $(g_k)_{k\geq 0}$ est une *suite G-Jamison* si pour tout espace de Banach complexe séparable X (de dimension infinie) et pour toute représentation $\rho : G \longrightarrow \mathcal{GL}(X)$, l'ensemble $\sigma_p(\rho) \cap \mathbb{T}^G$ est au plus dénombrable dès que $\sup_{k\geq 0} ||\rho(g_k)|| < +\infty$.

On aurait pu énoncer la définition précédente dans le cadre des semi-groupes. Avec cette nouvelle définition, on voit que la notion de suite $\mathbb{N}$-Jamison correspond à la notion de suite de Jamison (au sens de la Définition 7.1.4) tandis que la notion de suite $\mathbb{R}_+$-Jamison coincide avec celle introduite dans la Définition 9.1.4. Dans la suite, nous voulons étudier les propriétés des suites G-Jamison et plus précisément, nous cherchons à donner une caractérisation de ces suites dans le prolongement des caratérisations déjà connues pour les suites $\mathbb{N}$-Jamison ou $\mathbb{R}_+$-Jamison (Théorème 7.2.1 et Théorème 9.2.2). Dans un premier temps, on peut donner une condition suffisante pour qu'une suite $(g_k)_{k\geq 0}$ d'un groupe G soit une suite G-Jamison.

10.2 Une condition suffisante

La condition que nous allons considérer est la même que celles concernant les suites $\mathbb{N}$-Jamison ou les suites $\mathbb{R}_+$-Jamison.

Proposition 10.2.1. *Soient G un groupe et $(g_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de G. On suppose qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout caractère χ de $\hat{G} \setminus \{\mathbf{1}\}$, on ait $\sup_{k\geq 0} |\chi(g_k) - 1| \geq \epsilon$. Alors la suite $(g_k)_{k\geq 0}$ est une suite G-Jamison.*

Démonstration. Soient X un espace de Banach complexe séparable et $\rho : G \longrightarrow \mathcal{GL}(X)$ une représentation de G. On suppose que $\sup_{k\geq 0} ||\rho(g_k)|| < +\infty$ et on veut monter que l'ensemble $\sigma_p(\rho) \cap \mathbb{T}^G$ est au plus dénombrable. Soient χ et χ' deux valeurs propres unimodulaires de ρ. Il existe alors des vecteurs non nuls e_χ et $e_{\chi'}$ de X de normes 1 tels que pour tout $g \in G$, on ait

$$\begin{cases} \rho(g)e_\chi = \chi(g)e_\chi \\ \rho(g)e_{\chi'} = \chi'(g)e_{\chi'}. \end{cases}$$

Comme $|\chi(g)| = |\chi'(g)| = 1$ pour tout $g \in G$, on déduit de l'inégalité triangulaire que pour tout entier naturel k,

$$|\chi(g_k) - \chi'(g_k)| - ||e_\chi - e_{\chi'}|| \leq ||\rho(g_k)(e_\chi - e_{\chi'})|| \leq M||e_\chi - e_{\chi'}|| \tag{10.2}$$

où on a noté $M := \sup_{k\geq 0} ||\rho(g_k)||$. Par hypothèse, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\phi \in \hat{G} \setminus \{\mathbf{1}\}$, on ait $\sup_{k\geq 0} |\phi(g_k) - 1| \geq \epsilon$. Maintenant comme $\chi \neq \chi'$, le caractère $\chi'\chi^{-1}$ est différent du caractère unité $\mathbf{1}$ et donc d'après (10.2), on a

$$||e_\chi - e_{\chi'}|| \geq \frac{\sup_{k\geq 0} |(\chi'\chi^{-1})(g_k) - 1|}{M+1} \geq \frac{\epsilon}{M+1}.$$

Ceci montre que les vecteurs propres (de norme 1) de ρ associés à des valeurs propres unimodulaires distinctes sont toujours ϵ-séparés. Or X est un espace de Banach séparable donc l'ensemble $\sigma_p(\rho) \cap \mathbb{T}^G$ est au plus dénombrable. $\square$

Nous n'avons pas obtenu de caractérisation générale des suites G-Jamison lorsque G est un groupe abélien général. Néanmoins, nous donnons une caractérisation des suites G-Jamison lorsque G est un groupe abélien de type fini.

10.3 Les groupes $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$

On rappelle que C. Badea et S. Grivaux ont donné une caractérisation des suites de Jamison, c'est-à dire des suites $\mathbb{N}$-Jamison (Théorème 7.2.1) et dans le chapitre 9 nous en avons déduit la caractérisation des suites $\mathbb{R}_+$-Jamison (Théorème 9.2.2). En réécrivant les preuves de ces deux résultats (voir [1, Théorème 2.8] pour les suites de Jamison), on voit facilement que les raisonnements se transposent aux groupes $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ et que les caractérisations des suites G-Jamison pour ces deux groupes sont les mêmes que pour les semi-groupes $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}_+$ associés. Plus précisément, on a les théorèmes suivants.

Théorème 10.3.1. *Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers relatifs telle que $n_0 = 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{Z}$-Jamison ;*
(2) *il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, on ait $\sup_{k\geq 0} |\lambda^{n_k} - 1| \geq \epsilon$.*

Pour le groupe $G = \mathbb{R}$, on est dans le cadre des groupes d'opérateurs fortement continus $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur les espaces de Banach. Rappelons que la fonction distance aux entiers $||\cdot||$ est définie par $||\theta|| = \inf\big\{|\theta - n|\,;\, n \in \mathbb{Z}\big\}$ pour tout nombre réel θ. La caractérisation des suites $\mathbb{R}$-Jamison est la suivante.

Théorème 10.3.2. *Soit $(t_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que $t_0 = 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *la suite $(t_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{R}$-Jamison ;*
(2) *il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\theta \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, on ait $\sup_{k\geq 0} ||t_k\theta|| \geq \epsilon$.*

Dans la suite, on caractérise les suites G-Jamison lorque G est un groupe abélien *de type fini* (c'est-à-dire engendré par un nombre fini d'éléments). On sait que les groupes abéliens de type fini peuvent être classifiés à isomorphisme près : un tel groupe est produit d'un nombre fini de groupes monogènes. Plus précisément, si G est un groupe abélien de type fini, alors il existe un unique entier ℓ et un unique r-uplet d'entiers $(a_1, \ldots, a_r)$ supérieurs ou égaux à 2 pour lesquels on a l'isomorphisme

$$G \simeq \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$$

avec la condition supplémentaire que a_{i+1} divise a_i pour tout $i \in \{1, \ldots, r-1\}$. Nous verrons dans la suite que caractériser les suites G-Jamison pour un tel groupe G revient à caractériser les suites $\mathbb{Z}^\ell$-Jamison. On commence donc par traiter le cas où le groupe G est sans torsion, c'est-à-dire pour $G = \mathbb{Z}^\ell$.

10.4 Cas du groupe $\mathbb{Z}^\ell$

Dans un premier temps, on caractérise les suites $\mathbb{Z}^\ell$-Jamison. On considère une suite de ℓ-uplets d'entiers relatifs $(\underline{n}_k)_{k\geq 1} = \big(n_k^{(1)}, \ldots, n_k^{(\ell)}\big)_{k\geq 1}$. Pour tout entier $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, on notera e_i le ℓ-uplet de $\mathbb{Z}^\ell$ dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1, c'est-à-dire

$$e_i := (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0).$$

Rappelons que les caractères du groupe $G = \mathbb{Z}^\ell$ (qui sont donc les éléments du dual $\widehat{\mathbb{Z}^\ell}$) sont de la forme

$$\begin{array}{cccc} \chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell} : & \mathbb{Z}^\ell & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ & (n_1, \ldots, n_\ell) & \longmapsto & \lambda_1^{n_1} \ldots \lambda_\ell^{n_\ell}. \end{array}$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ est un ℓ-uplet de nombres complexes de module 1.

On définit encore une application $d_{(\underline{n}_k)}$ sur $\widehat{\mathbb{Z}^\ell} \times \widehat{\mathbb{Z}^\ell}$ en posant, pour tous $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$, $(\mu_1, \ldots, \mu_\ell) \in \mathbb{T}^\ell$,

$$\begin{aligned} d_{(\underline{n}_k)}(\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell}, \chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}) &= \sup_{k\geq 1} \left|\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell}(\underline{n}_k) - \chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}(\underline{n}_k)\right| \\ &= \sup_{k\geq 1} \left|\lambda_1^{n_k^{(1)}} \ldots \lambda_\ell^{n_k^{(\ell)}} - \mu_1^{n_k^{(1)}} \ldots \mu_\ell^{n_k^{(\ell)}}\right|. \end{aligned}$$

Remarquons que si l'on impose à la suite $(\underline{n}_k)_{k\geq 1}$ les conditions initiales

$$\underline{n}_k = e_k \qquad \text{pour tout entier } k \in \{1, \ldots, \ell\},$$

alors $d_{(\underline{n}_k)}$ devient une distance sur le groupe dual $\widehat{\mathbb{Z}^\ell}$. Le résultat suivant fournit la caractérisation des suites $\mathbb{Z}^\ell$-Jamison. Remarquons en particulier que celui-ci généralise le Théorème 10.3.1 (correspondant à $\ell = 1$).

Théorème 10.4.1. *Soit $(\underline{n}_k)_{k\geq 1} = \big(n_k^{(1)}, \ldots, n_k^{(\ell)}\big)_{k\geq 1}$ une suite de ℓ-uplets d'entiers relatifs telle que $\underline{n}_k = e_k$ pour tout entier $k \in \{1, \ldots, \ell\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *la suite $(\underline{n}_k)_{k\geq 1}$ est une suite $\mathbb{Z}^\ell$-Jamison ;*

(2) *pour tout sous-ensemble non dénombrable K de $\widehat{\mathbb{Z}^\ell}$, l'espace métrique $(K, d_{(\underline{n}_k)})$ n'est pas séparable ;*

(3) *pour tout sous-ensemble non dénombrable K de $\widehat{\mathbb{Z}^\ell}$, il existe $\epsilon > 0$ tel que K contienne une famille non dénombrable et ϵ-séparée pour la distance $d_{(\underline{n}_k)}$;*

(4) *il existe $\epsilon > 0$ tel que tout sous-ensemble non dénombrable K de $\widehat{\mathbb{Z}^\ell}$ contienne une famille non dénombrable et ϵ-séparée pour la distance $d_{(\underline{n}_k)}$;*

(5) *il existe $\epsilon > 0$ tel que deux caractères distincts de $\widehat{\mathbb{Z}^\ell}$ sont ϵ-séparés pour la distance $d_{(\underline{n}_k)}$:*

$$\textit{pour tous } (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \neq (\mu_1, \ldots, \mu_\ell), \qquad \sup_{k\geq 1} \left|\lambda_1^{n_k^{(1)}} \ldots \lambda_\ell^{n_k^{(\ell)}} - \mu_1^{n_k^{(1)}} \ldots \mu_\ell^{n_k^{(\ell)}}\right| \geq \epsilon.$$

Démonstration. On a clairement la chaîne d'implications (5) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2). De plus, l'implication (2) $\Rightarrow$ (3) est un résultat général sur les espaces métriques (la preuve est donnée dans la preuve de [1, Théorème 2.8]). Montrons maintenant que (3) $\Rightarrow$ (5) en raisonnant par contraposée. On suppose que (5) n'est pas satisfaite. Il existe alors une suite $(\chi_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\widehat{\mathbb{Z}^\ell}$ telle que

$$d_{(\underline{n}_k)}(\chi_1, \mathbf{1}) < \frac{1}{4}$$

et

$$d_{(\underline{n}_k)}\big(\chi_n, \mathbf{1}\big) \leq \frac{1}{4^n} d_{(\underline{n}_k)}\big(\chi_{n-1}, \overline{\chi_{n-1}}\big). \tag{10.3}$$

D'après les conditions faites sur les premiers termes de la suite $(\underline{n}_k)_{k\geq 1}$ (c'est-à-dire $\underline{n}_1 = e_1$,..., $\underline{n}_\ell = e_\ell$), on voit que ceci est possible car $\chi_{n-1} \neq \overline{\chi_{n-1}}$. Remarquons que d'après la condition (10.3), la suite $\left(d_{(\underline{n}_k)}(\chi_n, \overline{\chi_n})\right)_{n\geq 1}$ est décroissante. On va construire un sous-ensemble non dénombrable K de $\widehat{\mathbb{Z}^\ell}$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, toute famille ϵ-séparée de l'espace métrique $(K, d_{(\underline{n}_k)})$ est automatiquement finie. Soit $(s_1, \ldots, s_n) \in \{0, \ldots, 1\}^n$ une suite finie de 0 et de 1. On lui associe un caractère $\psi_{(s_1,\ldots,s_n)}$ de $\mathbb{Z}^\ell$ de la façon suivante. On pose pour commencer $\psi_{(0)} := \chi_1$ et $\psi_{(1)} := \overline{\chi_1}$. On a alors

$$d_{(\underline{n}_k)}(\psi_{(0)}, \psi_{(1)}) = d_{(\underline{n}_k)}(\chi_1, \overline{\chi_1}) > 0.$$

Ensuite on pose $\psi_{(0,0)} := \psi_{(0)}\chi_2$ et $\psi_{(0,1)} := \psi_{(0)}\overline{\chi_2}$, puis $\psi_{(1,0)} := \psi_{(1)}\chi_2$ et $\psi_{(1,1)} := \psi_{(1)}\overline{\chi_2}$. Pour $s_2 \in \{0, 1\}$, on a alors

$$d_{(\underline{n}_k)}(\psi_{(0)}, \psi_{(0,s_2)}) = d_{(\underline{n}_k)}(\chi_2, \mathbf{1}) < \frac{1}{4^2} d_{(\underline{n}_k)}(\chi_1, \overline{\chi_1})$$

et

$$d_{(\underline{n}_k)}(\psi_{(1)}, \psi_{(1,s_2)}) = d_{(\underline{n}_k)}(\chi_2, \mathbf{1}) < \frac{1}{4^2} d_{(\underline{n}_k)}(\chi_1, \overline{\chi_1}).$$

De plus,

$$d_{(\underline{n}_k)}(\psi_{(0,0)}, \psi_{(0,1)}) = d_{(\underline{n}_k)}(\chi_2, \overline{\chi_2}) \qquad \text{et} \qquad d_{(\underline{n}_k)}(\psi_{(1,0)}, \psi_{(1,1)}) = d_{(\underline{n}_k)}(\chi_2, \overline{\chi_2}).$$

Supposons que l'on ait construit $\psi_{(s_1,\ldots,s_{n-1})}$. On pose alors $\psi_{(s_1,\ldots,s_{n-1},0)} := \psi_{(s_1,\ldots,s_{n-1})}\chi_n$ et $\psi_{(s_1,\ldots,s_{n-1},1)} = \psi_{(s_1,\ldots,s_{n-1})}\overline{\chi_n}$. On a alors

$$d_{(\underline{n}_k)}(\psi_{(s_1,\ldots,s_{n-1})}, \psi_{(s_1,\ldots,s_n)}) = d_{(\underline{n}_k)}(\chi_n, \mathbf{1}) < \frac{1}{4^n} d_{(\underline{n}_k)}(\chi_{n-1}, \overline{\chi_{n-1}}) \tag{10.4}$$

et

$$d_{(\underline{n}_k)}(\psi_{(s_1,\ldots,s_{n-1},0)}, \psi_{(s_1,\ldots,s_{n-1},1)}) = d_{(\underline{n}_k)}(\chi_n, \overline{\chi_n}). \tag{10.5}$$

Pour une suite $s = (s_1, \ldots, s_n, \ldots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, on peut définir $\psi_s \in \widehat{\mathbb{Z}^\ell}$ par

$$\psi_s := \lim_{n\to+\infty} \psi_{(s_1,\ldots,s_n)}.$$

Cette limite existe d'après (10.4). De plus, on peut écrire ψ_s de la façon suivante :

$$\psi_s = \psi_{(s_1,\ldots,s_p)} \prod_{j\geq p} \psi_{(s_1,\ldots,s_{j+1})}\overline{\psi_{(s_1,\ldots,s_j)}} \tag{10.6}$$

pour tout entier naturel p non nul.

▷ **L'application $s \longmapsto \psi_s$ de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ vers $\widehat{\mathbb{Z}^\ell}$ est injective.**
Soient s et s' deux éléments distincts de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Par exemple, s et s' coincident jusqu'à

l'indice $p-1$ mais diffèrent sur la $p^{\text{ème}}$ composante. On note $s = (s_1, \dots, s_{p-1}, 0, s_{p+1}, \dots)$ et $s' = (s_1, \dots, s_{p-1}, 1, s'_{p+1}, \dots)$. En utilisant (10.6), on a

$$\begin{aligned} d_{(\underline{n}_k)}(\psi_s, \psi_{s'}) = \sup_{k\geq 1} \Bigg| & \psi_{(s_1,\dots,s_{p-1},0)}(\underline{n}_k) \prod_{j\geq p} \psi_{(s_1,\dots,s_{j+1})}(\underline{n}_k)\overline{\psi_{(s_1,\dots,s_j)}(\underline{n}_k)} \\ & - \psi_{(s_1,\dots,s_{p-1},1)}(\underline{n}_k) \prod_{j\geq p} \psi_{(s'_1,\dots,s'_{j+1})}(\underline{n}_k)\overline{\psi_{(s'_1,\dots,s'_j)}(\underline{n}_k)} \Bigg| \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} d_{(\underline{n}_k)}(\psi_s, \psi_{s'}) &\geq d_{(\underline{n}_k)}(\psi_{(s_1,\dots,s_{p-1},0)}, \psi_{(s_1,\dots,s_{p-1},1)}) \\ &- \sup_{k\geq 1} \left| \prod_{j\geq p} \psi_{(s_1,\dots,s_{j+1})}(\underline{n}_k)\overline{\psi_{(s_1,\dots,s_j)}(\underline{n}_k)} - \prod_{j\geq p} \psi_{(s'_1,\dots,s'_{j+1})}(\underline{n}_k)\overline{\psi_{(s'_1,\dots,s'_j)}(\underline{n}_k)} \right| \end{aligned} \tag{10.7}$$

On sait d'après (10.5) que

$$d_{(\underline{n}_k)}(\psi_{(s_1,\dots,s_{p-1},0)}, \psi_{(s_1,\dots,s_{p-1},1)}) = d_{(\underline{n}_k)}(\chi_p, \overline{\chi_p}).$$

On va maintenant estimer l'expression (10.7). Comme pour tous nombres complexes $\nu_1, \dots, \nu_r$ de module 1, on a

$$\left| \prod_{i=1}^r \nu_i - 1 \right| \leq \sum_{i=1}^r |\nu_i - 1|,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{k\geq 1} & \left| \prod_{j\geq p} \psi_{(s_1,\dots,s_{j+1})}(\underline{n}_k)\overline{\psi_{(s_1,\dots,s_j)}(\underline{n}_k)} - \prod_{j\geq p} \psi_{(s'_1,\dots,s'_{j+1})}(\underline{n}_k)\overline{\psi_{(s'_1,\dots,s'_j)}(\underline{n}_k)} \right| \\ & \leq \sum_{j\geq p} d_{(\underline{n}_k)}(\psi_{(s_1,\dots,s_{j+1})}, \psi_{(s_1,\dots,s_j)}) + \sum_{j\geq p} d_{(\underline{n}_k)}(\psi_{(s'_1,\dots,s'_{j+1})}, \psi_{(s'_1,\dots,s'_j)}) \\ & \leq 2\sum_{j\geq p} 4^{-(j+1)} d_{(\underline{n}_k)}(\chi_j, \overline{\chi_j}) \\ & \leq \left(2\sum_{j\geq p} 4^{-(j+1)} \right) d_{(\underline{n}_k)}(\chi_p, \overline{\chi_p}) \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité découle directement de (10.4), tandis que la troisième inégalité résulte de la décroissance de la suite $\left(d_{(\underline{n}_k)}(\chi_j, \overline{\chi_j})\right)_{j\geq 1}$. On en déduit donc que

$$d_{(\underline{n}_k)}(\psi_s, \psi_{s'}) \geq \left(1 - 2\sum_{j\geq p} 4^{-(j+1)} \right) d_{(\underline{n}_k)}(\chi_p, \overline{\chi_p}) \geq \frac{5}{6} d_{(\underline{n}_k)}(\chi_p, \overline{\chi_p}) > 0$$

ce qui montre que l'application $s \longmapsto \psi_s$ est injective. Par conséquent, le sous-ensemble $K := \left\{\psi_s \,;\, s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\right\}$ de $\widehat{\mathbb{Z}^\ell}$ est non dénombrable.

$\triangleright$ **Toute famille ϵ-séparée de $(K, d_{(\underline{n}_k)})$ est finie.**
Etant donné $\epsilon > 0$, il existe un entier p tel que $d_{(\underline{n}_k)}(\chi_p, \overline{\chi_p}) \leq \frac{6}{7}\epsilon$. En utilisant le même raisonnement que précédemment, on montre facilement que si s et s' sont deux suites de 0 et de 1 dont les p premières composantes sont égales, alors

$$d_{(\underline{n}_k)}(\psi_s, \psi_{s'}) \leq \frac{7}{6} d_{(\underline{n}_k)}(\chi_p, \overline{\chi_p}) \leq \epsilon.$$

On en déduit que si ψ_s et $\psi_{s'}$ sont ϵ-séparés pour la distance $d_{(\underline{n}_k)}$, alors au moins l'une des p premières composantes de s et s' diffère. Or, il y a un nombre fini de telles suites. On en déduit en particulier que $(K, d_{(\underline{n}_k)})$ ne contient pas de famille ϵ-séparée non dénombrable.

Montrons enfin que (1) implique (2) en raisonnant par contraposée. Supposons qu'il existe un sous-ensemble non dénombrable K de $\widehat{\mathbb{Z}^\ell}$ tel que l'espace métrique $(K, d_{(\underline{n}_k)})$ soit séparable. On veut construire un espace de Banach complexe séparable X et une représentation $\rho : \mathbb{Z}^\ell \longrightarrow \mathcal{GL}(X)$ telle que $\sup_{k\geq 1} ||\rho(\underline{n}_k)|| < +\infty$ et tel que l'ensemble $\sigma_p(\rho) \cap \mathbb{T}^{\mathbb{Z}^\ell}$ soit non dénombrable. On considère l'espace de Hilbert complexe

$$H := \left\{ x = (x_{i_1,\dots,i_\ell})_{(i_1,\dots,i_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^\ell} \,;\, ||x|| := \left(\sum_{(i_1,\dots,i_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell} \frac{|x_{i_1,\dots,i_\ell}|^2}{(1+i_1^2)\dots(1+i_\ell^2)} \right)^{1/2} < +\infty \right\}.$$

On définit aussi la représentation du groupe $\mathbb{Z}^\ell$ suivante :

$$\begin{array}{cccc} \rho : & \mathbb{Z}^\ell & \longrightarrow & \mathcal{GL}(H) \\ & (m_1,\dots,m_\ell) & \longmapsto & \big(x \mapsto (x_{i_1+m_1},\dots,x_{i_\ell+m_\ell})_{(i_1,\dots,i_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell}\big). \end{array}$$

Rappelons que pour $(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell) \in \mathbb{T}^\ell$, le caractère $\chi_{\lambda_1,\dots,\lambda_\ell} : \mathbb{Z}^\ell \longrightarrow \mathbb{T}$ de $\mathbb{Z}^\ell$ est défini par

$$\chi_{\lambda_1,\dots,\lambda_\ell}(m_1,\dots,m_\ell) = \lambda_1^{m_1}\dots\lambda_\ell^{m_\ell}$$

pour tout $(m_1,\dots,m_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$. Il est clair que $\chi_{\lambda_1,\dots,\lambda_\ell}$ appartient à H pour tout ℓ-uplet $(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)$ de nombres complexes de module 1. On définit maintenant une nouvelle norme sur l'espace H de sorte que la représentation ρ soit bornée par rapport à la suite $(\underline{n}_k)_{k\geq 1}$. Pour tout $x = (x_{i_1,\dots,i_\ell})_{(i_1,\dots,i_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell}$, on pose

$$||x||_* = \max\left(||x||\,, \sup_{j\geq 1} 4^{-j} \sup_{k_1,\dots,k_j\geq 1} \left|\left| \prod_{i=1}^{j} \big(\rho(\underline{n}_{k_i}) - I\big)x \right|\right| \right)$$

et on considère désormais le nouvel espace de Banach $H_* := \big\{x \in H \,;\, ||x||_* < +\infty\big\}$ muni de la norme $||\cdot||_*$. Remarquons que $\chi_{\lambda_1,\dots,\lambda_\ell}$ appartient à H_* pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell) \in \mathbb{T}^\ell$. En effet,

$$\begin{aligned} ||\chi_{\lambda_1,\dots,\lambda_\ell}||_* &= \max\left(1\,, \sup_{j\geq 1} 4^{-j} \sup_{k_1,\dots,k_j\geq 1} \prod_{i=1}^{j} \left| \lambda_1^{n_{k_i}^{(1)}} \dots \lambda_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}} - 1 \right| \right) ||\chi_{\lambda_1,\dots,\lambda_\ell}|| \\ &= ||\chi_{\lambda_1,\dots,\lambda_\ell}||. \end{aligned}$$

$\triangleright$ **La représentation ρ est bornée par rapport à la suite $(\underline{n}_k)_{k\geq 0}$.**
Pour tout $x \in H_*$ et pour tout entier naturel k non nul, la norme $||\rho(\underline{n}_k)||_*$ est égale à

$$\max\left(||\rho(\underline{n}_k)x||\,,\, \sup_{j\geq 1} 4^{-j} \sup_{k_1,\ldots,k_j\geq 1} \left|\left| \prod_{i=1}^{j} \big(\rho(\underline{n}_{k_i}) - I\big)\rho(\underline{n}_k)x \right|\right| \right).$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} ||\rho(\underline{n}_k)x|| = ||x + (\rho(\underline{n}_k) - I)x|| &\leq ||x|| + ||(\rho(\underline{n}_k) - I)x|| \\ &\leq ||x||_* + 4\cdot\frac{1}{4}||(\rho(\underline{n}_k) - I)x|| \\ &\leq 5||x||_*. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $j \geq 1$ et pour tout j-uplet $(k_1, \ldots, k_j)$ d'entiers naturels non nuls, on a

$$\begin{aligned} 4^{-j}\left|\left| \prod_{i=1}^{j} \big(\rho(\underline{n}_{k_i}) - I\big)\rho(\underline{n}_k)x \right|\right| \leq 4\cdot 4^{-(j+1)} &\left|\left| \prod_{i=1}^{j} \big(\rho(\underline{n}_{k_i}) - I\big)\big(\rho(\underline{n}_k) - I\big)x \right|\right| \\ &+ 4^{-j}\left|\left| \prod_{i=1}^{j} \big(\rho(\underline{n}_{k_i}) - I\big)x \right|\right|. \end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout entier naturel k non nul,

$$||\rho(\underline{n}_k)x||_* \leq 4||x||_* + ||x||_* = 5||x||_*.$$

Autrement dit, la suite $(||\rho(\underline{n}_k)||_*)_{k\geq 1}$ est bornée et $\sup_{k\geq 1} ||\rho(\underline{n}_k)||_* \leq 5$.

$\triangleright$ **Rendre l'espace H_* séparable.**
A ce stade de la preuve, on exploite l'hypothèse. On sait qu'il existe un sous-ensemble non dénombrable K de $\widehat{\mathbb{Z}^\ell}$ tel que l'espace métrique $(K, d_{(\underline{n}_k)})$ est séparable. On définit le sous-espace

$$H_*^K := \overline{\mathrm{vect}}^{||\cdot||_*}\left[\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell}\,;\, \chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell} \in K\right]$$

de H_* que l'on munit de la norme $||\cdot||_*$ (on identifie ici l'élément $\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell} \in \widehat{\mathbb{Z}^\ell}$ avec l'élément $(\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell}(m_1, \ldots, m_\ell))_{(m_1,\ldots,m_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell}$ qu'il définit dans H). La séparabilité de l'espace H_*^K est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 10.4.2. *Le champ de vecteurs propres $E : K \longrightarrow H_*$ défini par $E(\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell}) = \chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell}$ est continu sur K.*

Démonstration. Soient $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell), (\mu_1, \ldots, \mu_\ell)$ deux ℓ-uplets de nombres complexes de module 1. On doit estimer la quantité $||\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell} - \chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}||_*$ qui est égale au maximum entre les quantités $||\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell} - \chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}||$ et

$$\sup_{j\geq 1} 4^{-j} \sup_{k_1,\ldots,k_j\geq 1} \left|\left| \prod_{i=1}^{j}\left(\lambda_1^{n_{k_i}^{(1)}} \ldots \lambda_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}} - 1\right)\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell} - \prod_{i=1}^{j}\left(\mu_1^{n_{k_i}^{(1)}} \ldots \mu_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}} - 1\right)\chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell} \right|\right|.$$

Pour tout $j \geq 1$ et pour tout j-uplet d'entiers naturels non nuls $(k_1, \ldots, k_j)$, on a

$$\begin{aligned}\Bigg|\Bigg|\prod_{i=1}^{j}\left(\lambda_1^{n_{k_i}^{(1)}}\ldots\lambda_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}}-1\right)\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell}-\prod_{i=1}^{j}\left(\mu_1^{n_{k_i}^{(1)}}\ldots\mu_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}}-1\right)\chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}\Bigg|\Bigg| \\ \leq ||\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell}-\chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}||\prod_{i=1}^{j}\left|\lambda_1^{n_{k_i}^{(1)}}\ldots\lambda_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}}-1\right| \\ +||\chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}||\left|\prod_{i=1}^{j}\left(\lambda_1^{n_{k_i}^{(1)}}\ldots\lambda_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}}-1\right)-\prod_{i=1}^{j}\left(\mu_1^{n_{k_i}^{(1)}}\ldots\mu_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}}-1\right)\right|.\end{aligned}$$

On introduit maintenant la quantité $d_j\big((\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell), (\mu_1, \ldots, \mu_\ell)\big)$ égale à

$$\sup_{k_1,\ldots,k_j\geq 1}\left|\prod_{i=1}^{j}\left(\lambda_1^{n_{k_i}^{(1)}}\ldots\lambda_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}}-1\right)-\prod_{i=1}^{j}\left(\mu_1^{n_{k_i}^{(1)}}\ldots\mu_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}}-1\right)\right|.$$

On a l'identité

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{j}\left(\lambda_1^{n_{k_i}^{(1)}}\ldots\lambda_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}}-1\right)-\prod_{i=1}^{j}\left(\mu_1^{n_{k_i}^{(1)}}\ldots\mu_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}}-1\right) \\ &\quad=\left(\lambda_1^{n_{k_1}^{(1)}}\ldots\lambda_\ell^{n_{k_1}^{(\ell)}}-\mu_1^{n_{k_1}^{(1)}}\ldots\mu_\ell^{n_{k_1}^{(\ell)}}\right)\prod_{i=2}^{j}\left(\lambda_1^{n_{k_i}^{(1)}}\ldots\lambda_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}}-1\right) \\ &\quad+\left(\mu_1^{n_{k_1}^{(1)}}\ldots\mu_\ell^{n_{k_1}^{(\ell)}}-1\right)\left[\prod_{i=2}^{j}\left(\lambda_1^{n_{k_i}^{(1)}}\ldots\lambda_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}}-1\right)-\prod_{i=2}^{j}\left(\mu_1^{n_{k_i}^{(1)}}\ldots\mu_\ell^{n_{k_i}^{(\ell)}}-1\right)\right]\end{aligned}$$

qui nous permet de fournir l'estimation

$$\begin{aligned}d_j\big((\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell),(\mu_1,\ldots,\mu_\ell)\big)\leq 2^{j-1}d_{(\underline{n}_k)}\big(\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell},\chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}\big) \\ +2d_{j-1}\big((\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell),(\mu_1,\ldots,\mu_\ell)\big).\end{aligned}$$

Une récurrence immédiate permet alors de conclure que, pour tout entier naturel j non nul,

$$d_j\big((\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell),(\mu_1,\ldots,\mu_\ell)\big)\leq j2^j d_{(\underline{n}_k)}\big(\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell},\chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}\big).$$

On déduit de ces estimations l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tous $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell), (\mu_1, \ldots, \mu_\ell) \in \mathbb{T}^\ell$, on ait

$$||\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell}-\chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}||_*\leq C\big(||\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell}-\chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}||+d_{(\underline{n}_k)}\big(\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell},\chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}\big)\big).$$

Etant donné $\epsilon > 0$, il existe un entier N_ϵ tel que

$$\sum_{\substack{i\in\mathbb{Z}\\|i|>N_\epsilon}}\frac{1}{1+i^2}\leq\epsilon^2$$

et donc il existe une constante $C' > 0$ telle que

$$||\chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell} - \chi_{\mu_1,\ldots,\mu_\ell}||_* \leq C' \Bigg[\Bigg(\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell \\ |i_p|\leq N_\epsilon}} \frac{\big|\lambda_1^{i_1}\ldots\lambda_\ell^{i_\ell} - \mu_1^{i_1}\ldots\mu_\ell^{i_\ell}\big|^2}{(1+i_1^2)\ldots(1+i_\ell^2)} \Bigg)^{1/2}$$
$$+ d_{(\underline{n}_k)}\big((\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell),(\mu_1,\ldots,\mu_\ell)\big) + \epsilon \Bigg].$$

Or pour tout $(i_1,\ldots,i_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$,

$$\big|\lambda_1^{i_1}\ldots\lambda_\ell^{i_\ell} - \mu_1^{i_1}\ldots\mu_\ell^{i_\ell}\big| \leq \sum_{p=1}^{\ell} \big|\lambda_p^{i_p} - \mu_p^{i_p}\big|$$

et donc il existe une constante $C_\epsilon > 0$ telle que

$$\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell \\ |i_p|\leq N_\epsilon}} \frac{\big|\lambda_1^{i_1}\ldots\lambda_\ell^{i_\ell} - \mu_1^{i_1}\ldots\mu_\ell^{i_\ell}\big|^2}{(1+i_1^2)\ldots(1+i_\ell^2)} \leq C_\epsilon\big(|\lambda_1-\mu_1|^2 + \cdots + |\lambda_\ell-\mu_\ell|^2\big).$$

Comme par hypothèse $\underline{n}_k = e_k$ pour tout $k \in \{1,\ldots,\ell\}$, on voit que

$$\max\big(|\lambda_1-\mu_1|,\ldots,|\lambda_\ell-\mu_\ell|\big) \leq d_{(\underline{n}_k)}\big((\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell),(\mu_1,\ldots,\mu_\ell)\big).$$

Par conséquent, le champ de vecteurs propres $E : \chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell} \longmapsto \chi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell}$ est continu sur K. □

On déduit de ce lemme que l'espace de Banach $(H_*^K, ||\cdot||_*)$ est séparable, ce qui achève la preuve du Théorème 10.4.1. □

A l'aide du Théorème 10.4.1, on peut donner la caractérisation des suites G-Jamison lorsque G est un groupe abélien de type fini.

10.5 Cas des groupes abéliens de type fini

On commence par démontrer le résultat général suivant qui nous sera utile dans la suite. Cette proposition nous permettra de faire le lien entre le groupe abélien de type fini $\mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$ et la partie sans torsion $\mathbb{Z}^\ell$.

Proposition 10.5.1. *Soient G et H deux groupes, $(g_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de G et $(h_k)_{k\geq 0}$ une suite d'éléments de H. Si la suite $(g_k,h_k)_{k\geq 0}$ est $(G\times H)$-Jamison, alors $(g_k)_{k\geq 0}$ est une suite G-Jamison et $(h_k)_{k\geq 0}$ est une suite H-Jamison.*

Démonstration. Soient X un espace de Banach complexe séparable et $\rho : G \longrightarrow \mathcal{GL}(X)$ une représentation de G telle que $\sup_{k\geq 0} ||\rho(g_k)|| < +\infty$. Alors

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} : G \times H &\longrightarrow \mathcal{GL}(X) \\ (g,h) &\longmapsto \rho(g) \end{aligned}$$

est une représentation du groupe $G \times H$ telle que

$$\sup_{k\geq 0} ||\rho(g_k, h_k)|| = \sup_{k\geq 0} ||\rho(g_k)|| < +\infty.$$

Comme $(g_k, h_k)_{k\geq 0}$ est une suite $(G \times H)$-Jamison, l'ensemble $\sigma_p(\tilde{\rho}) \cap \mathbb{T}^{G\times H}$ est au plus dénombrable. Or il est facile de voir que

$$\sigma_p(\tilde{\rho}) \cap \mathbb{T}^{G\times H} = \left\{\tilde{\chi} : (g,h) \longmapsto \chi(g)\,;\, \chi \in \sigma_p(\rho) \cap \mathbb{T}^G\right\}$$

et donc les ensembles $\sigma_p(\tilde{\rho})\cap\mathbb{T}^{G\times H}$ et $\sigma_p(\rho)\cap\mathbb{T}^G$ sont équipotents. En particulier, l'ensemble $\sigma_p(\rho) \cap \mathbb{T}^G$ est au plus dénombrable. Par conséquent, la suite $(g_k)_{k\geq 0}$ est une suite G-Jamison. De la même manière, on montre que $(h_k)_{k\geq 0}$ est une suite H-Jamison. □

Remarque 10.5.2. La réciproque de la Proposition 10.5.1 est fausse : si $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{Z}$-Jamison, la suite $(n_k, -n_k)_{k\geq 0}$ n'est jamais une suite $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$-Jamison.

Démonstration. Montrons d'abord que la suite $(-n_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{Z}$-Jamison. Si $T : X \longrightarrow X$ est un opérateur inversible sur un espace de Banach complexe séparable X tel que $\sup_{k\geq 0} ||T^{-n_k}|| < +\infty$, alors $\sup_{k\geq 0} ||S^{n_k}|| < +\infty$ où $S := T^{-1}$. Comme $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{Z}$-Jamison, on en déduit que l'ensemble $\sigma_p(S) \cap \mathbb{T}$ est au plus dénombrable. Mais

$$\sigma_p(T) \cap \mathbb{T} = \left\{\overline{\lambda}\,;\, \lambda \in \sigma(S) \cap \mathbb{T}\right\}$$

donc l'ensemble $\sigma_p(T)\cap\mathbb{T}$ est au plus dénombrable. Montrons maintenant que $(n_k, -n_k)_{k\geq 0}$ n'est pas une suite $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$-Jamison. Soient X un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie et $T : X \longrightarrow X$ un opérateur inversible (on considère ici la représentation $\rho : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{GL}(X)$ définie par $\rho(1, 0) = \rho(0, 1) = T$). Ici $||T^{n_k}T^{-n_k}|| = 1$ pour tout entier naturel k mais l'ensemble $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ peut être non dénombrable. □

Soit G un groupe abélien de type fini. Il existe des entiers $\ell \geq 1$ et $a_1, \ldots, a_r \geq 2$ tels que G soit isomorphe au groupe $\mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$. Dans la suite, on fera l'identification $G = \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, on note e_i l'élément de G dont toutes les composantes sont nulles sauf la $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1 :

$$e_i = (\overbrace{\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0}^{\ell}, 0 \bmod a_1, \ldots, 0 \bmod a_r) \in G.$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note $e_{\ell+i}$ l'élément de G dont toutes les composantes sont nulles sauf la $(\ell+i)^{\text{ème}}$ qui vaut $1 \bmod a_i$:

$$e_{\ell+i} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{\ell}, \underbrace{0 \bmod a_1, \ldots, 0 \bmod a_{i-1}, 1 \bmod a_i}_{i}, 0 \bmod a_{i+1}, \ldots, 0 \bmod a_r) \in G.$$

Rappelons que si q est un entier naturel supérieur ou égal à 2, alors les caractères du groupe cyclique $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ sont uniquement déterminés par les racines $q^{\text{èmes}}$ de l'unité : si χ_q est un caractère du groupe $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, alors il existe une racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité λ_q telle que $\chi_q(n) = \lambda_q^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.

La proposition suivante fait le lien entre les conditions suffisantes (de la Proposition 10.2.1) pour les groupes $G = \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^\ell$.

Proposition 10.5.3. *Soit G le groupe abélien de type fini $\mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$. Soit $(g_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de G telle que $g_k = e_k$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, \ell+r\}$. Pour tout entier naturel k non nul, on note $g_k = (n_k^{(1)}, \ldots, n_k^{(\ell+r)})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathbb{T}^\ell \setminus \{(1, \ldots, 1)\}$, on ait*

$$\sup_{k\geq 1} \left| \lambda_1^{n_k^{(1)}} \ldots \lambda_\ell^{n_k^{(\ell)}} - 1 \right| \geq \epsilon.$$

(2) *il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\chi \in \hat{G} \setminus \{\mathbf{1}\}$, on ait* $\sup_{k\geq 1} |\chi(g_k) - 1| \geq \epsilon$;

Démonstration. On commence par montrer par contraposée que (2) implique (1). Etant donné $\epsilon > 0$, on suppose qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathbb{T}^\ell \setminus \{(1, \ldots, 1)\}$ tel que

$$\left| \lambda_1^{n_k^{(1)}} \ldots \lambda_\ell^{n_k^{(\ell)}} - 1 \right| \leq \epsilon$$

pour tout entier naturel k non nul. Alors, en considérant le caractère χ de G défini par

$$\chi\big(n^{(1)}, \ldots, n^{(\ell+r)}\big) = \lambda_1^{n^{(1)}} \ldots \lambda_\ell^{n^{(\ell)}}$$

pour tout $\big(n^{(1)}, \ldots, n^{(\ell+r)}\big) \in G$, on voit que $\chi \neq \mathbf{1}$ et que $|\chi(g_k) - 1| \leq \epsilon$ pour tout entier naturel k non nul, ce qui démontre l'implication (2) $\Rightarrow$ (1). Montrons maintenant que (1) implique (2) par contraposée. Soient $\epsilon > 0$ et $\chi \in \hat{G} \setminus \{\mathbf{1}\}$ tels que $|\chi(g_k) - 1| \leq \epsilon$ pour tout entier naturel k non nul. On sait qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{T}$ et des racines $a_i^{\text{èmes}}$ $(\ell+1 \leq i \leq \ell+r)$ de l'unité $\lambda_{\ell+1}, \ldots, \lambda_{\ell+r}$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\ell+r}) \neq (1, \ldots, 1)$ et tels que

$$\chi\big(n^{(1)}, \ldots, n^{(\ell+r)}\big) = \lambda_1^{n^{(1)}} \ldots \lambda_{\ell+r}^{n^{(\ell+r)}}$$

pour tout $\big(n^{(1)}, \ldots, n^{(\ell+r)}\big) \in G$. Par définition de $g_1, \ldots, g_{\ell+r}$, on trouve que

$$|\lambda_{\ell+i} - 1| \leq \epsilon$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Comme $\lambda_{\ell+1}, \ldots, \lambda_{\ell+r}$ sont des racines de l'unité, on en déduit, en prenant ϵ suffisamment petit, que $\lambda_{\ell+1} = \cdots = \lambda_{\ell+r} = 1$. Par conséquent, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \neq (1, \ldots, 1)$ et

$$\left|\lambda_1^{n_k^{(1)}} \ldots \lambda_\ell^{n_k^{(\ell)}} - 1\right| \leq \epsilon$$

pour tout entier naturel k non nul. Finalement, on a l'implication (1) $\Rightarrow$ (2). □

Nous pouvons enfin énoncer et démontrer le théorème donnant la caractérisation des suites G-Jamison pour les groupes abéliens de type fini G.

Théorème 10.5.4. *Soit G le groupe abélien de type fini $\mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$. Soit $(g_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments de G telle que $g_k = e_k$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, \ell + r\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *la suite $(g_k)_{k\geq 1}$ est une suite G-Jamison ;*
(2) *il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout caractère $\chi \in \hat{G} \setminus \{\mathbf{1}\}$, on ait $\sup_{k\geq 1} |\chi(g_k) - 1| \geq \epsilon$.*

Démonstration. Pour tout entier naturel k non nul, on pose $g_k = (\underline{n}_k, \underline{m}_k)$, où $\underline{n}_k \in \mathbb{Z}^\ell$ et $\underline{m}_k \in \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/a_r\mathbb{Z}$. Supposons que la suite $(g_k)_{k\geq 1}$ soit une suite G-Jamison. Alors d'après la Proposition 10.5.1, la suite $(\underline{n}_k)_{k\geq 0}$ est une suite $\mathbb{Z}^\ell$-Jamison. En appliquant successivement le Théorème 10.4.1 et la Proposition 10.5.3, on voit que la condition (2) est satisfaite, ce qui montre que (1) $\Rightarrow$ (2). Quant à l'implication (2) $\Rightarrow$ (1), elle a déjà été démontrée dans la Proposition 10.2.1. □

Annexe A

Quelques résultats intermédiaires

Dans cette dernière partie, nous démontrons certains résultats que nous avons admis dans les chapitres précédents. Le premier d'entre eux, utilisé dans la preuve du Théorème 2.4.6, correspond à l'étude du comportement local d'une fonction au voisinage de 0.

A.1 Etude d'une fonction

On désigne par α un nombre réel dans l'intervalle $]0,1]$. On introduit la fonction paire et 2π-périodique $f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-\alpha n} \sum_{k=0}^{2\cdot 3^n - 1} 2^{-k} \cos\big((3^n + k)t\big) \tag{A.1}$$

pour tout nombre réel t. L'objectif est de montrer que la fonction f_α est *exactement* localement α-höldérienne au voisinage de 0, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que l'on ait la double inégalité

$$\frac{1}{C_\alpha}|t|^\alpha \leq f_\alpha(0) - f_\alpha(t) \leq C_\alpha |t|^\alpha$$

lorsque t appartient à un voisinage de 0. Autrement dit, la fonction f_α est localement α-höldérienne au voisinage de 0 et n'est pas localement β-höldérienne au voisinage de 0 pour $\beta > \alpha$. Pour tout entier naturel N, on notera $f_{\alpha,N}$ la somme tronquée

$$f_{\alpha,N}(t) = \sum_{n=0}^{N} 3^{-\alpha n} \sum_{k=0}^{2\cdot 3^n - 1} 2^{-k} \cos\big((3^n + k)t\big)$$

pour tout nombre réel t. On commence par écrire différemment les fonctions $f_{\alpha,N}$ et f_α.

Lemme A.1.1. *Soient N un entier naturel et t un nombre réel. Alors $f_{\alpha,N} = g_{\alpha,N} + h_{\alpha,N}$, où*

$$g_{\alpha,N}(t) := 2 \sum_{n=0}^{N} \frac{2\cos(3^n t) - \cos((3^n - 1)t)}{3^{\alpha n}(5 - 4\cos t)}$$

et

$$h_{\alpha,N}(t) := 2\sum_{n=0}^{N} \frac{\cos((3^{n+1}-1)t) - 2\cos(3^{n+1}t)}{3^{\alpha n}4^{3^n}(5-4\cos t)}.$$

De même, $f_\alpha = g_\alpha + h_\alpha$*, où*

$$g_\alpha(t) := 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\cos(3^n t) - \cos((3^n-1)t)}{3^{\alpha n}(5-4\cos t)}$$

et

$$h_\alpha(t) := 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((3^{n+1}-1)t) - 2\cos(3^{n+1}t)}{3^{\alpha n}4^{3^n}(5-4\cos t)}.$$

Démonstration. Si on démontre le résultat pour $f_{\alpha,N}$, on aura celui correspondant à f_α en faisant tendre N vers $+\infty$. On sait que pour tous nombres réels a, b, on a la formule $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. On en déduit que

$$f_{\alpha,N}(t) = \sum_{n=0}^{N} 3^{-\alpha n}\left[\cos(3^n t)\,\mathfrak{Re}\left(\sum_{k=0}^{2\cdot 3^n-1}\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^k\right) - \sin(3^n t)\,\mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{2\cdot 3^n-1}\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^k\right)\right] \quad \text{(A.2)}$$

Or, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} := \sum_{k=0}^{2\cdot 3^n-1}\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^k &= \frac{1-\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^{2\cdot 3^n}}{1-\frac{e^{it}}{2}} \\
&= \frac{\left(1-\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^{2\cdot 3^n}\right)\left(1-\frac{e^{-it}}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\cos t} \\
&= \frac{4}{5-4\cos t}\left(1-\left(\frac{e^{it}}{2}\right)^{2\cdot 3^n} - \frac{e^{-it}}{2} + \frac{e^{i(2\cdot 3^n-1)t}}{2^{2\cdot 3^n+1}}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$\mathfrak{Re}(\mathcal{S}) = \frac{4}{5-4\cos t}\left(1-\frac{\cos(2\cdot 3^n t)}{4^{3^n}} - \frac{\cos t}{2} + \frac{\cos((2\cdot 3^n-1)t)}{2^{2\cdot 3^n+1}}\right)$$

et

$$\mathfrak{Im}(\mathcal{S}) = \frac{4}{5-4\cos t}\left(-\frac{\sin(2\cdot 3^n t)}{4^{3^n}} + \frac{\sin t}{2} + \frac{\sin((2\cdot 3^n-1)t)}{2^{2\cdot 3^n+1}}\right).$$

En injectant les expressions de $\mathfrak{Re}(\mathcal{S})$ et $\mathfrak{Im}(\mathcal{S})$ dans (A.2), on obtient (en utilisant à nouveau la formule $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$) :

$$\begin{aligned}
f_{\alpha,N}(t) &= \sum_{n=0}^{N} \frac{4}{3^{\alpha n}(5-4\cos t)}\left(\cos(3^n t) - \frac{\cos(3^{n+1}t)}{4^{3^n}} - \frac{\cos((3^n-1)t)}{2} + \frac{\cos((3^{n+1}-1)t)}{2^{2\cdot 3^n+1}}\right) \\
&= g_{\alpha,N}(t) + h_{\alpha,N}(t).
\end{aligned}$$

□

On étudie maintenant le comportement local de la fonction f_α au voisinage de 0.

Proposition A.1.2. *La fonction f_α est exactement localement α-hölderienne au voisinage de 0 : il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que l'on ait les inégalités*

$$\frac{1}{C_\alpha}|t|^\alpha \leq f_\alpha(0) - f_\alpha(t) \leq C_\alpha |t|^\alpha$$

lorsque t appartient à un voisinage de 0.

Démonstration. Remarquons que pour tout nombre réel t, la quantité $f_\alpha(0) - f_\alpha(t)$ est positive. Comme la fonction f_α est paire, on peut se restreindre à l'étude de $f_\alpha(0) - f_\alpha(t)$ pour t positif. Dans un premier temps, on s'intéresse à la majoration de $f_\alpha(0) - f_\alpha(t)$ puis on étudiera la minoration.

▷ **Majoration de $f_\alpha(0) - f_\alpha(t)$.**
On estime ici séparément les quantités $|g_\alpha(t) - g_\alpha(0)|$ et $|h_\alpha(t) - h_\alpha(0)|$.

• **Estimation de $|h_\alpha(t) - h_\alpha(0)|$.**
On va montrer que la fonction h_α est localement lipschitzienne au voisinage de 0. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}\frac{|h_\alpha(t) - h_\alpha(0)|}{2} &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((3^{n+1}-1)t) - 2\cos(3^{n+1}t) + 5 - 4\cos t}{3^{\alpha n} 4^{3^n}(5 - 4\cos t)}\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-\cos((3^{n+1}-1)t)) + 2(1-\cos(3^{n+1}t)) + 4(1-\cos t)}{3^{\alpha n}4^{3^n}}\end{aligned}$$

où on a utilisé ici le fait que $5 - 4\cos t \geq 1$ pour tout nombre réel t. Si on pose

$$A_\alpha := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{(1-\alpha)n+2} + 4\cdot 3^{-\alpha n}}{4^{3^n}} < +\infty,$$

on trouve, en utilisant le théorème des accroissements finis, que

$$|h_\alpha(t) - h_\alpha(0)| \leq 2A_\alpha |t|.$$

Ceci montre en particulier que la fonction h_α est localement α-hölderienne au voisinage de 0. Passons maintenant à l'étude de la fonction g_α.

• **Estimation de $|g_\alpha(t) - g_\alpha(0)|$.**
Soit t un nombre réel strictement positif. Alors

$$\begin{aligned}\frac{|g_\alpha(t) - g_\alpha(0)|}{2} &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\cos(3^n t) - \cos((3^n-1)t) - (5 - 4\cos t)}{3^{\alpha n}(5-4\cos t)}\right| \\ &\leq 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1-\cos t}{3^{\alpha n}} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1-\cos(3^n t)}{3^{\alpha n}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1-\cos((3^n-1)t)}{3^{\alpha n}} \qquad \text{(A.3)}\end{aligned}$$

où on a utilisé ici l'inégalité triangulaire et le fait que $5 - 4\cos t \geq 1$. On estime les trois quantités de (A.3) séparément. Tout d'abord, l'inégalité des accroissements finis nous donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-\cos t}{3^{\alpha n}} \leq B_\alpha t \tag{A.4}$$

où $B_\alpha := \sum_{n\geq 0} 3^{-\alpha n} < +\infty$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-\cos(3^n t)}{3^{\alpha n}} &= \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{\ln(1/t)}{\ln 3}\right\rfloor - 1} \frac{1-\cos(3^n t)}{3^{\alpha n}} + \sum_{n\geq \left\lfloor \frac{\ln(1/t)}{\ln 3}\right\rfloor} \frac{1-\cos(3^n t)}{3^{\alpha n}} \\ &:= \mathcal{S}_1(t) + \mathcal{S}_2(t)\end{aligned} \tag{A.5}$$

où on a noté $\mathcal{S}_1(t)$ la première somme du membre de droite de (A.5) et $\mathcal{S}_2(t)$ la deuxième somme. Pour estimer $\mathcal{S}_1(t)$, on utilise l'égalité $1-\cos(\theta) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$:

$$\mathcal{S}_1(t) = 2\sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{\ln(1/t)}{\ln 3}\right\rfloor - 1} \frac{\sin\left(\frac{3^n t}{2}\right)^2}{3^{\alpha n}} \leq \frac{t^2}{2}\sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{\ln(1/t)}{\ln 3}\right\rfloor - 1} 3^{(2-\alpha)n} \leq \frac{t^2}{2(3^{2-\alpha}-1)}\left(3^{(2-\alpha)\frac{\ln(1/t)}{\ln 3}} - 1\right),$$

où on a noté $\left\lfloor \frac{\ln(1/t)}{\ln 3}\right\rfloor$ la partie entière du nombre réel $\frac{\ln(1/t)}{\ln 3}$. On a alors

$$\mathcal{S}_1(t) \leq \frac{t^2}{2(3^{2-\alpha}-1)}(t^{\alpha-2}-1) \leq \frac{t^\alpha}{2(3^{2-\alpha}-1)}. \tag{A.6}$$

De plus,

$$\mathcal{S}_2(t) \leq \sum_{n\geq \left\lfloor \frac{\ln(1/t)}{\ln 3}\right\rfloor} 3^{-\alpha n} \leq \frac{3^\alpha}{1-3^{-\alpha}} t^\alpha. \tag{A.7}$$

Ainsi, les estimations (A.6) et (A.7) montrent qu'il existe une constante $D_\alpha > 0$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-\cos(3^n t)}{3^{\alpha n}} \leq D_\alpha t^\alpha. \tag{A.8}$$

On peut aussi écrire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-\cos((3^n-1)t)}{3^{\alpha n}} = \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{\ln(1/t)}{\ln 3}\right\rfloor - 1} \frac{1-\cos((3^n-1)t)}{3^{\alpha n}} + \sum_{n\geq \left\lfloor \frac{\ln(1/t)}{\ln 3}\right\rfloor} \frac{1-\cos((3^n-1)t)}{3^{\alpha n}}$$

et en utilisant le même raisonnement que précédemment, on montre facilement qu'il existe une constante $E_\alpha > 0$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-\cos((3^n-1)t)}{3^{\alpha n}} \leq E_\alpha t^\alpha. \tag{A.9}$$

Les estimations (A.4), (A.8) et (A.9) montrent donc que la fonction g_α est localement α-hölderienne au voisinage de 0. Finalement, la fonction f_α est localement α-hölderienne au voisinage de 0. Il nous reste à montrer que α est le meilleur exposant de Hölder possible pour la fonction f_α au voisinage de 0.

$\triangleright$ **Minoration de $f_\alpha(0) - f_\alpha(t)$.**
Ici, t désigne toujours un nombre réel strictement positif proche de 0 (disons $0 < t < \frac{\pi}{3}$). En utilisant l'expression (A.1) de f_α, on a

$$0 \leq f_\alpha(0) - f_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^{-\alpha n} \sum_{k=0}^{2\cdot 3^n - 1} 2^{-k}\big(1 - \cos((3^n + k)t)\big)$$

et chacun des termes de la somme ci-dessus est positif. Etant donné un entier naturel N, on peut donc écrire, avec les notations du Lemme A.1.1, que

$$\begin{aligned} f_\alpha(0) - f_\alpha(t) &\geq \sum_{n=0}^{N} 3^{-\alpha n} \sum_{k=0}^{2\cdot 3^n - 1} 2^{-k}\big(1 - \cos((3^n + k)t)\big) \\ &= f_{\alpha,N}(0) - f_{\alpha,N}(t) \\ &= \big(g_{\alpha,N}(0) - g_{\alpha,N}(t)\big) + \big(h_{\alpha,N}(0) - h_{\alpha,N}(t)\big) \end{aligned}$$

et on minore les deux termes du membre de droite de l'égalité précédente séparément.

• **Minoration de $h_{\alpha,N}(0) - h_{\alpha,N}(t)$.**
D'après le Lemme A.1.1, on a

$$\begin{aligned} \frac{h_{\alpha,N}(0) - h_{\alpha,N}(t)}{2} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{-\cos((3^{n+1} - 1)t) + 2\cos(3^{n+1}t) - (5 - 4\cos t)}{3^{\alpha n} 4^{3^n}(5 - 4\cos t)}. \\ &= -4\sum_{n=0}^{N} \frac{1 - \cos t}{3^{\alpha n} 4^{3^n}(5 - 4\cos t)} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1 - \cos((3^{n+1} - 1)t)}{3^{\alpha n} 4^{3^n}(5 - 4\cos t)} - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{1 - \cos(3^{n+1}t)}{3^{\alpha n} 4^{3^n}(5 - 4\cos t)}. \end{aligned}$$

En notant

$$F_\alpha := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{-\alpha n}}{4^{3^n}} < +\infty \qquad \text{et} \qquad G_\alpha := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{(1-\alpha)n+1}}{4^{3^n}} < +\infty,$$

on trouve, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1 - \cos t}{3^{\alpha n} 4^{3^n}(5 - 4\cos t)} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1 - \cos t}{3^{\alpha n} 4^{3^n}} \leq F_\alpha t \tag{A.10}$$

et

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1 - \cos(3^{n+1})t}{3^{\alpha n} 4^{3^n}(5 - 4\cos t)} \leq G_\alpha t. \tag{A.11}$$

Dans la suite, on prendra pour N la valeur

$$N = \left\lfloor \frac{\ln(\pi/t)}{\ln 3} \right\rfloor - 1. \tag{A.12}$$

Pour tout entier $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, on a $3^{n+1} \leq \frac{\pi}{t}$. Donc $0 \leq \frac{3^{n+1}-1}{2} t \leq \frac{\pi}{2}$ et alors $\sin\left(\frac{3^{n+1}-1}{2} t\right) \geq \frac{3^{n+1}-1}{\pi} t$. Comme $5 - 4\cos t \leq 9$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{1 - \cos((3^{n+1}-1)t)}{3^{\alpha n} 4^{3^n} (5 - 4\cos t)} &\geq \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\left(\frac{3^{n+1}-1}{2} t\right)^2}{3^{\alpha n} 4^{3^n}} \\
&\geq \frac{2t^2}{9\pi^2} \sum_{n=0}^{N} \frac{(3^{n+1}-1)^2}{3^{\alpha n} 4^{3^n}} \\
&\geq \frac{2}{9\pi^2} t^2.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

D'après les estimations (A.10), (A.11) et (A.13), on a donc

$$\frac{h_{\alpha,N}(0) - h_{\alpha,N}(t)}{2} \geq \frac{2}{9\pi^2} t^2 - (4F_\alpha + 2G_\alpha) t. \tag{A.14}$$

Passons maintenant à la minoration correspondant à la fonction $g_{\alpha,N}$.

- **Minoration de $g_{\alpha,N}(0) - g_{\alpha,N}(t)$.**

D'après le Lemme A.1.1, on a

$$\begin{aligned}
\frac{g_{\alpha,N}(0) - g_{\alpha,N}(t)}{2} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{5 - 4\cos t - 2\cos(3^n t) + \cos((3^n-1)t)}{3^{\alpha n}(5 - 4\cos t)} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{4(1-\cos t) + 2(1 - \cos(3^n t)) + (\cos((3^n-1)t) - 1)}{3^{\alpha n}(5 - 4\cos t)} \\
&\geq \sum_{n=0}^{N} \frac{2\sin\left(\frac{3^n t}{2}\right)^2 + 2\Big(\sin\left(\frac{3^n t}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{(3^n-1)t}{2}\right)^2\Big)}{3^{\alpha n}(5 - 4\cos t)}
\end{aligned}$$

puisque $1 - \cos t \geq 0$ et $1 - \cos(\theta) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2$. Or d'après la valeur de N donnée dans (A.12), on a $0 \leq \frac{(3^n-1)t}{2} \leq \frac{3^n t}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ et comme la fonction $x \longmapsto (\sin x)^2$ est croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a l'inégalité $\sin\left(\frac{3^n t}{2}\right)^2 \geq \sin\left(\frac{(3^n-1)t}{2}\right)^2$. Par conséquent,

$$\frac{g_{\alpha,N}(0) - g_{\alpha,N}(t)}{2} \geq \sum_{n=0}^{N} \frac{2\sin\left(\frac{3^n t}{2}\right)^2}{3^{\alpha n}(5 - 4\cos t)} \geq \frac{2t^2}{9\pi^2} \sum_{n=0}^{N} 3^{(2-\alpha)n}.$$

Comme $N + 1 \geq \frac{\ln(\pi/t)}{\ln 3} - 1$, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{g_{\alpha,N}(0) - g_{\alpha,N}(t)}{2} &\geq \frac{2t^2}{9\pi^2} \cdot \frac{1}{3^{2-\alpha} - 1} \cdot \left(3^{(2-\alpha)\left(\frac{\ln(\pi/t)}{\ln 3} - 1\right)} - 1\right) \\
&= \frac{2}{9\pi^2(3^{2-\alpha} - 1)} \left(\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2-\alpha} t^\alpha - t^2\right) \\
&= H_\alpha t^\alpha - I_\alpha t^2
\end{aligned} \tag{A.15}$$

avec des notations évidentes ($H_\alpha, I_\alpha > 0$). Finalement, il découle des minorations (A.14) et (A.15) que, pour t strictement positif proche de 0,

$$f_\alpha(0) - f_\alpha(t) \geq 2H_\alpha t^\alpha + \left(\frac{4}{9\pi^2} - 2I_\alpha\right)t^2 - (8F_\alpha + 4G_\alpha)t$$

et donc $f_\alpha(0) - f_\alpha(t) \geq H_\alpha t^\alpha$ si t est suffisamment proche de 0, ce qui conclut la preuve de la Proposition A.1.2. □

A.2 Lemmes combinatoires

Nous donnons maintenant les preuves de certains résultats de nature combinatoire. Tout d'abord, nous avons dû calculer les sommes suivantes pour calculer les moments d'une variable aléatoire gaussienne complexe (Proposition 3.1.5).

Lemme A.2.1. *Pour tout entier naturel n, on a*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2i}{i}\binom{2(n-i)}{n-i} = 4^n.$$

Démonstration. On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. On montre facilement par récurrence que pour tout entier naturel k,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(2k)!}{k!} \cdot \frac{1}{(1-4x)^{(2k+1)/2}}.$$

On en déduit le développement en série entière suivant : pour tout $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k} x^k = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

En mettant les deux membres de cette égalité au carré, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{2i}{i}\binom{2(n-i)}{n-i}\right) x^n = \frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^n$$

et on conclut en identifiant les coefficients. □

Le lemme très simple suivant a été utilisé dans l'Exemple 5.1.15.

Lemme A.2.2. *Soit n un entier naturel non nul. Le nombre de partitions par paires d'un ensemble à $2n$ éléments est égal à $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.*

Démonstration. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n le nombre de partitions par paires d'un ensemble à $2n$ éléments. Dans un premier temps, on exprime p_{n+1} en fonction de p_n. Soit $E = \{x_1, \ldots, x_{2n+2}\}$ un ensemble à $2n+2$ éléments. A partir de l'élément x_1, on peut former exactement $2n+1$ paires distinctes : $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}, \ldots, \{x_1, x_{2n+2}\}$. On en déduit donc que $p_{n+1} = (2n+1)p_n$. On démontre alors le résultat annoncé à l'aide d'un raisonnement par récurrence et en remarquant que $p_1 = 1$. □

L'identité de polarisation suivante a été utilisée plusieurs fois dans la première partie de la thèse.

Lemme A.2.3. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et k un entier naturel non nul. Soit $\mathcal{B}$ une forme k-linéaire symétrique sur $\mathcal{H}$. Alors, pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_k$ de $\mathcal{H}$, on a*

$$\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r} \sum_{1\le \ell_1<\cdots<\ell_r\le k} \mathcal{B}(x_{\ell_1}+\cdots+x_{\ell_r}, \dots, x_{\ell_1}+\cdots+x_{\ell_r}) = k!\,\mathcal{B}(x_1,\dots,x_k). \quad \text{(A.16)}$$

Démonstration. On fixe $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{H}$ et on note $\mathcal{S}$ la somme

$$\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r} \sum_{1\le \ell_1<\cdots<\ell_r\le k} \mathcal{B}(x_{\ell_1}+\cdots+x_{\ell_r}, \dots, x_{\ell_1}+\cdots+x_{\ell_r}).$$

On peut réécrire $\mathcal{S}$ comme

$$\mathcal{S} = \sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r} \sum_{\substack{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{0,1\}^k \\ \epsilon_1+\cdots+\epsilon_k=r}} \mathcal{B}(\epsilon_1 x_1+\cdots+\epsilon_k x_k, \dots, \epsilon_1 x_1+\cdots+\epsilon_k x_k).$$

Pour tout entier $j \in \{1,\dots,k\}$, on note $\mathcal{S}_j^{(k)}$ la somme des éléments de la forme

$$\mathcal{B}(\underbrace{x_{i_1},\dots,x_{i_1}}_{\xi_1 \text{ fois}},\dots,\underbrace{x_{i_j},\dots,x_{i_j}}_{\xi_j \text{ fois}}),$$

où ξ appartient à l'ensemble $\{1,\dots,k\}$, avec $\xi_1+\cdots+\xi_j = k$ et $1 \le i_1 < \cdots < i_j \le k$. On veut compter le nombre de fois que chacun de ces éléments apparaît dans la somme intérieure sur les k-uplets $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)$. Considérons donc un élément

$$\mathcal{B}(\underbrace{x_{i_1},\dots,x_{i_1}}_{\xi_1 \text{ fois}},\dots,\underbrace{x_{i_j},\dots,x_{i_j}}_{\xi_j \text{ fois}})$$

de cette forme. Dans la somme

$$\sum_{\substack{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k)\in\{0,1\}^k \\ \epsilon_1+\cdots+\epsilon_k=r}} \mathcal{B}(\epsilon_1 x_1+\cdots+\epsilon_k x_k, \dots, \epsilon_1 x_1+\cdots+\epsilon_k x_k), \quad \text{(A.17)}$$

cet élément apparaît lorsque $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_k) \in \{0,1\}^k$ est tel que $\epsilon_{i_p} = 1$ pour tout entier $p \in \{1,\dots,j\}$. On en déduit que compter le nombre de fois qu'apparaît notre élément dans la somme (A.17) revient à dénombrer le nombre de solutions de l'équation $\eta_1+\cdots+\eta_{k-j} = r-j$, où η_i appartient à $\{0,1\}$. Ainsi, le nombre cherché est $\binom{k-j}{r-j}$. Ceci permet de calculer la somme $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \sum_{j=1}^{k}\left[\sum_{r=j}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k-j}{r-j}\right]\mathcal{S}_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{k-1}\left[\sum_{r=j}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k-j}{r-j}\right]\mathcal{S}_j^{(k)} + \mathcal{S}_k^{(k)}.$$

Or, pour tout $j \in \{0, k-1\}$,

$$\sum_{r=j}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k-j}{r-j} = 0.$$

De plus, les termes qui apparaissent dans la somme $\mathcal{S}_k^{(k)}$ sont de la forme $\mathcal{B}(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(k)})$, où τ est une permutation de $\mathfrak{S}_k$ et tous ces termes sont égaux à $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_k)$ par symétrie de $\mathcal{B}$, ce qui montre que

$$\mathcal{S} = k!\, \mathcal{B}(x_1, \dots, x_k).$$

□

La formule de polarisation (A.16) nous donne le cas particulier bien connu suivant.

Corollaire A.2.4. *Soit k un entier naturel non nul et $t_1, \dots, t_k$ des nombres réels. Alors, on a l'identité de polarisation suivante*

$$\prod_{i=1}^{k} t_i = \frac{1}{k!} \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} \sum_{1 \le \ell_1 < \cdots < \ell_r \le k} (t_{\ell_1} + \cdots + t_{\ell_r})^k.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer (A.16) à la forme k-linéaire symétrique

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{B}: & \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t_1, \dots, t_k) & \longmapsto & t_1 \dots t_k. \end{array}$$

□

Pour estimer les corrélations entre deux fonctions d'un nombre fini de variables (Théorème 6.1.1), nous avons admis l'égalité suivante.

Lemme A.2.5. *Soient ℓ et N des entiers naturels non nuls. Alors*

$$\sum_{\substack{(i_1, \dots, i_N) \in \mathbb{N}^N \\ i_1 + \cdots + i_N = \ell}} \frac{1}{i_1! \dots i_N!} = \frac{N^\ell}{\ell!}.$$

Démonstration. On écrit de deux manières différentes le développement en série entière de e^{Nx}. D'une part, on a

$$e^{Nx} = 1 + \frac{Nx}{1!} + \frac{N^2 x^2}{2!} + \cdots + \frac{N^\ell x^\ell}{\ell!} + \cdots$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} e^{Nx} &= (e^x)^N = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^N \\ &= 1 + S_1 x + S_2 x^2 + \cdots + S_\ell x^\ell + \cdots, \end{aligned}$$

où on a noté, pour tout entier naturel ℓ non nul,

$$S_\ell = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_N)\in\mathbb{N}^N \\ i_1+\dots+i_N=\ell}} \frac{1}{i_1!\dots i_N!}\cdot$$

Par identification, on en déduit que pour tout entier naturel ℓ non nul on a

$$S_\ell = \frac{N^\ell}{\ell!}\cdot$$

□

Le lemme combinatoire suivant a été déterminant pour prouver le Corollaire 6.3.4.

Lemme A.2.6. *Soient k, r et $\ell_1, \dots, \ell_r$ des entiers naturels non nuls tels que $\ell_1+\dots+\ell_r = k$ et soient des entiers relatifs non nuls $j_1, \dots, j_r$ deux à deux distincts. Le nombre de k-uplets d'entiers relatifs $(i_1, \dots, i_k)$ que l'on peut former avec ℓ_1 entiers égaux à j_1,..., ℓ_r entiers égaux à j_r est égal à*

$$\frac{k!}{\ell_1!\dots\ell_r!}\cdot$$

Démonstration. On veut calculer le nombre de k-uplets que l'on peut former avec les ℓ_1 entiers j_1,..., les ℓ_{r-1} entiers j_{r-1} et les ℓ_r entiers j_r, avec $j_p \neq j_q$ lorsque $p \neq q$. Le nombre de positions différentes que peuvent prendre les ℓ_1 entiers j_1 dans un k-uplet est égale à $\binom{k}{\ell_1}$. Ensuite, pour les ℓ_2 entiers j_2, il reste $k-\ell_1$ places disponibles dans le k-uplet. On en déduit que le nombre de façon de répartir ces entiers est égale à $\binom{k-\ell_1}{\ell_2}$. A la fin, pour les ℓ_r entiers j_r restants, il reste seulement $\binom{k-\ell_1-\dots-\ell_{r-1}}{\ell_r} = 1$ façon de les arranger (car $\ell_1+\dots+\ell_r = k$). Finalement, le nombre de k-uplets que l'on peut construire est égal à

$$\begin{aligned}\binom{k}{\ell_1}\binom{k-\ell_1}{\ell_2}&\dots\binom{k-\ell_1-\dots-\ell_{r-1}}{\ell_r} \\ &= \frac{k!}{\ell_1!(k-\ell_1)!}\cdot\frac{(k-\ell_1)!}{\ell_2!(k-\ell_1-\ell_2)!}\cdots\frac{(k-\ell_1-\dots-\ell_{r-1})!}{\ell_r!(k-\ell_1-\dots-\ell_r)!} \\ &= \frac{k!}{\ell_1!\dots\ell_r!}\cdot\end{aligned}$$

□

Annexe B

Réponse à la Question 2.4.5

Dans le chapitre 2, nous nous sommes posés la question suivante (Question 2.4.5) : étant donné $\alpha \in (0,1]$, peut-on trouver un espace de Hilbert séparable et un opérateur linéaire borné sur cet espace qui admette un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres σ-engendrant et exactement α-hölderien. Nous en avons donné une réponse partielle (Théorème 2.4.6) en construisant un tel champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres pour un opérateur de décalage pondéré $B_{\mathbf{w}}$ sur l'espace $\ell_2(\mathbb{N})$. Ce champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E_α (et plus particulièrement la suite de poids $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$) a été construit(e) à partir d'une fonction f_α paire et 2π-périodique choisie de telle sorte que la suite de ses coefficients de Fourier $(c_j)_{j\geq 1}$ soit strictement positive avec des rapports $\frac{c_{j-1}}{c_j}$ uniformément bornés. Cette méthode ne nous a pas permis de répondre complètement à la question puisqu'à une fonction f_α exactement α-hölderienne correspond un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E_α exactement $(\alpha/2)$-hölderien. En nous inspirant de l'Exemple 2.4.4, nous allons donner une réponse complète [1] à la Question 2.4.5.

Théorème B.0.7. *Soit $\alpha \in (0,1]$. Il existe une suite de nombres réels $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$ strictement positifs telle que l'opérateur de décalage pondéré $B_{\mathbf{w}}$ sur $\ell_2(\mathbb{N})$ admette un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres σ-engendrant et exactement α-hölderien.*

Démonstration. Si $\alpha = 1/2$ ou $\alpha = 1$, le problème a déjà été étudié dans les Exemples 2.4.3 et 2.4.4 respectivement. Soit $\alpha \in]0,1[\setminus\{1/2\}$ et posons $\kappa = \alpha + \frac{1}{2}$. Nous allons montrer qu'il existe un opérateur de décalage pondéré $B_{\mathbf{w}}$ sur $\ell_2(\mathbb{N})$ qui admet un champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres σ-engendrant et exactement α-hölderien. Comme dans l'Exemple 2.4.4, on considère la suite $\mathbf{w} = (w_n)_{n\geq 1}$ définie par $w_1 = 1$ et $w_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^\kappa$ pour tout $n \geq 2$. On définit ensuite le champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E pour $B_{\mathbf{w}}$ en posant

$$E(\lambda) := \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^n}{w_1 \dots w_n} e_n = e_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda^n}{n^\kappa} e_n$$

1. Ce résultat est à attribuer au rapporteur de l'article *Strongly mixing operators on Hilbert spaces and speed of mixing* (soumis à la London Mathematical Society)

pour tout $\lambda \in \mathbb{T}$ et on sait d'après [4, Exemple 3.21] que E est σ-engendrant. Nous montrons maintenant que E est exactement α-hölderien. Pour commencer, montrer que E est au mieux α-hölderien. Soit N un entier naturel non nul et pair et posons $\lambda_N = e^{i\pi/N}$. Il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend pas de l'entier N) telle que pour tout $n \in \{N, \ldots, 3N/2\}$, on ait $|\lambda_N^n - 1| \geq C > 0$. Il vient alors

$$\begin{aligned} ||E(\lambda_N) - E(1)||_2^2 &\geq \sum_{n=N}^{3N/2} \frac{|\lambda_N^n - 1|^2}{n^{2\kappa}} \\ &\geq C^2 \sum_{n=N}^{3N/2} \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \\ &\geq C^2 \int_N^{3N/2+1} \frac{dt}{t^{2\alpha+1}} = \frac{C^2}{2\alpha}\left(\frac{1}{N^{2\alpha}} - \frac{1}{(3N/2+1)^{2\alpha}}\right) \end{aligned}$$

et donc il existe une constante $C_\alpha > 0$ (qui dépend seulement de α) telle que

$$||E(\lambda_N) - E(1)||_2^2 \geq \frac{C_\alpha}{N^{2\alpha}} \geq \frac{C_\alpha}{2^\alpha \pi^{2\alpha}} |\lambda_N - 1|^{2\alpha}.$$

Ceci montre que le champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E pour $B_{\mathbf{w}}$ est au mieux α-hölderien. Montrons ensuite que E est α-hölderien. Pour cela, il suffit de prouver que E est α-hölderien au point 1 (puisque $|\lambda^n - \mu^n| = |(\lambda\overline{\mu})^n - 1|$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$). Soit $\lambda \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$ un nombre complexe proche de 1 et $N = \left\lfloor \frac{1}{|\lambda - 1|} \right\rfloor$. Alors on a

$$\begin{aligned} ||E(\lambda) - E(1)||^2 &= \sum_{n=1}^{N} \frac{|\lambda^n - 1|^2}{n^{2\alpha+1}} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{|\lambda^n - 1|^2}{n^{2\alpha+1}} \\ &:= \mathcal{S}_1(\lambda) + \mathcal{S}_2(\lambda) \end{aligned}$$

où on a noté $\mathcal{S}_1(\lambda)$ la première somme et $\mathcal{S}_2(\lambda)$ la seconde. Nous allons estimer ces deux sommes séparément. En utilisant l'inégalité $|\lambda^n - 1| \leq n|\lambda - 1|$ dans $\mathcal{S}_1(\lambda)$, il vient

$$\mathcal{S}_1(\lambda) \leq |\lambda - 1|^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\alpha-1}}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\alpha-1}} &= (1 - 2\alpha) \sum_{n=1}^{N} \int_1^n \frac{dt}{t^{2\alpha}} + N \\ &= (1 - 2\alpha) \int_1^N \left(\sum_{t<n\leq N} 1 \right) \frac{dt}{t^{2\alpha}} + N \\ &= (1 - 2\alpha) \int_1^N (N - \lfloor t \rfloor) \frac{dt}{t^{2\alpha}} + N, \end{aligned}$$

où $\lfloor t \rfloor$ désigne la partie entière du nombre réel t. Si $\{t\}$ est la partie fractionnaire de t, nous avons aussi

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2\alpha-1}} = N\left(\frac{1}{N^{2\alpha-1}} - 1\right) - \frac{1-2\alpha}{2-2\alpha}\left(\frac{1}{N^{2\alpha-2}} - 1\right) + (1-2\alpha)\int_1^N \frac{\{t\}}{t^{2\alpha-1}}\,dt + N$$
$$\leq \frac{1}{(2-2\alpha)N^{2\alpha-2}} + \left|\frac{1-2\alpha}{2-2\alpha}\right| + \left|\frac{1-2\alpha}{2-2\alpha}\right|\left(\frac{1}{N^{2\alpha-2}} + 1\right).$$

Il existe donc une constante $D_\alpha > 0$ telle que

$$\mathcal{S}_1(\lambda) \leq D_\alpha |\lambda - 1|^{2\alpha}.$$

Nous estimons ensuite la somme $\mathcal{S}_2(\lambda)$ en utilisant la majoration $|\lambda^n - 1| \leq 2$, ce qui nous donne

$$\mathcal{S}_2(\lambda) \leq 4 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \leq 4 \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^{2\alpha+1}} = \frac{2}{\alpha N^{2\alpha}}$$

et donc il existe une constante $E_\alpha > 0$ telle que $\mathcal{S}_2(\lambda) \leq E_\alpha |\lambda - 1|^{2\alpha}$. Les majorations obtenues pour $\mathcal{S}_1(\lambda)$ et $\mathcal{S}_2(\lambda)$ montrent que le champ de $\mathbb{T}$-vecteurs propres E pour $B_{\mathbf{w}}$ est α-hölderien, ce qui démontre le Théorème B.0.7

$\square$

Bibliographie

[1] Badea, C., and Grivaux, S. Size of the peripheral point spectrum under power or resolvent growth conditions. *J. Funct. Anal. 246*, 2 (2007), 302–329.

[2] Badea, C., and Grivaux, S. Unimodular eigenvalues, uniformly distributed sequences and linear dynamics. *Adv. Math. 211*, 2 (2007), 766–793.

[3] Badea, C., and Müller, V. On weak orbits of operators. *Topology Appl. 156*, 7 (2009), 1381–1385.

[4] Bayart, F., and Grivaux, S. Frequently hypercyclic operators. *Trans. Amer. Math. Soc. 358*, 11 (2006), 5083–5117 (electronic).

[5] Bayart, F., and Grivaux, S. Invariant Gaussian measures for operators on Banach spaces and linear dynamics. *Proc. Lond. Math. Soc. (3) 94*, 1 (2007), 181–210.

[6] Bayart, F., and Matheron, E. *Dynamics of linear operators*, vol. 179 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[7] Bayart, F., and Matheron, E. Mixing operators and small subsets of the circle. *Preprint* (2011).

[8] Benyamini, Y., and Lindenstrauss, J. *Geometric nonlinear functional analysis. Vol. 1*, vol. 48 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[9] Boas, Jr., R.-P. *Entire functions*. Academic Press Inc., New York, 1954.

[10] Diestel, J., Jarchow, H., and Tonge, A. *Absolutely summing operators*, vol. 43 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[11] Dinh, T.-C. Decay of correlations for Hénon maps. *Acta Math. 195* (2005), 253–264.

[12] Dinh, T.-C., and Sibony, N. Decay of correlations and the central limit theorem for meromorphic maps. *Comm. Pure Appl. Math. 59*, 5 (2006), 754–768.

[13] Eggleston, H.-G. Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory. *Proc. London Math. Soc. (2) 54* (1952), 42–93.

[14] Eisner, T., and Grivaux, S. Hilbertian Jamison sequences and rigid dynamical systems. *J. Funct. Anal. 261*, 7 (2011), 2013–2052.

[15] ENGEL, K.-J., AND NAGEL, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, vol. 194 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000. With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.

[16] ERDÖS, P., AND TAYLOR, S.-J. On the set of points of convergence of a lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences. *Proc. London Math. Soc. (3) 7* (1957), 598–615.

[17] FETTER, H., AND GAMBOA DE BUEN, B. *The James forest*, vol. 236 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Robert C. James and a prologue by Bernard Beauzamy.

[18] GOWERS, W. A new dichotomy for Banach spaces. *Geom. Funct. Anal. 6*, 6 (1996), 1083–1093.

[19] JAMISON, B. Eigenvalues of modulus 1. *Proc. Amer. Math. Soc. 16* (1965), 375–377.

[20] JANSON, S. *Gaussian Hilbert spaces*, vol. 129 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[21] KALISCH, G.-K. On operators on separable Banach spaces with arbitrary prescribed point spectrum. *Proc. Amer. Math. Soc. 34* (1972), 207–208.

[22] KATOK, A., AND HASSELBLATT, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, vol. 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.

[23] KATZNELSON, Y. *An introduction to harmonic analysis*, third ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[24] KECHRIS, A.-S., AND LOUVEAU, A. *Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness*, vol. 128 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[25] LINDENSTRAUSS, J., AND TZAFRIRI, L. *Classical Banach spaces. I*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92.

[26] MAUREY, B. Banach spaces with very few operators. In *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2*. North-Holland, Amsterdam, 2003, pp. 1247–1297.

[27] NIKOLSKII, N. K. *Selected problems of weighted approximation and spectral analysis*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976. Translated from the Russian by F. A. Cezus.

[28] PELLER, V. *Hankel operators and their applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2003.

[29] RANSFORD, T. Eigenvalues and power growth. *Israel J. Math. 146* (2005), 93–110.

[30] RANSFORD, T., AND ROGINSKAYA, M. Point spectra of partially power-bounded operators. *J. Funct. Anal. 230*, 2 (2006), 432–445.

[31] WALTERS, P. *An introduction to ergodic theory*, vol. 79 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[32] YOUNG, L.-S. Ergodic theory of chaotic dynamical systems. In *XIIth International Congress of Mathematical Physics (ICMP '97) (Brisbane).* Int. Press, Cambridge, MA, 1999, pp. 131–143.

[33] YOUNG, L.-S. Recurrence times and rates of mixing. *Israel J. Math. 110* (1999), 153–188.