Suites numériques

(quelques corrigés)

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{n}{n^2+k}$$

On procède par encadrement. Pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, on a $0 < n^2 \leqslant n^2+k \leqslant n^2+n+1$ puis, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{n^2+n+1} \leqslant \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \text{puis} \qquad \frac{n}{n^2+n+1} \leqslant \frac{n}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n}$$

en multipliant par $n \geqslant 0$. En sommant ces inégalités, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{n}{n^2+n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n+1} \frac{n}{n^2+k} \leqslant \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{(n+2)n}{n^2+n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$$

Or $1 + \dfrac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)n}{n^2+n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n, v_n \in [0,1]$ donc $u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$. Comme $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, le théorème des gendarmes fournit :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

On procède de la même manière pour la suite v.

Exercice 14 La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée donc :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant M$$

On va montrer, en raisonnant par récurrence, qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{\varphi(n)} \geqslant n$$

- ⋆ D'après l'hypothèse (pour $M = 0$), il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geqslant 0$. On pose alors $\varphi(0) = n_0$.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{\varphi(n)} \geqslant n$. On veut montrer qu'il existe un entier noté $\varphi(n+1)$ tel que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} \geqslant n+1$. Remarquons que l'hypothèse faite sur la suite entraîne que la suite $(u_k)_{k\geqslant\varphi(n)+1}$ n'est pas majorée. En effet, si celle-ci était majorée, alors il existerait $M \in \mathbb{R}$ tel que :

  $$\forall k \geqslant \varphi(n)+1, \qquad u_k \leqslant M$$

  et alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ serait majorée par $\max(u_0, u_1, \ldots, u_{\varphi(n)}, M)$, ce qui contredit l'hypothèse. On en déduit qu'il existe un entier $n_0 \geqslant \varphi(n)+1$ tel que $u_{n_0} \geqslant n+1$. On pose alors $\varphi(n+1) = n_0$. On a bien $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.

Par principe de récurrence simple, on a montré qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{\varphi(n)} \geqslant n$$

Ainsi :

$$\boxed{(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite extraite de } u \text{ qui tend vers } +\infty \text{ (théorème de comparaison)}}$$

Exercice 15 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (*i.e.* : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Z}$). On suppose que u est convergente. Montrons que u est stationnaire, c'est-à-dire :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies u_n = u_{n_0}$$

Par hypothèse, la suite u converge. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_\varepsilon \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Pour le choix $\varepsilon = \dfrac{1}{3} > 0$, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$. Alors :

$$\begin{aligned} |u_n - u_{n_0}| = |(u_n - \ell) - (u_{n_0} - \ell)| &\leqslant |u_n - \ell| + |u_{n_0} - \ell| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \frac{2}{3} \end{aligned}$$

car $n \geqslant n_0$ et $n_0 \geqslant n_0$. Comme u est à valeurs entières, on a $|u_n - u_{n_0}| \in \mathbb{N}$ et on vient de montrer que $|u_n - u_{n_0}| \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right]$. Par conséquent, $|u_n - u_{n_0}| = 0$, c'est-à-dire $u_n = u_{n_0}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies u_n = u_{n_0}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{la suite } u \text{ est stationnaire}}$$

Exercice 20 Commençons par montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $x_n \leqslant y_n$.

- ⋆ La propriété est vraie au rang 0 par hypothèse.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $x_n \leqslant y_n$. Montrons que $x_{n+1} \leqslant y_{n+1}$. On a :

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3} - \frac{2x_n + y_n}{3} = \frac{y_n - x_n}{3} \geqslant 0$$

  par hypothèse de récurrence.

Par principe de récurrence simple, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n \leqslant y_n$$

Étudions maintenant le sens de variation des deux suites. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n + y_n}{3} - x_n = \frac{y_n - x_n}{3} \geqslant 0$$

et :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{x_n + 2y_n}{3} - x_n = \frac{x_n - y_n}{3} \leqslant 0$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_0 \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant y_0$$

La première inégalité provient de la croissance de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la troisième provient de la décroissance de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la deuxième a été démontrée par récurrence. Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par y_0) donc elle converge. De la même manière, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ (respectivement $\ell' \in \mathbb{R}$) la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3}$$

donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ (ce qui est licite puisque les suites mises en jeu sont convergentes), on obtient :

$$\ell = \frac{2\ell + \ell'}{3},$$

d'où l'on tire $\ell = \ell'$. Il reste à déterminer la valeur de ℓ. Remarquons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre deux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} x_{n+2} = \frac{2x_{n+1} + y_{n+1}}{3} &= \frac{2x_{n+1}}{3} + \frac{x_n + 2y_n}{9} \\ &= \frac{2x_{n+1}}{3} + \frac{x_n}{9} + \frac{2}{9}(3x_{n+1} - 2x_n) \\ &= \frac{4x_{n+1}}{3} - \frac{x_n}{3} \end{aligned}$$

L'équation caractéristique associée est $x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3} = 0$. Ses racines sont 1 et $\dfrac{1}{3}$. Il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = A + B\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Déterminons enfin A et B en fonction de x_0 et x_1. On a :

$$\left\{\begin{array}{r} A + B = x_0 \\ 3A + B = 3x_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} A = & \frac{3x_1 - x_0}{2} \\ B = & \text{un truc} \end{array}\right.$$

Comme $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A = \dfrac{3x_1 - x_0}{2}$. Par unicité de la limite, on a :

$$\boxed{\ell = \ell' = \frac{3x_1 - x_0}{2}}$$