Suites numériques

(corrigés)

Exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \underbrace{\frac{7^{n+1}}{7^n}}_{=7} \times \frac{1+\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}}{1+\left(\frac{6}{7}\right)^n}$$

Or $\dfrac{6}{7} \in]-1,1[$ donc $\left(\dfrac{6}{7}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 7}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\cos(n) \leqslant 1$ et $-n \leqslant 0$ donc $-n\cos(n) \geqslant -n$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \geqslant n^2 - n + 2 = n(n-1) + 2$$

Or $n(n-1)+2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{\mathrm{sh}(n)}{\sqrt{\mathrm{ch}(n)}} = \frac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\mathrm{e}^n(1-\mathrm{e}^{-2n})}{\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}\sqrt{1+\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}}}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2}} \times \frac{1-\mathrm{e}^{-2n}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}}}$$

Or $\mathrm{e}^{-2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2n}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. De plus, $\mathrm{e}^n 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc (opérations sur les limites) :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise l'expression conjuguée :

$$u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} = \frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'expression conjuguée, on a :

$$u_n = \frac{2^n - 1}{\sqrt{\mathrm{e}^n + 2^n} + \sqrt{\mathrm{e}^n + 1}} = \frac{2^n\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{\mathrm{e}^{\frac{n}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}}\right)}$$
$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}}}$$

Or on sait que $2 < \mathrm{e} < 3 < 4$ donc $0 < \sqrt{\mathrm{e}} < 2$. Ainsi, $\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}} > 1$. On en déduit que $\left(\dfrac{2}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De plus $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n}+\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

D'après les opérations sur les limites, on a donc :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\sqrt{n} - 1 \leqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leqslant \sqrt{n}$ et donc, en divisant par $n > 0$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or :
$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
donc, d'après le théorème des gendarmes,
$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$ donc $-1 \leqslant 1+2\sin(n) \leqslant 3$ puis, en multipliant par $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 0$:
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad -\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{\sqrt{n}}$$
Or $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{3}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes :
$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on a :
$$0 \leqslant u_n = \frac{n(n-1)\cdots 2\times 1}{n^n} = \frac{1}{n}\underbrace{\prod_{k=2}^{n}\underbrace{\frac{k}{n}}_{\leqslant 1}}_{\leqslant 1} \leqslant \frac{1}{n}$$
Comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le théorème des gendarmes nous donne :
$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$u_n = \exp\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \exp\left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right]$$
La fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 (elle est en fait dérivable sur $]-1,+\infty[$) donc :
$$\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x} \xrightarrow[x\to0]{} f'(0) \qquad i.e. \qquad \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$$
Comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On conclut donc que :
$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a (en factorisant par $\mathrm{e}^{\,n}$ dans le logarithme) :
$$\ln(1+n+\mathrm{e}^{\,n}) = \ln(\mathrm{e}^{\,n}) + \ln(\mathrm{e}^{\,-n}+n\,\mathrm{e}^{\,-n}+1) = n + \ln(\mathrm{e}^{\,-n}+n\,\mathrm{e}^{\,-n}+1)$$
donc :
$$u_n = \left(\sqrt{n}\right)^2\mathrm{e}^{\,-\sqrt{n}} + \mathrm{e}^{\,-\sqrt{n}}\ln(\mathrm{e}^{\,-n}+n\,\mathrm{e}^{\,-n}+1)$$
Comme $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $x^2\,\mathrm{e}^{\,-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (par croissances comparées), on a $\left(\sqrt{n}\right)^2\mathrm{e}^{\,-\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De plus :
$$\mathrm{e}^{\,-n}+n\,\mathrm{e}^{\,-n}+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{donc} \qquad \ln(\mathrm{e}^{\,-n}+n\,\mathrm{e}^{\,-n}+1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
De plus, $\mathrm{e}^{\,-\sqrt{n}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $\mathrm{e}^{\,-\sqrt{n}}\ln(\mathrm{e}^{\,-n}+n\,\mathrm{e}^{\,-n}+1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Finalement :
$$\boxed{u_n \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

Exercice 4 Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives, les inégalités se réécrivent :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}a_n$$
Ainsi, on a $a_1 \leqslant \dfrac{b_1}{b_0}a_0$ puis :
$$a_2 \leqslant \frac{b_2}{b_1}a_1 \leqslant \frac{b_2}{b_1}\times\frac{b_1}{b_0}a_0$$
d'après l'inégalité précédente et car $\dfrac{b_2}{b_1} \geqslant 0$, *i.e.* $a_2 \leqslant \dfrac{b_2}{b_0}a_0$. Pour a_3, on obtient $a_3 \leqslant \dfrac{b_3}{b_0}a_0$. Montrons alors par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant a_n \leqslant \frac{b_n}{b_0}a_0$$
L'inégalité de gauche est immédiate car la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs (strictement) positives.

- ⋆ Il n'y a rien à démontrer pour $n=0$ (les deux nombres mis en jeu dans l'inégalité sont égaux et valent a_0).

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a_n \leqslant \frac{b_n}{b_0} a_0$. Montrons que $a_{n+1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_0} a_0$. On sait que :

$$a_{n+1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n$$

Or $a_n \leqslant \frac{b_n}{b_0} a_0$ par hypothèse de récurrence et on a $\frac{b_{n+1}}{b_n} \geqslant 0$ (car la suite $(b_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives) donc :

$$a_{n+1} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \times \frac{b_n}{b_0} a_0 = \frac{b_{n+1}}{b_0} a_0$$

L'inégalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant a_n \leqslant \frac{b_n}{b_0} a_0}$$

Par hypothèse, on sait que $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\frac{b_n}{b_0} a_0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Les inégalités précédentes et le théorème des gendarmes impliquent que :

$$\boxed{a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

Exercice 5

1. La fonction $f : t \longmapsto \frac{1}{t\ln(t)}$ est bien définie et est décroissante sur $[2, +\infty[$. En effet, f est dérivable sur cet intervalle et :

$$\forall t \in [2, +\infty[, \qquad f'(t) = -\frac{1 \times \ln(t) + t \times \frac{1}{t}}{t^2 \ln(t)^2} = -\frac{\ln(t)+1}{t^2\ln(t)^2} \leqslant 0$$

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. Comme f est décroissante sur $[k, k+1] \subset [2, +\infty[$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \qquad f(t) \leqslant f(k)$$

Donc (par croissance de l'intégrale) :

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t = \Big[f(k)t\Big]_k^{k+1} = f(k)(k+1-k) = f(k)$$

De même, f est décroissante sur $[k-1, k] \subset [2, +\infty[$ (car $k \geqslant 3$) donc

$$\forall t \in [k-1, k], \qquad f(k) \leqslant f(t)$$

puis :

$$f(k) = \int_{k-1}^k f(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}, \qquad \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^k f(t)\,\mathrm{d}t},$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente sur les entiers $k \in [\![3, n]\!]$, on a :

$$\sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant \sum_{k=3}^n \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$$

c'est-à-dire, en utilisant la relation de Chasles pour les intégrales :

$$\int_3^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant u_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$$

Une primitive de f sur $[2, +\infty[$ est $t \longmapsto \ln(\ln(t))$ donc les inégalités précédentes se réécrivent :

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leqslant u_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

et, comme $\ln(\ln(n+1)) \geqslant \ln(\ln(n))$ (par croissance de $\ln \circ \ln$ sur $[2, +\infty[$), on a :

$$\ln(\ln(n)) \underbrace{- \ln(\ln(3)) + \frac{1}{2\ln(2)}}_{\text{noté } A} \leqslant u_n \leqslant \ln(\ln(n)) \underbrace{- \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}}_{\text{noté } B}$$

Pour tout $n \geqslant 3$, on a $\ln(\ln(n)) > 0$ (car $n > \mathrm{e}$) donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}, \qquad 1 + \frac{A}{\ln(\ln(n))} \leqslant \frac{u_n}{\ln(\ln(n))} \leqslant 1 + \frac{B}{\ln(\ln(n))}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln(\ln(n))} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\frac{u_n}{\ln(\ln(n))} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1}$$

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n, v_n \in [0,1]$ donc $u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$. Comme $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, le théorème des gendarmes fournit :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

On procède de la même manière pour la suite v.

Exercice 12

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k\,!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} = \frac{1}{(n+1)\,!} > 0$$

et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)\,!} - \frac{1}{n \times n\,!} \\ &= \frac{1}{(n+1)\,!} + \frac{1}{(n+1)\times(n+1)\,!} - \frac{1}{n\times n\,!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)\times(n+1)\,!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)\times(n+1)\,!} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est (strictement) croissante tandis que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est (strictement) décroissante. De plus :

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \times n\,!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes}}$$

2. D'après le théorème sur les suites adjacentes, les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent de limite commune ; on note $\ell \in \mathbb{R}$ cette limite. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \in \mathbb{Q}$. On a $\ell \geqslant 0$ (car les suites sont à valeurs positives) donc il existe $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ tel que $\ell = \dfrac{p}{q}$. D'après la monotonie des deux suites, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n < \frac{p}{q} < v_n,$$

i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!} + \frac{1}{n\times n\,!}$$

Pour $n = q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k\,!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k\,!} + \frac{1}{q\times q\,!}$$

En multipliant par $q\,! > 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{q\,!}{k\,!} < p(q-1)\,! < \sum_{k=0}^{q} \frac{q\,!}{k\,!} + \frac{1}{q} \qquad \textit{i.e.} \qquad 0 < \sum_{k=0}^{q} \frac{q\,!}{k\,!} - p(q-1)\,! < \frac{1}{q} < 1$$

Or pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\dfrac{q\,!}{k\,!} \in \mathbb{N}$ (car $k \leqslant q$) donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q\,!}{k\,!} - p(q-1)\,! \in \mathbb{Z}$. Cet entier appartient à l'intervalle $]0,1[$, ce qui est absurde. Finalement :

$$\boxed{\ell \notin \mathbb{Q}}$$

Exercice 13 Soient $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+2} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) - 2^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

Or :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

donc :

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+2} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \underbrace{\left[1 - \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right]}_{\geqslant 0}$$

Comme $\dfrac{\theta}{2^{n+1}} \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$, on a $\sin\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right) \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. De même :

$$v_{n+1} - v_n = 2^{n+2} \tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) - 2^{n+1} \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

Or $\tan\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right) = \tan\left(2\times\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ et $\dfrac{\theta}{2^{n+1}} \in \left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ donc, comme :

$$\forall a \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[, \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan(a)^2},$$

on a :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{1-\tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}$$

Ainsi :

$$v_{n+1} - v_n = 2^{n+2}\tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\left[1 - \frac{1}{1-\tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}\right]$$

Or $0 \leqslant \dfrac{\theta}{2^{n+1}} < \dfrac{\pi}{4}$ donc $0 \leqslant \tan\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right) < 1$ (par croissance stricte de la fonction tangente) puis :

$$0 < 1 - \tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \leqslant 1$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $\dfrac{1}{1-\tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} \geqslant 1$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante tandis que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

⋆ On calcule directement les limites des deux suites. La fonction sinus étant dérivable en 0, on a :

$$\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} \sin'(0) \qquad \textit{i.e.} \qquad \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Comme $\dfrac{\theta}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a :

$$u_n = 2\theta \times \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\frac{\theta}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\theta$$

De la même manière, on montre que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\theta$. En particulier, on a donc $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Finalement :

$$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes et leur limite commune est } 2\theta}$$

Exercice 18

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée donc :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+,\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant M$$

On va montrer, en raisonnant par récurrence, qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{\varphi(n)} \geqslant n$$

- ⋆ D'après l'hypothèse (pour $M = 0$), il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geqslant 0$. On pose alors $\varphi(0) = n_0$.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{\varphi(n)} \geqslant n$. On veut montrer qu'il existe un entier noté $\varphi(n+1)$ tel que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} \geqslant n+1$. Remarquons que l'hypothèse faite sur la suite entraîne que la suite $(u_k)_{k\geqslant\varphi(n)+1}$ n'est pas majorée. En effet, si celle-ci était majorée, alors il existerait $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \geqslant \varphi(n)+1, \qquad u_k \leqslant M$$

  et alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ serait majorée par $\max(u_0, u_1, \dots, u_{\varphi(n)}, M)$, ce qui contredit l'hypothèse. On en déduit qu'il existe un entier $n_0 \geqslant \varphi(n)+1$ tel que $u_{n_0} \geqslant n+1$. On pose alors $\varphi(n+1) = n_0$. On a bien $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.

Par principe de récurrence simple, on a montré qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{\varphi(n)} \geqslant n$$

Ainsi :

$$\boxed{(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite extraite de } u \text{ qui tend vers } +\infty \text{ (théorème de comparaison)}}$$

Exercice 20

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ; on note $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Montrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également de limite ℓ, *i.e.* que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant n_\varepsilon \implies |v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ donc il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant n_\varepsilon \implies |u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_\varepsilon$. Alors :

$$\begin{aligned} v_n - \ell &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_\varepsilon - 1}(u_k - \ell) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_\varepsilon}^{n}(u_k - \ell) \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient en posant $M_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon - 1} (u_k - \ell)$:

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{|M_\varepsilon|}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=n_\varepsilon}^{n} \underbrace{|u_k - \ell|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}} \leqslant \frac{|M_\varepsilon|}{n} + \underbrace{\frac{1}{n} \times (n - n_\varepsilon + 1)}_{\leqslant 1} \times \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leqslant \frac{|M_\varepsilon|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme $\frac{|M_\varepsilon|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant n'_\varepsilon \implies 0 \leqslant \frac{|M_\varepsilon|}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons alors $N_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon) \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant N_\varepsilon$, on a :

$$|v_n - \ell| \leqslant \frac{|M_\varepsilon|}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Finalement :

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell}$$

2. La réciproque est fausse. En effet, posons $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = -\frac{1}{n} \times \frac{(-1)^n - 1}{2}$$

qui est le terme général d'une suite convergente de limite 0. Ainsi :

$$\boxed{\text{la réciproque est fausse}}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{\ln(n)}{n}}$. On a $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. La question 1. implique donc que :

$$\boxed{\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

4. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrons que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On doit donc montrer que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \exists n_A \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant n_A \implies v_n \geqslant A$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe $n_A \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant n_A \implies u_n \geqslant 2A + 2$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_A$. Alors :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_A - 1} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=n_A}^{n} \underbrace{u_k}_{\geqslant 2A+2} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_A-1} u_k + \frac{n - n_A + 1}{n}(2A + 21)$$
$$\geqslant$$

Si $n \geqslant 2n_A$, alors $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2n_A}$ et donc $\frac{n_A}{n} \leqslant \frac{1}{2}$. Pour un tel entier, on a donc :

$$\frac{n - n_A + 1}{n} \geqslant \frac{n - n_A}{n} = 1 - \frac{n_A}{n} \geqslant \frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant 2n_A \implies \frac{n - n_A + 1}{n}(2A + 2) \geqslant A + 1$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant 2n_A \implies v_n \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_A-1} u_k + A + 1$$

On a maintenant $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_A-1} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que (on choisit $\varepsilon = 1 > 0$ dans la définition de la convergence) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant n_0 \implies \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_A-1} u_k\right| \leqslant 1$$

En particulier, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, on a $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_A-1} u_k \geqslant -1$. En posant finalement $N_A = \max(2n_A, n_0) \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant n_A \implies v_n \geqslant -1 + (A + 1) = A$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

Exercice 21

1. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On distingue trois cas.

★ **Premier cas :** $u_0 = 0$

Par une récurrence immédiate, on obtient que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle. En particulier, cette suite converge de limite 0.

★ **Deuxième cas :** $u_0 > 0$

Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n^2} \leqslant 1$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente. En notant $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite, on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence :

$$\ell = \frac{\ell}{1+\ell^2} \qquad i.e. \qquad \ell\left(1 - \frac{1}{1+\ell^2}\right) = 0,$$

ce qui donne comme unique possibilité $\ell = 0$. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

★ **Troisième cas :** $u_0 < 0$

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n^2} \leqslant 1 \qquad \text{puis} \qquad u_{n+1} \geqslant u_n$$

en multipliant par $u_n < 0$. La suite étant de plus majorée par 0, elle est convergente. Le même raisonnement que celui mené au deuxième point permet d'obtenir que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2.

3. Une étude de la fonction $f : x \longmapsto x - \mathrm{Arctan}(x)$ montre que f s'annule uniquement en 0 et :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_-,\ x \leqslant \mathrm{Arctan}(x)) \qquad \text{et} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{Arctan}(x) \leqslant x)$$

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On distingue trois cas.

★ **Premier cas :** $u_0 = 0$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle donc elle converge vers 0.

★ **Deuxième cas :** $u_0 > 0$

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 0$. Les inégalité précédentes montrent alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de plus minorée par 0, elle converge. Sa limite notée $\ell \in \mathbb{R}$ est telle que $f(\ell) = 0$ donc $\ell = 0$. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

★ **Troisième cas :** $u_0 < 0$

Ici, on montre (par récurrence) que la suite est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$. On en déduit que la suite est de plus croissante donc elle est convergente. À nouveau, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

4. Tout d'abord, la suite est bien définie car $\mathbb{R}_+$ est stable par l'application f (on a donc $1 + u_n \geqslant 1 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). De plus, on sait que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \qquad \ln(1+x) \leqslant x$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Elle est de plus minorée par 0 donc elle est convergente (d'après le théorème de la limite monotone). Notons $\ell \in \mathbb{R}_+$ la limite de la suite. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence vérifiée par la suite, on obtient l'égalité $\ln(1+\ell) = \ell$. Or, une étude de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x) - x$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ (ou sur $\mathbb{R}_+$) montre que son seul point d'annulation est 0. Ainsi, $\ell = 0$ et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 22

★ À l'aide d'un raisonnement par récurrence (récurrence forte), montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est à valeurs positives.

— On a $u_0 = 1 \geqslant 0$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_0, \dots, u_n$ sont des nombres positifs. Alors $u_0 + \cdots + u_n \in \mathbb{R}_+$ et donc $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + \cdots + u_n}$ est bien défini et est positif (puisque la fonction racine carrée est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$).

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie et à valeurs positives.

★ Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On $u_{n+1} \geqslant 0$ d'après ce qui précède donc :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n \leqslant u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}$$

puis, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n} \leqslant \sqrt{u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1}} \qquad i.e. \qquad u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. On a aussi $u_1 = \sqrt{u_0} = 1 = u_0$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

★ D'après le théorème de la limite monotone, ou bien la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, ou bien $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Par croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\ell \geqslant u_0$, *i.e.* $\ell \geqslant 1$. Par ailleurs, on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1}^2 = u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n,$$

i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette relation de récurrence, on obtient $\ell^2 = \ell^2 + \ell$, *i.e.* $\ell = 0$, ce qui est exclus.

Finalement :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

Exercice 24 Commençons par montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $x_n \leqslant y_n$.

- ⋆ La propriété est vraie au rang 0 par hypothèse.
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $x_n \leqslant y_n$. Montrons que $x_{n+1} \leqslant y_{n+1}$. On a :

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3} - \frac{2x_n + y_n}{3} = \frac{y_n - x_n}{3} \geqslant 0$$

  par hypothèse de récurrence.

Par principe de récurrence simple, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n \leqslant y_n$$

Étudions maintenant le sens de variation des deux suites. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n + y_n}{3} - x_n = \frac{y_n - x_n}{3} \geqslant 0$$

et :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{x_n + 2y_n}{3} - x_n = \frac{x_n - y_n}{3} \leqslant 0$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_0 \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant y_0$$

La première inégalité provient de la croissance de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la troisième provient de la décroissance de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la deuxième a été démontrée par récurrence. Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par y_0) donc elle converge. De la même manière, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ (respectivement $\ell' \in \mathbb{R}$) la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3}$$

donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ (ce qui est licite puisque les suites mises en jeu sont convergentes), on obtient :

$$\ell = \frac{2\ell + \ell'}{3},$$

d'où l'on tire $\ell = \ell'$. Il reste à déterminer la valeur de ℓ. Remarquons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre deux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} x_{n+2} = \frac{2x_{n+1} + y_{n+1}}{3} &= \frac{2x_{n+1}}{3} + \frac{x_n + 2y_n}{9} \\ &= \frac{2x_{n+1}}{3} + \frac{x_n}{9} + \frac{2}{9}(3x_{n+1} - 2x_n) \\ &= \frac{4x_{n+1}}{3} - \frac{x_n}{3} \end{aligned}$$

L'équation caractéristique associée est $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$. Ses racines sont 1 et $\frac{1}{3}$. Il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = A + B\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Déterminons enfin A et B en fonction de x_0 et x_1. On a :

$$\begin{cases} A + B = x_0 \\ 3A + B = 3x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{3x_1 - x_0}{2} \\ B = \text{ un truc} \end{cases}$$

Comme $\left(\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A = \frac{3x_1 - x_0}{2}$. Par unicité de la limite, on a :

$$\boxed{\ell = \ell' = \frac{3x_1 - x_0}{2}}$$

Exercice 25

- ⋆ Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre v_n est bien défini et qu'on a les inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant v_n \leqslant u_n$$

  — Par hypothèse, on sait que $0 < v_0 < u_0$ donc la propriété est vérifiée au rang $n = 0$.

  — Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leqslant v_n \leqslant u_n$. Alors $u_n v_n \geqslant 0$ et donc le nombre $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ est bien défini et est positif. De plus :

$$u_{n+1} - v_n = \frac{\left(\sqrt{u_n}\right)^2 + \left(\sqrt{v_n}\right)^2 - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{2} = \frac{\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2}{2} \geqslant 0$$

  La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$.

  Par principe récurrence simple, on peut conclure que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant v_n \leqslant u_n$$

- ⋆ Ces inégalités permettent d'en déduire le sens de variation des deux suites. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant \frac{u_n + u_n}{2} = u_n$$

  et $u_n v_n \geqslant v_n^2$ (car $u_n \geqslant v_n$ et car $v_n \geqslant 0$) donc (par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$)

$$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{v_n^2} = |v_n| = v_n \qquad (\text{car } v_n \geqslant 0)$$

  On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, tandis que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

★ Il reste à montrer que $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il suffit de démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite. Les monotonies des suites et les inégalités obtenues au deuxième point montrent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_0 \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant u_0$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par u_0 donc elle est convergente (d'après le théorème de la limite monotone). De même, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ les limites respectives des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},$$

on obtient $\ell = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$, *i.e.* $\ell = \ell'$.

Finalement :

$$\boxed{\text{les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes}}$$

Exercice 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k \end{array}\right.$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ (en tant que fonction polynomiale) et elle y est strictement croissante (comme somme de fonctions qui le sont). D'après le théorème de la bijection, la fonction f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle :

$$f_n(\mathbb{R}_+) = \left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$$

Ainsi, $1 \in \mathbb{R}_+ = f_n(\mathbb{R}_+)$ admet un unique antécédent par l'application f_n dans $\mathbb{R}_+$. Finalement :

$$\boxed{\text{l'équation proposée admet une unique solution } x_n \text{ dans } \mathbb{R}_+}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de x_n, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_n^k = 1$.
   - ★ Si $x_n = 1$, alors l'égalité $x_n^{n+1} = 2x_n - 1$ est satisfaite.
   - ★ Sinon, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} x_n^k = x_n \times \frac{x_n^n - 1}{x_n - 1} \qquad \text{donc} \qquad \frac{x_n^{n+1} - x_n}{x_n - 1} = 1$$

   Ainsi, $x_n^{n+1} - x_n = x_n - 1$, d'où l'on tire l'égalité annoncée.

   Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n^{n+1} = 2x_n - 1}$$

3. ★ Étudions les variations de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{k=1}^{n} x^k = x^{n+1} \geqslant 0$$

   En particulier :

$$f_{n+1}(x_n) \geqslant f_n(x_n) = 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

   La fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ donc $x_n \geqslant x_{n+1}$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Elle est de plus minorée par 0 (tous les termes de la suite appartenant à $\mathbb{R}_+$) donc la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge (d'après le théorème de la limite monotone).

   ★ Calculons x_2. Par définition, x_2 est la solution positive de l'équation du second degré $x^2 + x - 1 = 0$ donc $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Comme $\sqrt{5} < 3$ (car $5 < 9$), on a $x_2 < 1$. La décroissance de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ implique que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \qquad x_n \leqslant x_2$$

   ★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leqslant x_n^{n+1} = x_2^{n+1}$. Or $x_2 \in [0, 1[$ donc $x_2^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème des gendarmes (et en utilisant la relation obtenue à la question 2.), on a :

$$2x_n - 1 = x_n^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   Finalement :

$$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge de limite égale à } \frac{1}{2}}$$

Exercice 29

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
   - ★ Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\ell = 2\ell + 1 \iff \ell = -1$$

   - ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $\ell = 2\ell + 1$. En soustrayant membre à membre, on obtient :

$$u_{n+1} - \ell = 2u_n + 1 - (2\ell + 1) = 2(u_n - \ell)$$

   La suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 2. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n - \ell = 2^n(u_0 - \ell) = 2^n$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = -1 + 2^n}$$

2. On obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = 2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

3. On obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{5^n - 1}{4}}$$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
   - ⋆ L'équation caractéristique associée $x^2 - x + 1 = 0$ a pour racines $\mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = A\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + B\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

   - ⋆ La résolution du système formé par les conditions $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ fournit les valeurs $A = 1$ et $B = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

   Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}$$

7. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.
   - ⋆ L'équation caractéristique associée $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$ a pour racine double $\frac{3}{2}$ donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (An + B)\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

   - ⋆ La résolution du système formé par les conditions $u_0 = 3$ et $u_1 = 3$ fournit les valeurs $B = 3$ et $A = -1$.

   Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (-n + 3)\left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

Exercice 30

1. On a $u_0 > 0$ et, on vérifie par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. On peut alors définir la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \ln(u_{n+1}) = \ln(2) + 2\ln(u_n) \qquad i.e. \qquad v_{n+1} = 2v_n + \ln(2)$$

et $v_0 = \ln(u_0) = 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique. La résolution classique fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = (2^n - 1)\ln(2) = \ln\left(2^{2^n - 1}\right)$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \mathrm{e}^{v_n} = 2^{2^n - 1}}$$

2. En utilisant une récurrence double, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \ln(u_{n+2}) = 6\ln(u_{n+1}) - 5\ln(u_n) \qquad i.e. \qquad v_{n+2} = 6v_{n+1} - 5v_n$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2. De plus, $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$. La résolution classique fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{5^n - 1}{4}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \exp\left(\frac{5^n - 1}{4}\right)}$$

Exercice 32

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$3x_{n+3} - 3x_{n+2} = -2x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = -2(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n)$$

i.e. :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 3v_{n+2} = -2v_{n+1} - v_n}$$

2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2. En posant :

$$\alpha = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3},$$

la résolution classique nous donne l'existence de deux nombres complexes A et B tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x_n - x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (A\alpha^k + B\beta^k)$$

Comme α et β sont différents de 1, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n = x_0 + A\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} + B\frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}}$$