

SUITES NUMÉRIQUES

(corrigés)

Exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \underbrace{\frac{7^{n+1}}{7^n}}_{=7} \times \frac{1 + \left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{6}{7}\right)^n}$$

Or $\frac{6}{7} \in]-1, 1[$ donc $\left(\frac{6}{7}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 7}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\cos(n) \leq 1$ et $-n \leq 0$ donc $-n \cos(n) \geq -n$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq n^2 - n + 2 = n(n-1) + 2$$

Or $n(n-1) + 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh}(n)}{\sqrt{\text{ch}(n)}} &= \frac{e^n - e^{-n}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^n + e^{-n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{e^n(1 - e^{-2n})}{e^{\frac{n}{2}} \sqrt{1 + e^{-\frac{n}{2}}}} \\ &= \frac{e^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{2}} \times \frac{1 - e^{-2n}}{\sqrt{1 + e^{-\frac{n}{2}}}} \end{aligned}$$

Or $e^{-2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $e^{-\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{1 - e^{-2n}}{\sqrt{1 + e^{-\frac{n}{2}}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. De plus,

$e^{\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc (opérations sur les limites) :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} = \frac{2n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant l'expression conjuguée, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2^n - 1}{\sqrt{e^n + 2^n} + \sqrt{e^n + 1}} = \frac{2^n \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{e^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{2}{e}\right)^n} + \sqrt{1 + e^{-n}}\right)} \\ &= \left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right)^n \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{e}\right)^n} + \sqrt{1 + e^{-n}}} \end{aligned}$$

Or on sait que $2 < e < 3 < 4$ donc $0 < \sqrt{e} < 2$. Ainsi, $\frac{2}{\sqrt{e}} > 1$. On en déduit que

$\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. De plus $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\left(\frac{2}{e}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc :

$$\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{e}\right)^n} + \sqrt{1 + e^{-n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

D'après les opérations sur les limites, on a donc :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\sqrt{n} - 1 \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n}$ et donc, en divisant par $n > 0$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc $-1 \leq 1 + 2\sin(n) \leq 3$ puis, en multipliant par $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{3}{\sqrt{n}}$$

Or $-\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{3}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

8. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a :

$$0 \leq u_n = \frac{n(n-1) \cdots 2 \times 1}{n^n} = \frac{1}{n} \prod_{k=2}^n \underbrace{\frac{k}{n}}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n}$$

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, le théorème des gendarmes nous donne :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \exp \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \exp \left[\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \right]$$

La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 (elle est en fait dérivable sur $] -1, +\infty[$) donc :

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0) \quad i.e. \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. On conclut donc que :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a (en factorisant par e^n dans le logarithme) :

$$\ln(1 + n + e^n) = \ln(e^n) + \ln(e^{-n} + n e^{-n} + 1) = n + \ln(e^{-n} + n e^{-n} + 1)$$

donc :

$$u_n = (\sqrt{n})^2 e^{-\sqrt{n}} + e^{-\sqrt{n}} \ln(e^{-n} + n e^{-n} + 1)$$

Comme $\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $x^2 e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (par croissances comparées), on a $(\sqrt{n})^2 e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De plus :

$$e^{-n} + n e^{-n} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{donc} \quad \ln(e^{-n} + n e^{-n} + 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

De plus, $e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $e^{-\sqrt{n}} \ln(e^{-n} + n e^{-n} + 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Finalement :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$$

Exercice 2

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^e (\ln(t)^{n+1} - \ln(t)^n) dt = \int_1^e \ln(t)^n (\ln(t) - 1) dt$$

Soit $t \in [1, e]$. La fonction $\ln$ étant croissante sur $[1, e]$, on a $0 \leq \ln(t) \leq 1$ et donc :

$$\forall t \in [1, e], \quad \ln(t)^n (\ln(t) - 1) \leq 0$$

Par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_1^e \ln(t)^n (\ln(t) - 1) dt \leq 0 \quad i.e. \quad I_{n+1} - I_n \leq 0$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [1, e]$. On a $\ln(t) \geq 0$ donc $\ln(t)^n \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que :

$$I_n = \int_1^e \ln(t)^n dt \geq 0$$

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc minorée par 0. Comme elle est de plus décroissante, le théorème de la limite monotone implique que :

la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise une intégration par parties en considérant :

$$I_{n+1} = \int_1^e 1 \times \ln(t)^{n+1} dt$$

En posant :

$$\begin{aligned} u'(t) &= 1 & v(t) &= \ln(t)^{n+1} \\ u(t) &= t & v'(t) &= \frac{n+1}{t} \ln(t)^n \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[t \ln(t)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e (n+1) \ln(t)^n dt \\ &= e - (n+1) \int_1^e \ln(t)^n dt \end{aligned}$$

Ainsi :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

D'après la question 1.(a), la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente; notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. On a $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $I_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et la relation de récurrence ci-dessus se réécrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{e}{n+1} - \frac{I_{n+1}}{n+1} \quad (*)$$

Comme $\frac{e}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{I_{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (opérations sur les limites), on obtient $\ell = 0$ en faisant tendre n vers $+\infty$ dans (*). Finalement :

$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1} I_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} (e - (n+1)I_n) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + \frac{(-1)^n I_n}{n!} \end{aligned}$$

Ainsi :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + u_n$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad u_{k+1} - u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} e$$

En sommant ces égalités, on obtient :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = e \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \right) = e \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \right)$$

car la somme de gauche est télescopique. Or :

$$u_0 = \frac{(-1)^0 I_0}{0!} = I_0 = \int_1^e 1 dt = e - 1$$

Ainsi :

$$u_n = \underbrace{e}_{\ell=0} - 1 + e \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \right) = e \left(\sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \right) - 1$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} (u_n + 1)$$

Or $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{(-1)^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0) donc (opération sur les limites) :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n!} \times I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On conclut donc que :

$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$

Exercice 4 Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives, les inégalités se réécrivent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n$$

Ainsi, on a $a_1 \leq \frac{b_1}{b_0} a_0$ puis :

$$a_2 \leq \frac{b_2}{b_1} a_1 \leq \frac{b_2}{b_1} \times \frac{b_1}{b_0} a_0$$

d'après l'inégalité précédente et car $\frac{b_2}{b_1} \geq 0$, i.e. $a_2 \leq \frac{b_2}{b_0} a_0$. Pour a_3 , on obtient $a_3 \leq \frac{b_3}{b_0} a_0$. Montrons alors par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_n \leq \frac{b_n}{b_0} a_0$$

L'inégalité de gauche est immédiate car la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs (strictement) positives.

★ Il n'y a rien à démontrer pour $n = 0$ (les deux nombres mis en jeu dans l'inégalité sont égaux et valent a_0).

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $a_n \leq \frac{b_n}{b_0} a_0$. Montrons que $a_{n+1} \leq \frac{b_{n+1}}{b_0} a_0$. On sait que :

$$a_{n+1} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n$$

Or $a_n \leq \frac{b_n}{b_0} a_0$ par hypothèse de récurrence et on a $\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq 0$ (car la suite $(b_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives) donc :

$$a_{n+1} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} a_n \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \times \frac{b_n}{b_0} a_0 = \frac{b_{n+1}}{b_0} a_0$$

L'inégalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_n \leq \frac{b_n}{b_0} a_0$$

Par hypothèse, on sait que $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{b_n}{b_0} a_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Les inégalités précédentes et le théorème des gendarmes impliquent que :

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Exercice 5

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ est bien définie et est décroissante sur $[2, +\infty[$. En effet, f est dérivable sur cet intervalle et :

$$\forall t \in [2, +\infty[, \quad f'(t) = -\frac{1 \times \ln(t) + t \times \frac{1}{t}}{t^2 \ln(t)^2} = -\frac{\ln(t) + 1}{t^2 \ln(t)^2} \leq 0$$

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Comme f est décroissante sur $[k, k+1] \subset [2, +\infty[$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad f(t) \leq f(k)$$

Donc (par croissance de l'intégrale) :

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt$$

Or :

$$\int_k^{k+1} f(k) dt = [f(k)t]_k^{k+1} = f(k)(k+1-k) = f(k)$$

De même, f est décroissante sur $[k-1, k] \subset [2, +\infty[$ (car $k \geq 3$) donc

$$\forall t \in [k-1, k], \quad f(k) \leq f(t)$$

puis :

$$f(k) = \int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \quad \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente sur les entiers $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$, on a :

$$\sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln(t)} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \sum_{k=3}^n \int_{k-1}^k \frac{dt}{t \ln(t)}$$

c'est-à-dire, en utilisant la relation de Chasles pour les intégrales :

$$\int_3^{n+1} \frac{dt}{t \ln(t)} \leq u_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \int_2^n \frac{dt}{t \ln(t)}$$

Une primitive de f sur $[2, +\infty[$ est $t \mapsto \ln(\ln(t))$ donc les inégalités précédentes se réécrivent :

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq u_n - \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2))$$

et, comme $\ln(\ln(n+1)) \geq \ln(\ln(n))$ (par croissance de $\ln \circ \ln$ sur $[2, +\infty[$), on a :

$$\underbrace{\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(3)) + \frac{1}{2 \ln(2)}}_{\text{noté } A} \leq u_n \leq \underbrace{\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}}_{\text{noté } B}$$

Pour tout $n \geq 3$, on a $\ln(\ln(n)) > 0$ (car $n > e$) donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}, \quad 1 + \frac{A}{\ln(\ln(n))} \leq \frac{u_n}{\ln(\ln(n))} \leq 1 + \frac{B}{\ln(\ln(n))}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(\ln(n))} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\frac{u_n}{\ln(\ln(n))} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$$

Exercice 4

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $1 \leq k \leq n$ donc $0 \leq n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n$. La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$0 < \sqrt{n^2 + 1} \leq \sqrt{n^2 + k} \leq \sqrt{n^2 + n}$$

Ensuite, la fonction inverse décroît sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

En sommant ces inégalités sur les entiers $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il vient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}}$$

et, de la même manière, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}}$$

2. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{|n| \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 0$$

On a également $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes,

la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente de limite 0

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{n}{n^2 + k}$$

On procède par encadrement. Pour tout $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, on a $0 < n^2 \leq n^2 + k \leq n^2 + n + 1$ puis, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{n^2 + n + 1} \leq \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{puis} \quad \frac{n}{n^2 + n + 1} \leq \frac{n}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n}$$

en multipliant par $n \geq 0$. En sommant ces inégalités, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{n}{n^2 + n + 1} \leq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{n}{n^2 + k} \leq \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{(n+2)n}{n^2 + n + 1} \leq u_n \leq \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$$

Or $1 + \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)n}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$$

Exercice 6

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n^2 + (a+b)n + ab} - n = \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2} \right)} - n \\ &= |n| \sqrt{1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}} - n \\ &= n \left(\sqrt{1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}} - 1 \right) \quad (\text{car } n \geq 0) \end{aligned}$$

On utilise ensuite l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} u_n &= n \times \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}} - 1\right) \left(\sqrt{1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}} + 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}} + 1} \\ &= n \times \frac{\frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}} + 1} \\ &= \frac{a + b + \frac{ab}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}} + 1} \end{aligned}$$

Il est clair que $a + b + \frac{ab}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + b$ et que $\sqrt{1 + \frac{a+b}{n} + \frac{ab}{n^2}} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$. Par quotient de limites, on peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{a + b}{2}}$$

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n, v_n \in [0, 1]$ donc $u_n v_n \leq u_n \leq 1$. Comme $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, le théorème des gendarmes fournit :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$$

On procède de la même manière pour la suite v .

Exercice 12

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

et :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1) \times (n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1) \times (n+1)!} \\ &< 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est (strictement) croissante tandis que $(v_n)_{n \geq 1}$ est (strictement) décroissante. De plus :

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit donc que :

les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes

2. D'après le théorème sur les suites adjacentes, les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ convergent de limite commune ; on note $\ell \in \mathbb{R}$ cette limite. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \in \mathbb{Q}$. On a $\ell \geq 0$ (car les suites sont à valeurs positives) donc il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\ell = \frac{p}{q}$. D'après la monotonie des deux suites, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < \frac{p}{q} < v_n,$$

i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$$

Pour $n = q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \frac{1}{q \times q!}$$

En multipliant par $q! > 0$, on a :

$$\sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} < p(q-1)! < \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + \frac{1}{q} \quad \text{i.e.} \quad 0 < \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} - p(q-1)! < \frac{1}{q} < 1$$

Or pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$ (car $k \leq q$) donc $\sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} - p(q-1)! \in \mathbb{Z}$. Cet entier appartient à l'intervalle $]0, 1[$, ce qui est absurde. Finalement :

$$\boxed{\ell \notin \mathbb{Q}}$$

Exercice 13 Soient $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+2} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) - 2^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

Or :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$

donc :

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+2} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \underbrace{\left[1 - \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\right]}_{\geq 0}$$

Comme $\frac{\theta}{2^{n+1}} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, on a $\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. De même :

$$v_{n+1} - v_n = 2^{n+2} \tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) - 2^{n+1} \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

Or $\tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \tan\left(2 \times \frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$ et $\frac{\theta}{2^{n+1}} \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ donc, comme :

$$\forall a \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[, \quad \tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan(a)^2},$$

on a :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{2 \tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{1 - \tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)^2}$$

Ainsi :

$$v_{n+1} - v_n = 2^{n+2} \tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \left[1 - \frac{1}{1 - \tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)^2}\right]$$

Or $0 \leq \frac{\theta}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{4}$ donc $0 \leq \tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) < 1$ (par croissance stricte de la fonction tangente) puis :

$$0 < 1 - \tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \leq 1$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $\frac{1}{1 - \tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)} \geq 1$. Ainsi, $v_{n+1} - v_n \leq 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante tandis que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

★ On calcule directement les limites des deux suites. La fonction sinus étant dérivable en 0, on a :

$$\frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin'(0) \quad i.e. \quad \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Comme $\frac{\theta}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a :

$$u_n = 2\theta \times \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\frac{\theta}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\theta$$

De la même manière, on montre que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\theta$. En particulier, on a donc $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Finalement :

les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et leur limite commune est 2θ

Exercice 13

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$h_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, on a $k \leq 2n$ puis $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. En sommant les inégalités, il vient :

$$h_{2n} - h_n \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times (2n - (n+1) + 1)$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_{2n} - h_n \geq \frac{1}{2}$$

2. On raisonne par l'absurde en supposant que la suite $(h_n)_{n \geq 1}$ converge. Notons alors $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. D'après le théorème sur les suites extraites, la suite extraite $(h_{2n})_{n \geq 1}$ converge également de limite ℓ . En faisant tendre n vers $+\infty$ dans les inégalités obtenues à la question précédente, on obtient alors $\ell - \ell \geq \frac{1}{2}$, i.e. $\frac{1}{2} \leq 0$, ce qui est absurde. Finalement :

la suite $(h_n)_{n \geq 1}$ est divergente

Exercice 18 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée donc :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$$

On va montrer, en raisonnant par récurrence, qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \geq n$$

★ D'après l'hypothèse (pour $M = 0$), il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geq 0$. On pose alors $\varphi(0) = n_0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{\varphi(n)} \geq n$. On veut montrer qu'il existe un entier noté $\varphi(n+1)$ tel que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} \geq n+1$. Remarquons que l'hypothèse faite sur la suite entraîne que la suite $(u_k)_{k \geq \varphi(n)+1}$ n'est pas majorée. En effet, si celle-ci était majorée, alors il existerait $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \geq \varphi(n) + 1, \quad u_k \leq M$$

et alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ serait majorée par $\max(u_0, u_1, \dots, u_{\varphi(n)}, M)$, ce qui contredit l'hypothèse. On en déduit qu'il existe un entier $n_0 \geq \varphi(n) + 1$ tel que $u_{n_0} \geq n+1$. On pose alors $\varphi(n+1) = n_0$. On a bien $\varphi(n+1) > \varphi(n)$.

Par principe de récurrence simple, on a montré qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \geq n$$

Ainsi :

 $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de u qui tend vers $+\infty$ (théorème de comparaison)

Exercice 20

1. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ; on note $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. Montrons que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également de limite ℓ , i.e. que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_\varepsilon \implies |v_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. On sait que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ donc il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_\varepsilon \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\varepsilon$. Alors :

$$\begin{aligned} v_n - \ell &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ell = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_\varepsilon-1} (u_k - \ell) + \frac{1}{n} \sum_{k=n_\varepsilon}^n (u_k - \ell) \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, on obtient en posant $M_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n_\varepsilon-1} (u_k - \ell)$:

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &\leq \frac{|M_\varepsilon|}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=n_\varepsilon}^n \underbrace{|u_k - \ell|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{|M_\varepsilon|}{n} + \underbrace{\frac{1}{n} \times (n - n_\varepsilon + 1) \times \frac{\varepsilon}{2}}_{\leq 1} \\ &\leq \frac{|M_\varepsilon|}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Comme $\frac{|M_\varepsilon|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n'_\varepsilon \implies 0 \leq \frac{|M_\varepsilon|}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons alors $N_\varepsilon = \max(n_\varepsilon, n'_\varepsilon) \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel n tel que $n \geq N_\varepsilon$, on a :

$$|v_n - \ell| \leq \frac{|M_\varepsilon|}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Finalement :

$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

2. La réciproque est fautive. En effet, posons $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est divergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k = -\frac{1}{n} \times \frac{(-1)^n - 1}{2}$$

qui est le terme général d'une suite convergente de limite 0. Ainsi :

la réciproque est fautive

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \sqrt[n]{n} = \frac{1}{n^n} = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$. On a $\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. La question 1. implique donc que :

$\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

4. On suppose que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Montrons que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$. On doit donc montrer que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists n_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_A \implies v_n \geq A$$

Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Comme $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, il existe $n_A \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_A \implies u_n \geq 2A + 2$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_A$. Alors :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_A-1} u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=n_A}^n \underbrace{u_k}_{\geq 2A+2} \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_A-1} u_k + \frac{n - n_A + 1}{n} (2A + 2) \\ &\geq \end{aligned}$$

Si $n \geq 2n_A$, alors $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2n_A}$ et donc $\frac{n_A}{n} \leq \frac{1}{2}$. Pour un tel entier, on a donc :

$$\frac{n - n_A + 1}{n} \geq \frac{n - n_A}{n} = 1 - \frac{n_A}{n} \geq \frac{1}{2}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2n_A \implies \frac{n - n_A + 1}{n} (2A + 2) \geq A + 1$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2n_A \implies v_n \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_A-1} u_k + A + 1$$

On a maintenant $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_A-1} u_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que (on choisit $\varepsilon = 1 > 0$ dans la définition de la convergence) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_A-1} u_k \right| \leq 1$$

En particulier, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , on a $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_A-1} u_k \geq$

-1. En posant finalement $N_A = \max(2n_A, n_0) \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_A \implies v_n \geq -1 + (A + 1) = A$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty}$$

Exercice 21

1. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On distingue trois cas.

★ **Premier cas** : $u_0 = 0$

Par une récurrence immédiate, on obtient que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle. En particulier, cette suite converge de limite 0.

★ **Deuxième cas** : $u_0 > 0$

Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + u_n^2} \leq 1$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente. En notant $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite, on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence :

$$\ell = \frac{\ell}{1 + \ell^2} \quad i.e. \quad \ell \left(1 - \frac{1}{1 + \ell^2} \right) = 0,$$

ce qui donne comme unique possibilité $\ell = 0$. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

★ **Troisième cas** : $u_0 < 0$

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante car :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + u_n^2} \leq 1 \quad \text{puis} \quad u_{n+1} \geq u_n$$

en multipliant par $u_n < 0$. La suite étant de plus majorée par 0, elle est convergente. Le même raisonnement que celui mené au deuxième point permet d'obtenir que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

2.

3. Une étude de la fonction $f : x \mapsto x - \text{Arctan}(x)$ montre que f s'annule uniquement en 0 et :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_-, x \leq \text{Arctan}(x)) \quad \text{et} \quad (\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{Arctan}(x) \leq x)$$

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On distingue trois cas.

★ **Premier cas** : $u_0 = 0$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle donc elle converge vers 0.

★ **Deuxième cas :** $u_0 > 0$

On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 0$. Les inégalités précédentes montrent alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant de plus minorée par 0, elle converge. Sa limite notée $\ell \in \mathbb{R}$ est telle que $f(\ell) = 0$ donc $\ell = 0$. Ainsi, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

★ **Troisième cas :** $u_0 < 0$

Ici, on montre (par récurrence) que la suite est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$. On en déduit que la suite est de plus croissante donc elle est convergente. À nouveau, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4. Tout d'abord, la suite est bien définie car $\mathbb{R}_+$ est stable par l'application f (on a donc $1 + u_n \geq 1 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). De plus, on sait que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Elle est de plus minorée par 0 donc elle est convergente (d'après le théorème de la limite monotone). Notons $\ell \in \mathbb{R}_+$ la limite de la suite. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence vérifiée par la suite, on obtient l'égalité $\ln(1+\ell) = \ell$. Or, une étude de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ (ou sur $\mathbb{R}_+$) montre que son seul point d'annulation est 0. Ainsi, $\ell = 0$ et donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 22

- ★ À l'aide d'un raisonnement par récurrence (récurrence forte), montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle est à valeurs positives.

— On a $u_0 = 1 \geq 0$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_0, \dots, u_n$ sont des nombres positifs. Alors $u_0 + \dots + u_n \in \mathbb{R}_+$ et donc $u_{n+1} = \sqrt{u_0 + \dots + u_n}$ est bien défini et est positif (puisque la fonction racine carrée est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$).

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien définie et à valeurs positives.

- ★ Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. On $u_{n+1} \geq 0$ d'après ce qui précède donc :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n \leq u_0 + u_1 + \dots + u_n + u_{n+1}$$

puis, par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{u_0 + u_1 + \dots + u_n} \leq \sqrt{u_0 + u_1 + \dots + u_n + u_{n+1}} \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante. On a aussi $u_1 = \sqrt{u_0} = 1 = u_0$ donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- ★ D'après le théorème de la limite monotone, ou bien la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, ou bien $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Par croissance de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $\ell \geq u_0$, i.e. $\ell \geq 1$. Par ailleurs, on remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1}^2 = u_0 + \dots + u_{n-1} + u_n,$$

i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette relation de récurrence, on obtient $\ell^2 = \ell^2 + \ell$, i.e. $\ell = 0$, ce qui est exclus.

Finalement :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

Exercice 24

Commençons par montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a $x_n \leq y_n$.

- ★ La propriété est vraie au rang 0 par hypothèse.

- ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $x_n \leq y_n$. Montrons que $x_{n+1} \leq y_{n+1}$. On a :

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3} - \frac{2x_n + y_n}{3} = \frac{y_n - x_n}{3} \geq 0$$

par hypothèse de récurrence.

Par principe de récurrence simple, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leq y_n$$

Étudions maintenant le sens de variation des deux suites. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n + y_n}{3} - x_n = \frac{y_n - x_n}{3} \geq 0$$

et :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{x_n + 2y_n}{3} - y_n = \frac{x_n - y_n}{3} \leq 0$$

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_0 \leq x_n \leq y_n \leq y_0$$

La première inégalité provient de la croissance de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la troisième provient de la décroissance de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la deuxième a été démontrée par récurrence. Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par y_0) donc elle converge. De la même manière, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ (respectivement $\ell' \in \mathbb{R}$) la limite de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3}$$

donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ (ce qui est licite puisque les suites mises en jeu sont convergentes), on obtient :

$$\ell = \frac{2\ell + \ell'}{3},$$

d'où l'on tire $\ell = \ell'$. Il reste à déterminer la valeur de ℓ . Remarquons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre deux. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \frac{2x_{n+1} + y_{n+1}}{3} = \frac{2x_{n+1}}{3} + \frac{x_n + 2y_n}{9} \\ &= \frac{2x_{n+1}}{3} + \frac{x_n}{9} + \frac{2}{9}(3x_{n+1} - 2x_n) \\ &= \frac{4x_{n+1}}{3} - \frac{x_n}{3} \end{aligned}$$

L'équation caractéristique associée est $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$. Ses racines sont 1 et $\frac{1}{3}$. Il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = A + B \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Déterminons enfin A et B en fonction de x_0 et x_1 . On a :

$$\begin{cases} A + B = x_0 \\ 3A + B = 3x_1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{3x_1 - x_0}{2} \\ B = \text{un truc} \end{cases}$$

Comme $\left(\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A = \frac{3x_1 - x_0}{2}$. Par unicité de la limite, on a :

$$\ell = \ell' = \frac{3x_1 - x_0}{2}$$

Exercice 25

- ★ Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre v_n est bien défini et qu'on a les inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n \leq u_n$$

- Par hypothèse, on sait que $0 < v_0 < u_0$ donc la propriété est vérifiée au rang $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leq v_n \leq u_n$. Alors $u_n v_n \geq 0$ et donc le nombre $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ est bien défini et est positif. De plus :

$$u_{n+1} - v_n = \frac{(\sqrt{u_n})^2 + (\sqrt{v_n})^2 - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{2} = \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2} \geq 0$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe récurrence simple, on peut conclure que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n \leq u_n$$

- ★ Ces inégalités permettent d'en déduire le sens de variation des deux suites. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} = u_n$$

et $u_n v_n \geq v_n^2$ (car $u_n \geq v_n$ et car $v_n \geq 0$) donc (par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$)

$$v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{v_n^2} = |v_n| = v_n \quad (\text{car } v_n \geq 0)$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, tandis que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- ★ Il reste à montrer que $v_n - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Il suffit de démontrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite. Les monotonies des suites et les inégalités obtenues au deuxième point montrent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_0 \leq v_n \leq u_n \leq u_0$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée par u_0 donc elle est convergente (d'après le théorème de la limite monotone). De même, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ les limites respectives des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},$$

on obtient $\ell = \frac{\ell + \ell'}{2}$, i.e. $\ell = \ell'$.

Finalement :

les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes

Exercice 27

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sum_{k=1}^n x^k \end{cases}$. La fonction f_n est

continue sur $\mathbb{R}_+$ (en tant que fonction polynomiale) et elle y est strictement croissante (comme somme de fonctions qui le sont). D'après le théorème de la bijection, la fonction f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle :

$$f_n(\mathbb{R}_+) = \left[f_n(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) \right[= [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$$

Ainsi, $1 \in \mathbb{R}_+ = f_n(\mathbb{R}_+)$ admet un unique antécédent par l'application f_n dans $\mathbb{R}_+$. Finalement :

l'équation proposée admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de x_n , on a $\sum_{k=1}^n x_n^k = 1$.

★ Si $x_n = 1$, alors l'égalité $x_n^{n+1} = 2x_n - 1$ est satisfaite.

★ Sinon, on a :

$$\sum_{k=1}^n x_n^k = x_n \times \frac{x_n^n - 1}{x_n - 1} \quad \text{donc} \quad \frac{x_n^{n+1} - x_n}{x_n - 1} = 1$$

Ainsi, $x_n^{n+1} - x_n = x_n - 1$, d'où l'on tire l'égalité annoncée.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n^{n+1} = 2x_n - 1$$

3. ★ Étudions les variations de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{k=1}^n x^k = x^{n+1} \geq 0$$

En particulier :

$$f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n) = 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

La fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ donc $x_n \geq x_{n+1}$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Elle est de plus minorée par 0 (tous les termes de la suite appartenant à $\mathbb{R}_+$) donc la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ converge (d'après le théorème de la limite monotone).

★ Calculons x_2 . Par définition, x_2 est la solution positive de l'équation du second degré $x^2 + x - 1 = 0$ donc $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. Comme $\sqrt{5} < 3$ (car $5 < 9$), on a $x_2 < 1$. La décroissance de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ implique que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad x_n \leq x_2$$

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq x_n^{n+1} = x_2^{n+1}$. Or $x_2 \in [0, 1[$ donc $x_2^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'après le théorème des gendarmes (et en utilisant la relation obtenue à la question 2.), on a :

$$2x_n - 1 = x_n^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Finalement :

$$\text{la suite } (x_n)_{n \geq 1} \text{ converge de limite égale à } \frac{1}{2}$$

Exercice 29

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

★ Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On résout :

$$\ell = 2\ell + 1 \iff \ell = -1$$

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $\ell = 2\ell + 1$. En soustrayant membre à membre, on obtient :

$$u_{n+1} - \ell = 2u_n + 1 - (2\ell + 1) = 2(u_n - \ell)$$

La suite $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 2. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \ell = 2^n(u_0 - \ell) = 2^n$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -1 + 2^n$$

2. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2 + 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

3. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5^n - 1}{4}$$

4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

★ L'équation caractéristique associée $x^2 - x + 1 = 0$ a pour racines $e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + B \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

★ La résolution du système formé par les conditions $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ fournit les valeurs $A = 1$ et $B = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

7. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2.

★ L'équation caractéristique associée $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$ a pour racine double $\frac{3}{2}$ donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (An + B) \left(\frac{3}{2} \right)^n$$

- ★ La résolution du système formé par les conditions $u_0 = 3$ et $u_1 = 3$ fournit les valeurs $B = 3$ et $A = -1$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-n + 3) \left(\frac{3}{2} \right)^n$$

Exercice 30

1. On a $u_0 > 0$ et, on vérifie par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. On peut alors définir la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(2) + 2 \ln(u_n) \quad i.e. \quad v_{n+1} = 2v_n + \ln(2)$$

et $v_0 = \ln(u_0) = 0$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc arithmético-géométrique. La résolution classique fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = (2^n - 1) \ln(2) = \ln(2^{2^n - 1})$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = e^{v_n} = 2^{2^n - 1}$$

2. En utilisant une récurrence double, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$ et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_{n+2}) = 6 \ln(u_{n+1}) - 5 \ln(u_n) \quad i.e. \quad v_{n+2} = 6v_{n+1} - 5v_n$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2. De plus, $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$. La résolution classique fournit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{5^n - 1}{4}$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \exp\left(\frac{5^n - 1}{4}\right)$$

Exercice 32

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$3x_{n+3} - 3x_{n+2} = -2x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = -2(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n)$$

i.e. :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 3v_{n+2} = -2v_{n+1} - v_n$$

2. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc récurrente linéaire d'ordre 2. En posant :

$$\alpha = \frac{-1 - i\sqrt{2}}{3} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-1 + i\sqrt{2}}{3},$$

la résolution classique nous donne l'existence de deux nombres complexes A et B tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x_n - x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (A\alpha^k + B\beta^k)$$

Comme α et β sont différents de 1, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n = x_0 + A \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} + B \frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}$$