Sommes et produits (formulaire)

Coefficients binomiaux

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$, on a $\binom{n}{k} = \dfrac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}$. On a les formules suivantes :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \textbf{ (symétrie)}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} \textbf{ (formule sans nom)} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \qquad \textbf{(formule du triangle de Pascal)}$$

Sommes simples

- **Nombres de termes :** pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \qquad \sum_{k=1}^{n} 1 = n \quad (\text{si } n \geqslant 1) \qquad \sum_{k=m}^{n} 1 = n-m+1$$

- **Somme des premiers entiers, des premiers carrés :** pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- **Somme des termes d'une suite géométrique :** pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leqslant n$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^{n} x^k = x^m \times \frac{1-x^{n-m+1}}{1-x}$$

- **Somme télescopique :** pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$ (à savoir retrouver)

- **Formule du binôme de Newton :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- **Formule de factorisation :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

Sommes doubles

- Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}$ un famille de nombres réels. Alors :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

- Dans le cas où $m = n$, alors la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ vaut :

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

Produits

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tous $m, n \in \mathbb{N}$ tel que $m \leqslant n$, on a :

$$\prod_{k=0}^{n} x = x^{n+1} \qquad \prod_{k=m}^{n} x = x^{n-m+1} \qquad \prod_{k=1}^{n} k = n\,!$$