Sommes et Produits

(quelques corrigés)

Exercice 2 (pour la somme des $(-1)^k k^2$) On propose deux méthodes.

⋆ **Première méthode :** on utilise un raisonnement par récurrence.

— **Initialisation :** on a $\sum_{k=0}^{0}(-1)^k k^2 = (-1)^0 \times 0^2 = 0$ et $(-1)^0 \frac{0 \times 1}{2} = 0$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

Montrons alors que :

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k^2 = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k^2 &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\ &= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2(n+1)^2 - n(n+1)}{2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(2n+2-n)}{2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée au rang $n+1$.

On a donc montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}}$$

⋆ **Deuxième méthode :** on calcule directement la somme en séparant les entiers pairs et impairs. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n}(-1)^k k^2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n}(-1)^k k^2$$

On distingue ensuite deux cas suivant la parité de l'entier n.

— **Premier cas :** on suppose que n est pair.
Il existe alors un entier naturel m tel que $n = 2m$. Ensuite, un entier $k \in [\![0, 2m]\!]$ est pair si et seulement s'il existe $\ell \in [\![0, m]\!]$ tel que $k = 2\ell$, et l'entier k est impair si et seulement s'il existe $\ell \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $k = 2\ell + 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 &= \sum_{\ell=0}^{m}(-1)^{2\ell}(2\ell)^2 + \sum_{\ell=0}^{m-1}(-1)^{2\ell+1}(2\ell+1)^2 \\ &= 4\sum_{\ell=0}^{m}\ell^2 - \sum_{\ell=0}^{m-1}(4\ell^2 + 4\ell + 1) \\ &= 4m^2 - 4\sum_{\ell=0}^{m-1}\ell - \sum_{\ell=0}^{m-1}1 \\ &= n^2 - 4 \times \frac{(m-1)m}{2} - m \\ &= n^2 - m(2m-2) - m \\ &= n^2 - m(2m-1)\end{aligned}$$

et donc, comme $n = 2m$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

puisque n est pair.

— **Deuxième cas :** on suppose que n est impair. *Le raisonnement et le calcul sont analogues au cas précédent. Les détails sont à la charge de notre estimé lecteur.*

Exercice 10

1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On a :

$$k^3 - 1 = k^3 - 1^3 = (k-1)\sum_{i=0}^{2} k^i = (k-1)(1+k+k^2)$$

et :

$$k^3 + 1 = k^3 - (-1)^3 = (k+1)\sum_{i=0}^{2} (-k)^i = (k-1)(1-k+k^2)$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad k^3 - 1 = (k-1)(k^2+k+1) \quad \text{et} \quad k^3+1 = (k+1)(k^2-k+1)}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} &= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} \\ &= 2\frac{(n-1)\,!}{(n+1)\,!} \times \frac{\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k^2+k+1)}{\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k^2-k+1)}\end{aligned}$$

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a :

$$(\ell+1)^2 - (\ell+1) + 1 = \ell^2 + \ell + 1$$

donc, en posant $k = \ell + 1$ dans le produit au dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} &= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(k^2+k+1)}{\displaystyle\prod_{\ell=1}^{n-1}(\ell^2+\ell+1)} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2+n+1}{3}\end{aligned}$$

puisque le produit obtenu est télescopique. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3(n^2+n)}}$$

3. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{3\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

donc :

$$\boxed{\text{la suite } \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}\right)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}} \text{ est convergente de limite égale à } \frac{2}{3}}$$

Exercice 12

On utilise un raisonnement par récurrence.

- ⋆ **Initialisation :** soit $x_1 \in [0,1]$. Alors :

$$\prod_{k=1}^{1}(1-x_1) = 1 - x_1 = 1 - \sum_{k=1}^{1} x_k \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{1} x_k$$

donc l'inégalité est vérifiée au rang 1.

- ⋆ **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in [0,1], \qquad \prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Montrons que :

$$\forall x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in [0,1], \qquad \prod_{k=1}^{n+1}(1-x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

Soit $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in [0,1]$. On a :

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1-x_k) = \left(\prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\right)(1-x_{n+1})$$

Comme $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$, on sait par hypothèse de récurrence que

$$\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Comme de plus $x_{n+1} \in [0,1]$, on a $1 - x_{n+1} \geqslant 0$ donc :

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1-x_k) \geqslant \underbrace{\left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right)(1-x_{n+1})}_{\text{noté } \alpha}$$

Or :

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k - x_{n+1} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k + x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k\end{aligned}$$

Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, on sait que $x_k \geqslant 0$ donc $x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant 0$. On en déduit que :

$$\alpha \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k \qquad \text{et donc} \qquad \prod_{k=1}^{n+1}(1-x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

L'inégalité est donc établie au rang $n+1$.

On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, \dots, x_n \in [0,1], \qquad \prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k}$$

Exercice 13

On utilise un raisonnement par récurrence.

⋆ **Initialisation :** d'une part

$$\prod_{k=0}^{0} \frac{0\,!}{k\,!} = \frac{0\,!}{0\,!} = 1$$

et, d'autre part :

$$\prod_{k=1}^{1} k^k = 1^1 = 1$$

donc $\prod_{k=0}^{0} \frac{0\,!}{k\,!} = \prod_{k=1}^{1} k^k$. L'égalité est ainsi vérifiée au rang 1.

⋆ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n\,!}{k\,!} = \prod_{k=1}^{n} k^k$$

Montrons que :

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{(n+1)\,!}{k\,!} = \prod_{k=1}^{n+1} k^k$$

On a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} \frac{(n+1)\,!}{k\,!} = \prod_{k=0}^{n} \frac{(n+1)n!}{k\,!} &= \left(\prod_{k=0}^{n}(n+1)\right) \times \prod_{k=0}^{n} \frac{n\,!}{k\,!} \\ &= (n+1)^{n+1} \times \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n\,!}{k\,!}\right) \times \frac{n\,!}{n\,!} \\ &= (n+1)^{n+1} \times \prod_{k=1}^{n} k^k \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} k^k\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence à l'avant-dernière égalité. L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n\,!}{k\,!} = \prod_{k=1}^{n} k^k}$$

Exercice 18

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$. En explicitant les coefficients binomiaux, on trouve que (*il faut faire apparaître le calcul dans une copie*) :

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$$

donc :

$$S = \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-1)^k = \binom{n}{p}(-1+1)^p$$

d'après la formule du binôme de Newton. Ainsi :

$$\boxed{S = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}}$$