

SOMMES ET PRODUITS

(corrigés)

Exercice 1

1. Par linéarité de la somme, on a :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^n i^2 - \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} (2n+1-3) \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \end{aligned}$$

2. Par linéarité de la somme, on a :

$$S_2 = 2 \sum_{j=1}^n j - \sum_{j=1}^n 1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

3. Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-1 \neq 1$:

$$S_3 = -1 \times \frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} = -\frac{1}{2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

4. Par linéarité de la somme, on a :

$$S_4 = \sum_{k=0}^n k + n \sum_{k=0}^n 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n(n+1) = \frac{3n(n+1)}{2}$$

5. On a :

$$\begin{aligned} S_5 &= 3 \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{2}{9}\right)^i = 3 \times \frac{2}{9} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{9}} \\ &= \frac{6}{7} \left(1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

6. Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\ &= \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k) \\ &= (\ln(k-1) - \ln(k)) + (\ln(k+1) - \ln(k)) \end{aligned}$$

Par linéarité de la somme, on a :

$$\begin{aligned} S_6 &= \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) - \ln(k)) + \sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= -\ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) \end{aligned}$$

puisque les dernières sommes sont télescopiques.

7. Pour tout entier naturel k , on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} &= \frac{1}{2} \times \frac{(2k+3) - (2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \end{aligned}$$

La somme S_7 est donc une somme télescopique et on obtient :

$$S_7 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{n+1}{2n+3}$$

8. On a :

$$\begin{aligned} S_8 &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{j^2 + j}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j^2 + \sum_{j=1}^n j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{2n+1}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

9. On a :

$$\begin{aligned}
S_9 &= \sum_{j=2}^n j \sum_{i=1}^{j-1} 1 = \sum_{j=2}^n j(j-1) \\
&= \sum_{j=1}^n j(j-1) \\
&= \sum_{j=1}^n j^2 - \sum_{j=1}^n j \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)[(2n+1)-3]}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{3}
\end{aligned}$$

10. On a :

$$S_{10} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} i + \sum_{1 \leq i, j \leq n} j$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i, j \leq n} i &= \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n i^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

De la même façon, on obtient $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ donc :

$$S_{10} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

11. Si $x = 1$, alors on obtient $S_{11} = (n+1)^2$. Sinon :

$$S_{11} = \left(\sum_{i=0}^n x^i \right) \left(\sum_{j=0}^n x^j \right) = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \right)^2$$

12. On a :

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j i = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j+1} \times \frac{j(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n j \\
&= \frac{n(n+1)}{4}
\end{aligned}$$

13. On a :

$$\begin{aligned}
S_{13} &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j (j-i) = \sum_{j=0}^n \sum_{\ell=0}^j \ell \\
&= \sum_{j=0}^n \frac{j^2 + j}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \dots
\end{aligned}$$

14. On a :

$$\begin{aligned}
S_{14} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i^2}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6} \sum_{j=1}^n (2j^2 + 3j + 1) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n}{6} \\
&= \frac{2n(n+1)(2n+1) + 9n(n+1) + 6n}{36} \\
&= \frac{n(4n^2 + 6n + 2 + 9n + 9 + 6)}{36} \\
&= \frac{n(4n^2 + 15n + 17)}{36}
\end{aligned}$$

15. On a $S_{15} = A + B$, où :

$$A = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \max(i, j) \quad \text{et} \quad B = \sum_{1 \leq j < i \leq n} \max(i, j)$$

On calcule maintenant A et B :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j j = \sum_{j=1}^n j \sum_{i=1}^j 1 \\ &= \sum_{j=1}^n j^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} i = \sum_{i=2}^n i(i-1) \\ &= \sum_{i=1}^n i(i-1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

On en déduit la valeur de S_{15} .

16. On a :

$$\begin{aligned} S_{16} &= 6 \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} 2^\ell 3^{n-\ell} \\ &= 6 \left(\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} 2^\ell 3^{n-\ell} - 3^n \right) \\ &= 6(5^n - 3^n) \end{aligned}$$

en utilisant la formule du binôme de Newton.

17. Le changement d'indice $k = i + 1$ fournit (remarquons que le sommant est nul si $i = n$) :

$$\begin{aligned} S_{17} &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k - 1 \right) \\ &= \frac{3^n - 1}{2} \end{aligned}$$

18. On a :

$$S_{18} = \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 3^k = \sum_{p=0}^n 4^p = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

Exercice 2

1. Le plus simple est de procéder par récurrence.
2. On propose deux méthodes.

★ **Première méthode** : on utilise un raisonnement par récurrence.

— On a $\sum_{k=0}^0 (-1)^k k^2 = (-1)^0 \times 0^2 = 0$ et $(-1)^0 \frac{0 \times 1}{2} = 0$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

Montrons alors que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k k^2 = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k k^2 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 + (-1)^{n+1} (n+1)^2 \\ &= (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1} (n+1)^2 \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2(n+1)^2 - n(n+1)}{2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(2n+2-n)}{2} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée au rang $n+1$.

On a donc montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}}$$

★ **Deuxième méthode :** on calcule directement la somme en séparant les indices pairs des indices impairs. On a :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n (-1)^k k^2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n (-1)^k k^2$$

On distingue ensuite deux cas suivant la parité de l'entier n .

— **Premier cas :** on suppose que n est pair.

Il existe alors un entier naturel m tel que $n = 2m$. Ensuite, un entier $k \in \llbracket 0, 2m \rrbracket$ est pair si et seulement s'il existe $\ell \in \llbracket 0, m \rrbracket$ tel que $k = 2\ell$, et l'entier k est impair si et seulement s'il existe $\ell \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ tel que $k = 2\ell + 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 &= \sum_{\ell=0}^m (-1)^{2\ell} (2\ell)^2 + \sum_{\ell=0}^{m-1} (-1)^{2\ell+1} (2\ell+1)^2 \\ &= 4 \sum_{\ell=0}^m \ell^2 - \sum_{\ell=0}^{m-1} (4\ell^2 + 4\ell + 1) \\ &= 4m^2 - 4 \sum_{\ell=0}^{m-1} \ell - \sum_{\ell=0}^{m-1} 1 \\ &= n^2 - 4 \times \frac{(m-1)m}{2} - m \\ &= n^2 - m(2m-2) - m \\ &= n^2 - m(2m-1) \end{aligned}$$

et donc, comme $n = 2m$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

puisque n est pair.

— **Deuxième cas :** on suppose que n est impair. *Le raisonnement et le calcul sont analogues au cas précédent. Les détails sont à la charge de notre estimé lecteur.*

Exercice 3

1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} &= \frac{k^2 - k(k-1) - (k-1)}{k^2(k-1)} \\ &= \frac{k^2 - k^2 + k - k + 1}{k^2(k-1)} \\ &= \frac{1}{k^2(k-1)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car $k^2(k-1) > 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. Montrons que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente en utilisant le théorème de la limite monotone.

★ La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

★ Montrons maintenant que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a :

$$u_n = \underbrace{1}_{k=1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$$

D'après la question 1., on a :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \quad (\text{somme télescopique})$$

Ainsi :

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Cette inégalité est aussi valable pour $n = 1$ car $u_1 = 1 \leq 2$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq 2$$

Finalement, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est majorée (par 2).

On sait que toute suite croissante et majorée est convergente (théorème de la limite monotone) donc :

la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente

Exercice 4

★ *Sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \underbrace{\frac{1}{2n+2}}_{k=2n+2} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{k=2n+1} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{k=n+1} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} \\ &= -\frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{-(2n+1) + 2n+2}{2(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante

★ *Sens de variation de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$*

On trouve que :

la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

Exercice 5

On utilise une récurrence simple.

★ On a :

$$\sum_{k=1}^{2^1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}$$

donc l'inégalité est vérifiée pour $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$. Montrons que $\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{n+1}{2}$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$$

par hypothèse de récurrence. Il reste à minorer la dernière somme. Pour tout $k \in \llbracket 2^n + 1, 2^{n+1} \rrbracket$, on a $0 < k \leq 2^{n+1}$ donc, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall k \in \llbracket 2^n + 1, 2^{n+1} \rrbracket, \quad \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} 1 = \frac{1}{2^{n+1}} [2^{n+1} - (2^n + 1) + 1] \\ &= \frac{2^n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{n+1}{2}$$

L'inégalité est donc vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$$

Exercice 6

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad u_{k+1} - u_k = k$$

En sommant ces égalités, il vient (la somme de gauche étant télescopique) :

$$u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$$

i.e. :

$$u_n = u_0 + \frac{n(n-1)}{2} = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

Cette égalité reste valable pour $n = 0$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^2 - n + 2}{2}}$$

2. On procède comme à la question précédente.

Exercice 7 On utilise un raisonnement par récurrence.

★ On a :

$$\sum_{k=0}^0 k! = 0! = 1 \leq 1! \quad (\text{car } 1! = 1)$$

L'inégalité est donc vraie pour $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!$. Montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} k! \leq (n+2)!$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k! &= \sum_{k=0}^n k! + (n+1)! \\ &\leq (n+1)! + (n+1)! \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= 2(n+1)! \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} (n+2)! - 2(n+1)! &= (n+2)(n+1)! - 2(n+1)! \\ &= n(n+1)! \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$2(n+1)! \leq (n+2)! \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k! \leq (n+2)!$$

L'inégalité est donc vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!}$$

Exercice 8

1. On a :

$$P_1 = \sqrt{\left(\prod_{k=1}^n k\right) \left(\prod_{k=1}^n (k+1)\right)} = \sqrt{n!(n+1)!}$$

2. On a $P_2 = (-5)^S$, où :

$$S = \sum_{k=1}^n (k^2 - k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \dots$$

3. On a $P_3 = \frac{A}{B}$, où :

$$A = \prod_{k=1}^n 4^k = 4^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

et :

$$B = \left(\prod_{k=1}^n k\right)^2 = (n!)^2$$

4. On a :

$$P_4 = \frac{\prod_{j=1}^{2n+1} j}{\prod_{j=1}^n (2j)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

5. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $4k^2 - 1 = (2k - 1)(2k + 1)$ donc :

$$P_5 = \left(\prod_{k=1}^n (2k - 1) \right) \left(\prod_{k=1}^n (2k + 1) \right)$$

Or :

$$\prod_{k=1}^n (2k + 1) = \prod_{k=0}^n (2k + 1) = P_4 = \frac{(2n + 1)!}{2^n n!}$$

et :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (2k - 1) &= 1 \times 3 \times \cdots \times (2n - 1) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (2n - 2) \times (2n - 1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n - 2)} \\ &= \frac{(2n - 1)!}{2^{n-1} (n - 1)!} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$P_5 = \frac{(2n - 1)! (2n + 1)!}{2^{2n-1} (n - 1)! n!}$$

6. On a :

$$\begin{aligned} P_6 &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n x^i x^j = \prod_{i=1}^n x^{ni} x^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= x^{n \times \frac{n(n+1)}{2}} x^{n \times \frac{n(n+1)}{2}} \\ &= x^{\frac{n^2(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

7. On obtient $P_7 = \frac{1}{n}$ (produit télescopique).

8. On a :

$$P_8 = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n i^j = \prod_{i=1}^n i^{\frac{n(n+1)}{2}} = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

9. On a :

$$\begin{aligned} P_9 &= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n i^j = \prod_{i=1}^n \left[\left(\prod_{j=1}^n i \right) \left(\prod_{j=1}^n j \right) \right] = \prod_{i=1}^n (i^n \times n!) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n i^n \right) \left(\prod_{i=1}^n n! \right) \\ &= (n!)^n \times (n!)^n \\ &= (n!)^{2n} \end{aligned}$$

Exercice 9

On remarque tout d'abord que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(1) = \prod_{k=0}^n 2 = 2^{n+1}}$$

Soit maintenant $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a :

$$\begin{aligned} (1 - x)P_2(x) &= (1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4) = (1 - x^2)(1 + x^2)(1 + x^4) \\ &= (1 - x^4)(1 + x^4) \\ &= 1 - x^8 \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve que :

$$(1 - x)P_3(x) = 1 - x^{16} \quad \text{et} \quad (1 - x)P_4(x) = 1 - x^{32}$$

On conjecture donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(x) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$$

Démontrons-le à l'aide d'une récurrence simple.

★ On a $P_0(x) = \prod_{k=0}^0 (1 + x^{2^k}) = 1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x}$ donc l'égalité est vérifiée pour $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P_n(x) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$. Montrons que $P_{n+1}(x) = \frac{1 - x^{2^{n+2}}}{1 - x}$.
On a :

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \prod_{k=0}^{n+1} (1 + x^{2^k}) = \left(\prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k}) \right) (1 + x^{2^{n+1}}) \\ &= P_n(x)(1 + x^{2^{n+1}}) \\ &= \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} (1 + x^{2^{n+1}}) \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{1 - (x^{2^{n+1}})^2}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{2^{n+2}}}{1 - x} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut donc conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(x) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}$$

Exercice 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)!} = (2n+1)2n(2n-1)\cdots(n+2) = \prod_{k=n+2}^{2n+1} \underbrace{k}_{\geq n+1} \geq \prod_{k=n+2}^{2n+1} (n+1) = (n+1)^{2n+1-(n+2)+1}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \geq (n+1)^n$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a (on peut multiplier terme à terme puisque les nombres mis en jeu sont positifs) :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)! \geq \prod_{k=0}^{n-1} [(k+1)!(k+1)^k] = \underbrace{\left(\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)! \right) \left(\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)^k \right)}_{\text{noté } P}$$

Le changement d'indice $\ell = k+1$ dans le dernier produit fournit :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (k+1)^k = \prod_{\ell=1}^n \ell^{\ell-1}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} (k+1)! &= \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{\ell=1}^{k+1} \ell = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{\ell=0}^k (\ell+1) = \prod_{0 \leq \ell \leq k \leq n-1} (\ell+1) \\ &= \prod_{\ell=0}^{n-1} \prod_{k=\ell}^{n-1} (\ell+1) \\ &= \prod_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1)^{n-\ell} \\ &= \prod_{\ell=1}^n \ell^{n-\ell+1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P &= \left(\prod_{\ell=1}^n \ell^{n-\ell+1} \right) \left(\prod_{\ell=1}^n \ell^{\ell-1} \right) = \prod_{\ell=1}^n (\ell^{n-\ell+1} \times \ell^{\ell-1}) \\ &= \prod_{\ell=1}^n \ell^n \\ &= \left(\prod_{\ell=1}^n \ell \right)^n \\ &= (n!)^n \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)! \geq (n!)^n$$

Exercice 11

1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a :

$$k^3 - 1 = k^3 - 1^3 = (k-1) \sum_{i=0}^2 k^i = (k-1)(1+k+k^2)$$

et :

$$k^3 + 1 = k^3 - (-1)^3 = (k+1) \sum_{i=0}^2 (-k)^i = (k+1)(1-k+k^2)$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1) \quad \text{et} \quad k^3 + 1 = (k+1)(k^2 - k + 1)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} &= \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{(k+1)(k^2 - k + 1)} \\ &= 2 \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \times \frac{\prod_{k=2}^n (k^2 + k + 1)}{\prod_{k=2}^n (k^2 - k + 1)} \end{aligned}$$

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on remarque que :

$$(\ell + 1)^2 - (\ell + 1) + 1 = \ell^2 + \ell + 1$$

donc, en posant $k = \ell + 1$ dans le produit au dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} &= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{\prod_{k=2}^n (k^2 + k + 1)}{\prod_{\ell=1}^{n-1} (\ell^2 + \ell + 1)} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2 + n + 1}{3} \end{aligned}$$

puisque le produit obtenu est télescopique. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3(n^2 + n)}$$

3. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})}{3(1 + \frac{1}{n})}$$

donc :

$$\text{la suite } \left(\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} \right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}} \text{ est convergente de limite égale à } \frac{2}{3}$$

Exercice 12

1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{(k-1)(k+1)} - 1 - \frac{1}{k^2} &= \frac{k^4 - (k-1)(k+1) - k^2(k-1)(k+1)}{k^2(k-1)(k+1)} \\ &= \frac{k^4 - k^2 + 1 - k^4 + k^2}{k^2(k-1)(k+1)} \\ &= \frac{1}{k^2(k-1)(k+1)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad 1 + \frac{1}{k^2} \leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$$

2. L'inégalité est évidente si $n = 1$ (en effet, celle-ci se réécrit « $2 \leq 4$ »). Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. En notant P_n le produit et en utilisant la question précédente, on a :

$$p_n = 2 \prod_{k=2}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \leq 2 \prod_{k=2}^n \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$$

Or :

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n \frac{k^2}{(k-1)(k+1)} &= \left(\prod_{k=2}^n \frac{k}{k-1} \right) \left(\prod_{k=2}^n \frac{k}{k+1} \right) \\ &= n \times \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

car les deux produits sont télescopiques. On en déduit que :

$$p_n \leq 4 \frac{n}{n+1} \leq 4$$

car $n+1 \geq n$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \leq 4$$

Exercice 13

On utilise un raisonnement par récurrence.

★ Soit $x_1 \in [0, 1]$. On a :

$$\prod_{k=1}^1 (1 - x_1) = 1 - x_1 = 1 - \sum_{k=1}^1 x_k \geq 1 - \sum_{k=1}^1 x_k$$

donc l'inégalité est vérifiée au rang $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in [0, 1], \quad \prod_{k=1}^n (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n x_k$$

Montrons que :

$$\forall x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in [0, 1], \quad \prod_{k=1}^{n+1} (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

Soient $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in [0, 1]$. On a :

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 - x_k) = \left(\prod_{k=1}^n (1 - x_k) \right) (1 - x_{n+1})$$

Comme $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$, on sait par hypothèse de récurrence que

$$\prod_{k=1}^n (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n x_k$$

Comme de plus $x_{n+1} \in [0, 1]$, on a $1 - x_{n+1} \geq 0$ donc :

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 - x_k) \geq \underbrace{\left(1 - \sum_{k=1}^n x_k \right)}_{\text{noté } \alpha} (1 - x_{n+1})$$

Or :

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} \sum_{k=1}^n x_k - x_{n+1} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k + x_{n+1} \sum_{k=1}^n x_k \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on sait que $x_k \geq 0$ donc $x_{n+1} \sum_{k=1}^n x_k \geq 0$. On en déduit que :

$$\alpha \geq 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k \quad \text{et donc} \quad \prod_{k=1}^{n+1} (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

L'inégalité est donc établie au rang $n+1$.

On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in [0, 1], \quad \prod_{k=1}^n (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n x_k}$$

Exercice 14 On utilise un raisonnement par récurrence.

★ D'une part :

$$\prod_{k=0}^0 \frac{1!}{k!} = \frac{1!}{0!} = 1$$

et, d'autre part :

$$\prod_{k=1}^1 k^k = 1^1 = 1$$

donc $\prod_{k=0}^0 \frac{0!}{k!} = \prod_{k=1}^1 k^k$. L'égalité est ainsi vérifiée au rang 1.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^n k^k$$

Montrons que :

$$\prod_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!} = \prod_{k=1}^{n+1} k^k$$

On a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!} &= \prod_{k=0}^n \frac{(n+1)n!}{k!} = \left(\prod_{k=0}^n (n+1) \right) \times \prod_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \\ &= (n+1)^{n+1} \times \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} \right) \times \frac{n!}{n!} \\ &= (n+1)^{n+1} \times \prod_{k=1}^n k^k \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} k^k \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence à l'avant-dernière égalité. L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

On a bien montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^n k^k}$$

Remarque : on peut aussi démontrer l'égalité sans récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} &= \prod_{k=0}^{n-1} n(n-1) \cdots (k+1) = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{j=k+1}^n j \\ &= \prod_{0 \leq k < j \leq n} j \\ &= \prod_{j=1}^n \prod_{k=0}^{j-1} j \\ &= \prod_{j=1}^n j^j, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad b_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} a_\ell$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} a_\ell \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} a_\ell \\ &= \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} a_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=\ell}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} a_\ell \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} &= \frac{n!}{(n-k)! \ell! (k-\ell)!} = \frac{n!}{\ell! (n-\ell)!} \times \frac{(n-\ell)!}{(k-\ell)! ((n-\ell) - (k-\ell))!} \\ &= \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} a_\ell \sum_{k=\ell}^n (-1)^{n-k} \binom{n-\ell}{k-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} a_\ell \sum_{j=0}^{n-\ell} (-1)^{n-\ell-j} \binom{n-\ell}{j} \quad (\text{changement d'indice } j = k - \ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} a_\ell (1 + (-1))^{n-\ell} \quad (\text{formule du binôme de Newton}) \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} a_\ell 0^{n-\ell} \end{aligned}$$

Pour tout $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $0^{n-\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k = \binom{n}{n} a_n = a_n}$$

Exercice 16 On utilise une récurrence simple.

★ On a :

$$\sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{1}{k} = \frac{(-1)^2}{1} \binom{1}{1} = 1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Montrons que :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on sait d'après la formule du triangle de Pascal que :

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Par linéarité de la somme, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n+1}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k}}_{\text{notée } S_1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k-1}}_{\text{notée } S_2}$$

Comme $\binom{n}{n+1} = 0$, on a :

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

par hypothèse de récurrence. De plus :

$$\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \quad \frac{1}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k} \quad (\text{formule du pion})$$

donc :

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k} = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \\ &= -\frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} - 1 \right] \\ &= -\frac{1}{n+1} [(1-1)^{n+1} - 1] \\ &= \frac{1}{n+1} \quad (\text{car } n+1 > 0) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

d'après la relation de Chasles. L'égalité est donc vérifiée au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$$

Exercice 17

★ D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

et :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = ((-1)+1)^n = 0^n = 0$$

car $n \geq 1$.

★ Posons $P = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $I = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$. On a :

$$P + I = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

De plus :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n [1 + (-1)^k] \binom{n}{k} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n 2 \binom{n}{k} \\ &= 2P \end{aligned}$$

i.e. :

$$P = \frac{1}{2}(2^n + 0) = 2^{n-1} \quad \text{et donc} \quad I = 2^n - P = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On a démontré dans le cours que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \quad (\text{formule du pion})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \\ &= n(1+1)^{n-1} \quad (\text{formule du binôme de Newton}) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{A = n2^{n-1}}$$

En procédant de la même manière pour la somme B , on a :

$$\begin{aligned} B &= n \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{\ell+1} \binom{n-1}{\ell} \\ &= -n \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{\ell} \binom{n-1}{\ell} \\ &= -n(1-1)^{n-1} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$B = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 2 \\ -1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Pour la somme C , on utilise l'égalité $k^2 = k(k-1) + k$ de sorte que :

$$C = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} + \underbrace{\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}}_{=A}$$

En utilisant deux fois la formule du pion, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} \\ &= n \sum_{k=2}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} \\ &= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} \\ &= n(n-1) \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} \quad (\text{changement d'indice } \ell = k-2) \\ &= n(n-1)2^{n-2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$C = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

2. Si $x = 1$, on a $D = \sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$. On se place désormais dans le cas où $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

On a :

$$f(x) = \sum_{i=0}^n x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \quad (\text{car } x \neq 1)$$

De plus, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynomiale) et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{i=0}^n i x^{i-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

En multipliant par x , on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{i=0}^n i x^i = x \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

3. On peut utiliser ici la formule du pion (comme à la question 1.). On propose une autre méthode. On remarque que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{1}{k+1} = \int_0^1 t^k dt$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int_0^1 t^k dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k \right) dt \\ &= \int_0^1 (t+1)^n dt \quad (\text{formule du binôme de Newton}) \\ &= \left[\frac{(t+1)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \end{aligned}$$

Finalement :

$$E = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

Exercice 19 Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. En explicitant les coefficients binomiaux, on trouve que (il faut faire apparaître le calcul dans une copie) :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p} \binom{p}{k}$$

donc :

$$S = \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k = \binom{n}{p} (-1+1)^p$$

d'après la formule du binôme de Newton. Ainsi :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}$$

Exercice 20 Soit $p \in \mathbb{N}$. On utilise une récurrence simple.

★ On a :

$$\sum_{k=p}^p \binom{k}{p} = \binom{p}{p} = 1 = \binom{p+1}{p+1}$$

donc l'égalité est vérifiée au rang $n = p$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$. On suppose que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$. Montrons que

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}. \text{ D'après la relation de Chasles, on a :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\ &= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \binom{n+2}{p+1} \end{aligned}$$

d'après la formule du triangle de Pascal. L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq p \implies \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Remarque : on peut éviter l'utilisation d'une récurrence en procédant comme suit. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la formule du triangle de Pascal, on a pour tout entier $k \geq p$,

$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1} \quad i.e. \quad \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^n \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right] \\ &= \binom{n+1}{p+1} - \underbrace{\binom{p}{p+1}}_{=0} \quad (\text{somme télescopique}) \\ &= \binom{n+1}{p+1} \end{aligned}$$

Exercice 21 Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Posons $S_{a,b} = \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$.

D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$S_{a,b} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{a}{b}\right)^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \right]$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Posons $x = \left(\frac{a}{b}\right)^k > 0$. On a :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Or $x^2 + 1 \geq 2x$ (car $(x-1)^2 \geq 0$) donc, en divisant par $x > 0$, on obtient $\frac{x^2 + 1}{x} \geq 2$. Ceci montre que :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \geq 2$$

En multipliant par $\binom{n}{k} \geq 0$, il vient :

$$\binom{n}{k} \left[\left(\frac{a}{b}\right)^k + \left(\frac{b}{a}\right)^k \right] \geq 2 \binom{n}{k}$$

En sommant les inégalités (et en utilisant la linéarité de la somme), on obtient :

$$S_{a,b} \geq 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2 \times (1+1)^n$$

d'après la formule du binôme de Newton, *i.e.* $S_{a,b} \geq 2^{n+1}$. Finalement :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$$

Exercice 22

1. On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_0(n) = \sum_{j=0}^n 1 = n + 1$$

2. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n) &= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} \sum_{j=0}^n j^k \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} j^k \\ &= \sum_{j=0}^n (j+1)^{p+1} \quad (\text{formule du binôme de Newton}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k^{p+1} \quad (\text{changement d'indice } k = j+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} k^{p+1} \quad (\text{car } 0^{p+1} = 0) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n) = S_{p+1}(n+1)$$

3. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} S_k(n) &= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n) - \underbrace{S_{p+1}(n)}_{k=p+1} \\ &= S_{p+1}(n+1) - S_{p+1}(n) \quad (\text{question 2.}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} j^{p+1} - \sum_{j=0}^n j^{p+1} \\ &= (n+1)^{p+1} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad (n+1)^{p+1} = \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} S_k(n)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

★ Le choix $p = 0$ dans la relation obtenue à la question 3. fournit directement l'égalité :

$$S_0(n) = n + 1$$

★ Pour $p = 1$, on obtient :

$$(n+1)^2 = S_0(n) + 2S_1(n) = (n+1) + 2S_1(n)$$

Ainsi :

$$S_1(n) = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

★ Le choix $p = 2$ fournit ensuite :

$$(n+1)^3 = S_0(n) + 3S_1(n) + 3S_2(n)$$

On en tire la valeur de $S_2(n)$:

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

★ Enfin, pour $n = 3$, et en procédant de la même manière, il vient :

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$