Sommes et Produits

1 Sommes

Exercice 1 Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)$
2. $S_2 = \sum_{j=1}^{n} (2j-1)$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$
4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n} (k+n)$
5. $S_5 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$
6. $S_6 = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
7. $S_7 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$
8. $S_8 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i$
9. $S_9 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} j$
10. $S_{10} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$
11. $S_{11} = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} x^{i+j}$
12. $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1}$
13. $S_{13} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j-i)$
14. $S_{14} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j}$
15. $S_{16} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$
16. $S_{16} = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} 2^{\ell+1} 3^{n+1-\ell}$
17. $S_{17} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i+1} 2^i$
18. $S_{18} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n} \binom{p}{k} 3^k$

Indication : pour la somme S_7, on cherchera à écrire le sommant sous la forme $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

Exercice 2 Montrer que, pour tout entier naturel n :

1. $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 3

1. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
2. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 4 Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercice 5 Montrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$$

Exercice 6 Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

1. $u_{n+1} = u_n + n$
2. $u_{n+1} = u_n + n^2 - 1$

2 Produits

Exercice 7 Calculer les produits suivants :

1. $P_1 = \prod_{k=1}^{n} \sqrt{k(k+1)}$
2. $P_2 = \prod_{k=1}^{n} (-5)^{k^2-k}$
3. $P_3 = \prod_{k=1}^{n} \frac{4^k}{k^2}$
1. $P_3 = \prod_{k=0}^{n} (2k+1)$
2. $P_4 = \prod_{k=1}^{n} (4k^2-1)$
3. $P_5 = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x^{i+j}$
7. $P_7 = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$
8. $P_8 = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i^j$
9. $P_9 = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$

Exercice 8 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + x^{2^k}\right)$$
Calculer $(1-z)P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire une expression simple de P_n.

Exercice 9

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{(2n+1)\,!}{(n+1)\,!} \geqslant (n+1)^n$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)\,! \geqslant (n\,!)^n$$

Exercice 10 1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Factoriser les nombres k^3-1 et k^3+1.

2. En déduire, sans utiliser de récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$$

3. En déduire que la suite $\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 11 1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \qquad 1 + \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leqslant 4$$

Exercice 12 Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, \dots, x_n \in [0,1], \qquad \prod_{k=1}^{n} (1-x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Exercice 13 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n\,!}{k\,!} = \prod_{k=1}^{n} k^k$.

3 Coefficients binomiaux

Exercice 14 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$$

Exercice 15 Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$$

Indication : on traitera les deux dernières sommes ensemble.

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}$. *Les trois questions sont indépendantes.*

1. Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}, \qquad B = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad C = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} x^i$, calculer la somme $D = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} i x^i$.

3. Calculer également la somme suivante $E = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 18 Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$. Calculer la somme :

$$S = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$$

Exercice 19 (triangle de Pascal généralisé) Soit $p \in \mathbb{N}$. En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geqslant p$, on a :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1}$$

Exercice 20 Montrer que, pour tous $a, b > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité :

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$$