

SOMMES ET PRODUITS

1 Sommes

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{i=0}^n i(i-1)$
2. $S_2 = \sum_{j=1}^n (2j-1)$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^n (-1)^k$
4. $S_4 = \sum_{k=0}^n (k+n)$
5. $S_5 = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$
6. $S_6 = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$
7. $S_7 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$
8. $S_8 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$
9. $S_9 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} j$
10. $S_{10} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)$
11. $S_{11} = \sum_{0 \leq i, j \leq n} x^{i+j}$
12. $S_{12} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$
13. $S_{13} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j-i)$
14. $S_{14} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j}$
15. $S_{15} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$
16. $S_{16} = \sum_{\ell=1}^n \binom{n}{\ell} 2^{\ell+1} 3^{n+1-\ell}$
17. $S_{17} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i+1} 2^i$
18. $S_{18} = \sum_{0 \leq k \leq p \leq n} \binom{p}{k} 3^k$

Indication : pour la somme S_7 , on cherchera à écrire le sommante sous la forme $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

Exercice 2 Montrer que, pour tout entier naturel n :

1. $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$
2. $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 3 1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

2. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 4 Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercice 5 Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$$

Exercice 6 Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

1. $u_{n+1} = u_n + n$
2. $u_{n+1} = u_n + n^2 - 1$

Exercice 7 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!$$

2 Produits

Exercice 8 Calculer les produits suivants :

1. $P_1 = \prod_{k=1}^n \sqrt{k(k+1)}$
2. $P_2 = \prod_{k=1}^n (-5)^{k^2-k}$
3. $P_3 = \prod_{k=1}^n \frac{4^k}{k^2}$
4. $P_4 = \prod_{k=0}^n (2k+1)$
5. $P_5 = \prod_{k=1}^n (4k^2-1)$
6. $P_6 = \prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j}$
7. $P_7 = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k} \right)$
8. $P_8 = \prod_{1 \leq i, j \leq n} i^j$
9. $P_9 = \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij$

Exercice 9 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^n (1 + x^{2^k})$$

Calculer $(1-x)P_n(x)$ pour tout $n \in \{2, 3, 4\}$ et en déduire une expression simple de $P_n(x)$.

Exercice 10 1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \geq (n+1)^n$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)! \geq (n!)^n$$

Exercice 11 1. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Factoriser les nombres $k^3 - 1$ et $k^3 + 1$.

2. En déduire, sans utiliser de récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}$$

3. En déduire que la suite $\left(\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} \right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 12 1. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad 1 + \frac{1}{k^2} \leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2} \right) \leq 4$$

Exercice 13 Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in [0, 1], \quad \prod_{k=1}^n (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n x_k$$

Exercice 14 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^n k^k$.

3 Coefficients binomiaux

Exercice 15 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Pour tout entier naturel n , on pose $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$$

Exercice 16 Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$$

Indication : on traitera les deux dernières sommes ensemble.

Exercice 18 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les quatre questions sont indépendantes.

1. Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}, \quad B = \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$$

2. En considérant la fonction $g : x \mapsto (1+x)^{2n}$, démontrer que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction $f : x \mapsto \sum_{i=0}^n x^i$, calculer la somme

$$D = \sum_{i=0}^n i x^i.$$

4. Calculer également la somme suivante $E = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 19 Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$. Calculer la somme :

$$S = \sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$$

Exercice 20 (triangle de Pascal généralisé) Soit $p \in \mathbb{N}$. En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geq p$, on a :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Exercice 21 Montrer que, pour tous $a, b > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité :

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$$

Exercice 22 Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(n) = \sum_{j=0}^n j^p$. On rappelle que, par convention, on pose $0^0 = 1$.

1. Calculer $S_0(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$S_{p+1}(n+1) = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n)$$

3. En déduire que :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad (n+1)^{p+1} = \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} S_k(n)$$

4. Retrouver ainsi les valeurs de $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n)$ et $S_3(n)$ pour tout entier naturel n .