Séries numériques

1 Nature de séries

Exercice 1 Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{2^n + n}$
2. $u_n = \dfrac{\sin(1/n)}{\sqrt{n+1}}$
3. $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$
4. $u_n = \ln(n)^{-\ln(n)}$
5. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$
6. $u_n = \sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}$
7. $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$
8. $u_n = \mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3n}}\right) - \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n}$
9. $u_n = \mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
10. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{\ln(n)}\right)^{\sqrt{n}}$
11. $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$
12. $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Exercice 2 Étudier la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

Exercice 3 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}$$

Exercice 4 Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$$

Exercice 5 Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2+3n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{7^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$

Exercice 6

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)$$

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 7 Soit $x \in [0, 1]$.

1. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.
2. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité :

$$\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t,$$

calculer la somme de la série.

Exercice 8 On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Exercice 9 (constante d'Euler-Mascheroni) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$$

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

2. En déduire l'existence d'une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$
Le nombre γ est appelé constante d'Euler-Mascheroni.
3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Étudier la nature de la série de terme général :
$$x_n = a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

2 Séries abstraites

Exercice 10 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge. Étudier la nature des séries suivants :

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^2$ 2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{1+a_n}$ 3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n a_{2n}$ 4. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$

Exercice 11 Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \max(u_n, v_n)$ converge.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge.
3. On suppose que la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{u_n v_n}{u_n+v_n}$ est convergente.

Exercice 12 (critère de Raabe-Duhamel) 1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs strictement positives telles que :
$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$
Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs strictement positives telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
   (a) On suppose que $\alpha > 1$. À l'aide d'une comparaison avec une série de Riemann, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
   (b) On suppose que $\alpha < 1$. Montrer la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.
   (c) On suppose que $\alpha = 1$. À l'aide d'exemples, montrer qu'on ne peut rien conclure en général.
3. *Application* : déterminer la nature de la série de terme général :
$$u_n = \frac{2\times 4\times\cdots\times(2n)}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}$$

Exercice 13 (règle de d'Alembert) Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. On suppose que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in [0, 1[$.
   (a) Montrer que :
$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\qquad n \geqslant n_0 \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{\ell+1}{2}$$
   (b) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\qquad n \geqslant n_0 \implies u_n \leqslant u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}$$
   (c) Conclure que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.
2. Montrer que si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell > 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.
3. *Application :* étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n\,!}{n^n}$.

Exercice 14 (sommation d'Abel) Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(B_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de la manière suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad\text{et}\qquad b_n = B_{n+1} - B_n$$

1. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k$$

2. On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k)$. Montrer que la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée.

   (b) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe bornée. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x_n}{n(n+1)}$ est absolument convergente.

   (c) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n}$ est convergente.

$\boxed{3}$ Comparaison série-intégrale

Exercice 15 En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $\ln(n!)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 16

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Déterminer un équivalent de R_n quand n tend vers $+\infty$.

   Indication : on commencera par chercher un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$ pour tout entier $N \geqslant n+1$.

2. Pour tout $\alpha \in]0,1[$, déterminer un équivalent de $S_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 17 Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente.