Séries numériques

(corrigés)

Exercice 1

Exercice 2

1. La suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante de limite 0. D'après le théorème sur les séries alternées :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ est convergente}}$$

2. traitée en TD

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$. On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x+\mathcal{O}(x^2)$ et on a $\dfrac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{noté } y_n}$$

   - ⋆ La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante de limite 0 donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente (d'après le théorème sur les séries alternées).
   - ⋆ La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente (car $2>1$) donc, d'après le théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 1} y_n$ est absolument convergente et donc convergente.

   Le développement asymptotique précédemment obtenu permet de conclure que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} v_n \text{ est convergente}}$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, en posant $w_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$:

$$w_n = \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)$$

   Or $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1+\dfrac{x}{2}+\mathcal{O}(x^2)$ et $\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

   donc :

$$\begin{aligned} w_n &\underset{n\to+\infty}{=} \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \underbrace{\sin(n\pi)}_{=0}\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)+\cos(n\pi)\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= (-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \end{aligned}$$

   Or $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x+\mathcal{O}(x^3)$ et $\dfrac{\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^3}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a :

$$w_n \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^n\left(\frac{\pi}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n\pi}{2n}+\underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{\text{noté } z_n}$$

   - ⋆ La suite $\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante de limite 0 donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n\pi}{2n}$ est convergente (d'après le théorème sur les séries alternées).
   - ⋆ La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^3}$ est convergente (car $3>1$) donc, d'après le théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 1} z_n$ est absolument convergente et donc convergente.

   Le développement asymptotique précédemment obtenu permet de conclure que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} w_n \text{ est convergente}}$$

Exercice 3

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \mathrm{e}^{\frac{\ln(a)}{n}} - \frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(b)}{n}}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{\frac{\ln(c)}{n}}}{2}$$

Pour tout $x \in \{a, b, c\}$, on a $\frac{\ln(x)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on sait que $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$ donc :

$$\mathrm{e}^{\frac{\ln(x)}{n}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(x)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(a)}{n} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln(b)}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\ln(c)}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(a)}{n} - \frac{\ln\left(\sqrt{b}\right)}{n} - \frac{\ln\left(\sqrt{c}\right)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln\left(\frac{a}{\sqrt{bc}}\right)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On distingue alors trois cas.

- ⋆ **Premier cas :** $a = \sqrt{bc}$

  On a $\ln\left(\frac{a}{\sqrt{bc}}\right) = 0$ donc :

  $$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

  La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (car $2 > 1$) donc, d'après le théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

- ⋆ **Deuxième cas :** $a > \sqrt{bc}$

  On a $\ln\left(\frac{a}{\sqrt{bc}}\right) > 0$ (donc, en particulier, ce logarithme est non nul) donc :

  $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln\left(\frac{a}{\sqrt{bc}}\right)}{n}$$

  Les séries de termes généraux u_n et $\frac{\ln\left(\frac{a}{\sqrt{bc}}\right)}{n}$ sont donc de même signe (à savoir positif) à partir d'un certain rang. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln\left(\frac{a}{\sqrt{bc}}\right)}{n}$ est divergente. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

- ⋆ **Premier cas :** $a < \sqrt{bc}$

  On a ici :

  $$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln\left(\frac{a}{\sqrt{bc}}\right)}{n} \qquad i.e. \qquad -u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln\left(\frac{a}{\sqrt{bc}}\right)}{n}$$

  On utilise encore le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs et on obtient que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-u_n)$ diverge. Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

Finalement :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge si et seulement si } a = \sqrt{bc}}$$

Exercice 4

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln(n) + a\ln\left(n\left[1 + \frac{1}{n}\right]\right) + b\ln\left(n\left[1 + \frac{2}{n}\right]\right) \\
&= \ln(n) + a\ln(n) + a\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + b\ln(n) + b\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \\
&= (1 + a + b)\ln(n) + a\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + b\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)
\end{aligned}$$

On distingue ensuite deux cas.

- ⋆ **Premier cas :** $1 + a + b \neq 0$

  On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (1 + a + b)\ln(n)$ donc :

  $$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } 1 + a + b > 0 \\ -\infty & \text{si } 1 + a + b < 0 \end{cases}$$

  En particulier, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas convergente de limite 0 donc la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est (grossièrement) divergente.

⋆ **Deuxième cas :** $a+b=-1$

On a ici :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = (-b-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$$

Or $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\dfrac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathcal{O}(x^2)$ donc :

$$\begin{aligned} u_n &\underset{n\to+\infty}{=} (-b-1)\left(\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b\left(\frac{2}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{b-1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

— Si $b \neq 1$, alors :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b-1}{n}$$

Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{b-1}{n}$ sont donc de même signe constant à partir d'un certain rang. On sait que la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente donc, d'après le théorème de comparaison pour séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est divergente.

— Si $b=1$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (car $2>1$) donc, d'après le théorème de comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

Finalement :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge si et seulement si } a=-2 \text{ et } b=1}$$

Exercice 5

On note $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ la suite des sommes partielles de chacune des quatre séries.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n+3}\right) \qquad \text{(somme télescopique)} \end{aligned}$$

Ainsi, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}$ donc :

$$\boxed{\text{la série proposée converge de somme } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n} = \frac{1}{3}}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k-1)+\ln(k+1)-2\ln(k)\big) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k-1)-\ln(k)\big) + \sum_{k=2}^{n} \big(\ln(k+1)-\ln(k)\big) \\ &= -\ln(n)+\ln(n+1)-\ln(2) \qquad \text{(sommes télescopiques)} \\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(2) \end{aligned}$$

Ainsi, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2)$ donc :

$$\boxed{\text{la série proposée converge de somme } \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{7^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{7^k} & \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{7^k} \sum_{\ell=1}^{k} 1 \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} q^k \qquad \left(\text{en posant } q = \tfrac{1}{7}\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} q^\ell \times \frac{1-q^{n-\ell+1}}{1-q} \\ &= \frac{1}{1-q} \left(\sum_{\ell=1}^{n} q^\ell - q^{n+1} \sum_{\ell=1}^{n} 1 \right) \\ &= \frac{1}{1-q} \left(q \times \frac{1-q^n}{1-q} - nq^{n+1} \right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_n = \frac{q(1-q^n) - n(1-q)q^{n+1}}{(1-q)^2} = \frac{nq^{n+1} - (n+1)q^n + q}{(1-q)^2}$$

Comme $q = \dfrac{1}{7} \in]-1, 1[$, on a $nq^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (par croissances comparées). On en déduit que $nq^{n+1} - (n+1)q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{1}{7} \times \frac{49}{36} = \frac{7}{36}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la série proposée converge de somme } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{7^n} = \frac{7}{36}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3(k+1)+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+4} \right) \qquad \text{(somme télescopique)} \end{aligned}$$

Ainsi, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{la série proposée converge de somme } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} = \frac{1}{3}}$$

Exercice 6

1. On considère la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right) \end{array} \right.$$

La fonction $x \longmapsto x^2 + x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas (son discriminant étant strictement négatif). La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ est donc bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme composition de fonctions qui le sont). De même, la fonction $x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x+1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Finalement, la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}}{1+\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2+1} \\ &= \frac{(1+x^2) - \left[1+(x^2+2x+1)\right]}{(1+x^2)(2+2x+x^2)} + \frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} \\ &= -\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} + \frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$. Or :

$$f(0) = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) - \mathrm{Arctan}(1) = 0$$

donc la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)}$$

2. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \text{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \big(\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k)\big) \\ &= \text{Arctan}(n+1) - \underbrace{\text{Arctan}(0)}_{=0} \end{aligned}$$

car la somme obtenue est télescopique. Or :

$$\text{Arctan}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} \qquad \text{donc} \qquad \text{Arctan}(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente de limite $\dfrac{\pi}{2}$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{la série proposée converge de somme } \sum_{n=0}^{+\infty} \text{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 7

1. Soit $x \in [0,1]$.

 ⋆ Pour $x = 1$, la série est alternée de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. Comme la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante de limite donc, d'après le théorème sur les séries alternées, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente.

 ⋆ On suppose maintenant que $x \in [0,1[$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \left|\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right| = \frac{x^n}{n} \leqslant x^n$$

 Comme $x \in [0,1[$, la série géométrique de raison x est convergente. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\right|$ est convergente. Autrement dit, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ est absolument convergente et donc convergente.

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in [0,1], \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \text{ est convergente}}$$

2. Soit $x \in [0,1]$.

 ⋆ Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = \frac{x^k}{k} \qquad (0^k = 0 \text{ car } k \geqslant 1),$$

 ce qui justifie l'égalité proposée.

 ⋆ Notons $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

 On a :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1}\right) \mathrm{d}t \qquad \text{(linéarité de l'intégrale)} \end{aligned}$$

 Pour tout $t \in [0,x]$, on a $-t \neq 1$ (car $-t \leqslant 0$) donc :

$$\sum_{k=1}^{n} (-t)^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} (-t)^{\ell} = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1+(-1)^{n+1}t^n}{1+t}$$

 Ainsi :

$$\begin{aligned} S_n = \int_0^x \frac{1+(-1)^{n+1}t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \underbrace{\int_0^x \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}_{\text{noté } I_n} \\ &= \ln(1+x) + (-1)^{n+1} I_n \qquad (*) \end{aligned}$$

 Montrons que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour tout $t \in [0,x]$, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 0$ et $t^n \geqslant 0$ donc :

$$\forall t \in [0,x], \qquad 0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$$

 Par croissance de l'intégrale (on a bien $0 \leqslant x$), on obtient :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t$$

 Or, d'après le premier point,

$$\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad (\text{car } 0 \leqslant x \leqslant 1)$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Or $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que $(-1)^{n+1}I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite convergente de limite 0). On déduit donc de $(*)$ que :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1+x)$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)}$$

Exercice 8

- ⋆ Justifions d'abord la convergence des séries $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

et la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (car $2 > 1$). Ainsi, ,la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ est absolument convergente et donc convergente. De plus :

$$\frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n^2}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2}$ est convergente donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ est convergente.

- ⋆ Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Or on sait que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc :

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

On en déduit que :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

- ⋆ Notons $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a :

$$\begin{aligned} T_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{(2k+1)-1}}{(2k+1)^2} \\ &= -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}}_{=S_n} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$T_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{12}$$

Or, d'après le premier point, la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc :

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} T_{2n+1} = \frac{\pi^2}{12}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}}$$

Exercice 9

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} u_n = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) &= \frac{1}{n} - \ln\left(n\left[1+\frac{1}{n}\right]\right) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$ et on a $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

- ⋆ La suite $\left(\dfrac{1}{2n^2}\right)_{n\geqslant 1}$ est à valeurs strictement positives donc, d'après l'équivalent ci-dessus, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est positive à partir d'un certain rang.
- ⋆ La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (car $2 > 1$) donc la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n^2}$ est convergente.

Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ est convergente}}$$

2. Notons $\gamma \in \mathbb{R}$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ (dont la convergence a été démontrée précédemment). Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma \qquad i.e. \qquad \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} u_k &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \ln(k) - \ln(k+1)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k) - \ln(k+1)\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \qquad \text{(somme télescopique)} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n+1) + \gamma + \mathrm{o}(1) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \mathrm{o}(1) \end{aligned}$$

Or :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{donc} \qquad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)}$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n = \exp\left(\ln(a) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$$

On utilise maintenant le développement asymptotique obtenu à la question précédente :

$$\begin{aligned} x_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\ln(a)(\ln(n)+\gamma+\mathrm{o}(1))} &\underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}^{\ln(a)\ln(n)+\gamma\ln(a)+\mathrm{o}(1)} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} a^{\gamma} n^{\ln(a)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{o}(1)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a^\gamma n^{\ln(a)} \qquad i.e. \qquad x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a^\gamma}{n^{-\ln(a)}}$$

On distingue deux cas.

★ **Premier cas :** $a \in [\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$

Alors $\ln(a) \geqslant -1$ puis $-\ln(a) \leqslant 1$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{-\ln(a)}}$ est donc divergente. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^\gamma}{n^{-\ln(a)}}$ est donc divergente. Les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a^\gamma}{n^{-\ln(a)}}$ et $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ sont à termes positifs donc le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ est divergente.

★ **Deuxième cas :** $a \in]0, \mathrm{e}^{-1}[$

On a ici $-\ln(a) > 1$ donc la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{-\ln(a)}}$ est convergente. On conclut à nouveau à l'aide du théorème de comparaison pour les séries à termes positifs : la série $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ est convergente.

Finalement :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} x_n \text{ est convergente si et seulement si } a \in]0, \mathrm{e}^{-1}[}$$

Exercice 10

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge.

1. La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge donc $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies 0 \leqslant a_n \leqslant 1$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies 0 \leqslant a_n^2 = a_n \times a_n \leqslant a_n$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant n_0} a_n^2$ converge. Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} a_n^2 \text{ converge}}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $1 + a_n \geqslant 0$ (car $a_n \geqslant 0$) donc, en multipliant par $a_n \geqslant 0$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \frac{a_n}{1+a_n} \leqslant a_n$$

Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{1+a_n} \text{ est convergente}}$$

3. On peut procéder comme à la question 1. : comme $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a aussi $a_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il existe donc un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies 0 \leqslant a_{2n} \leqslant 1$$

d'où l'on déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies 0 \leqslant a_n a_{2n} \leqslant a_n$$

On conclut comme à la première question. On obtient donc que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} a_n a_{2n} \text{ est convergente}}$$

4. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$(x-y)^2 \geqslant 0 \qquad i.e. \qquad x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0 \qquad i.e. \qquad xy \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leqslant \frac{\sqrt{a_n}}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$$

Les séries $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergentes donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison de séries à termes positifs :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n} \text{ est convergente}}$$

Exercice 11 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergent.

1. On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n \qquad (\text{car } u_n, v_n \in \mathbb{R}_+)$$
Les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergent donc la série $\sum_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ converge. Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure que :
$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} \max(u_n, v_n) \text{ converge}}$$

2. On utilise l'inégalité suivante (établie dans l'exercice 10) :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad xy \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2}$$
On a :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \sqrt{u_n v_n} = \sqrt{u_n}\sqrt{v_n} \leqslant \frac{u_n + v_n}{2}$$
Les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ convergent donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n}$ converge. Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure que :
$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} \sqrt{u_n v_n} \text{ converge}}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$u_n v_n \leqslant \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} \qquad \text{donc} \qquad \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2}{u_n + v_n} + \frac{v_n^2}{u_n + v_n}\right)$$
car $u_n + v_n > 0$. Comme $u_n + v_n \geqslant u_n$ (car $v_n \geqslant 0$), on a :
$$\frac{u_n^2}{u_n + v_n} \leqslant u_n \qquad \text{et, de même,} \qquad \frac{v_n^2}{u_n + v_n} \leqslant v_n$$
Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$
Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure que :
$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n v_n}{u_n + v_n} \text{ est convergente}}$$

Exercice 12

1. (a) On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite $\ell \in [0, 1[$. Par définition de la convergence d'une suite, on a :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_\varepsilon \implies \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$
i.e. :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_\varepsilon \implies \ell - \varepsilon \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon \qquad (\dagger)$$
Comme $\ell < 1$, on a $\frac{1-\ell}{2} > 0$. On peut donc choisir $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ dans la définition ci-dessus. Pour ce choix :
$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{\ell+1}{2}}$$

   (b) On utilise un raisonnement par récurrence.
   - ⋆ On a :
$$u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n_0 - n_0} = u_{n_0} \geqslant u_{n_0}$$
L'inégalité est donc vérifiée au rang n_0.
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$. On suppose que $u_n \leqslant u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}$. Montrons que :
$$u_{n+1} \leqslant u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n+1-n_0}$$
Comme $n \geqslant n_0$, on a d'après la question précédente :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{\ell+1}{2} \qquad \textit{i.e.} \qquad u_{n+1} \leqslant \frac{\ell+1}{2}u_n \qquad (\text{car } u_n > 0)$$
Or $u_n \leqslant u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}$ (hypothèse de récurrence) et $\frac{\ell+1}{2} \geqslant 0$ donc :
$$\frac{\ell+1}{2}u_n \leqslant \frac{\ell+1}{2} \times u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} = u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n+1-n_0}$$
Par transitivité de la relation $\leqslant$, on a donc $u_{n+1} \leqslant u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n+1-n_0}$, ce qui prouve l'inégalité au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant n_0 \implies u_n \leqslant u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}}$$

(c) Comme $\ell \in [0,1[$, on a $\frac{\ell+1}{2} \in [0,1[\subset]-1,1[$. La série géométrique $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^n$ est donc convergente. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}$ converge. D'après les inégalités obtenues à la question précédente et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge. Par conséquent :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge}}$$

2. On procède comme à la question 1. On peut choisir $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$ (car $\ell > 1$) dans (†) et on obtient l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{\ell+1}{2}$$

On montre alors par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies u_n \geqslant u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}$$

Or $u_{n_0} > 0$ (la suite $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ étant à valeurs positives et $\frac{\ell+1}{2} > 1$ (car $\ell > 1$) donc :

$$u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Le théorème de comparaison (pour les suites) nous donne alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En particulier, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente de limite 0 donc :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ est (grossièrement) divergente}}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \frac{n\,!}{n^n} > 0$ et :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)\,!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n\,!} = \frac{(n+1)\times n\,!}{(n+1)\times(n+1)^n} \times \frac{n^n}{n\,!}\\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n}\\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\\ &= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\\ &= \exp\left[n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]\end{aligned}$$

On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{} x$ et on a $-\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$$

et donc :

$$n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -1$$

La fonction exponentielle est continue en -1 donc, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1}$$

Or $\mathrm{e}^{-1} \in [0,1[$ donc, d'après la règle de d'Alembert (question 1.) :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} \frac{n\,!}{n^n} \text{ est convergente}}$$

Exercice 13

On pose $A_0 = 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $a_k = A_k - A_{k-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k B_k &= \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) B_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k B_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} B_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k B_k - \sum_{\ell=0}^{n-1} A_\ell B_{\ell+1} \qquad \text{(changement d'indice } \ell = k-1\text{)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k B_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k B_{k+1} \qquad \text{(car } A_0 = 0\text{)} \\ &= A_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1})\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \sin(k) = \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{ik})$$

donc, par $\mathbb{R}$-linéarité de la partie imaginaire, on a :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik}\right) = \operatorname{Im}(E_n) \qquad \text{en posant} \qquad E_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ik}$$

Or :

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{i}\right)^k = \mathrm{e}^{i} \times \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{i}\right)^n}{1 - \mathrm{e}^{i}} = \mathrm{e}^{i} \times \frac{1 - \mathrm{e}^{in}}{1 - \mathrm{e}^{i}}$$

donc :

$$\begin{aligned}|E_n| = \underbrace{|\mathrm{e}^{i}|}_{=1} \times \frac{|1 - \mathrm{e}^{in}|}{|1 - \mathrm{e}^{i}|} &\leqslant \frac{1 + |\mathrm{e}^{in}|}{|1 - \mathrm{e}^{i}|} \qquad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &= \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{i}|}\end{aligned}$$

On sait par ailleurs que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$$

donc :

$$|\operatorname{Im}(E_n)| \leqslant |E_n| \leqslant \frac{1}{|1 - \mathrm{e}^{i}|}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |A_n| \leqslant \frac{1}{|1 - \mathrm{e}^{i}|}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (A_n)_{n \geqslant 1} \text{ est bornée}}$$

(b) Soit $(x_n)_{n \geqslant 1}$ une suite complexe bornée. Il existe alors $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |x_n| \leqslant M$$

La série $\sum_{n \geqslant 1} \left|\frac{x_n}{n(n+1)}\right|$ est à termes positifs donc cette série converge si et seulement si la suite (notée $(X_n)_{n \geqslant 1}$) de ses sommes partielles est majorée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}X_n = \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{x_k}{k(k+1)}\right| &= \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|}{k(k+1)} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{k(k+1)} \\ &= M \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= M \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \qquad \text{(somme télescopique)} \\ &\leqslant M\end{aligned}$$

La suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ est donc majorée (par M). La série $\sum_{n \geqslant 1} \left|\frac{x_n}{n(n+1)}\right|$ est donc convergente. Autrement dit :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} \frac{x_n}{n(n+1)} \text{ est absolument convergente}}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$a_n = \sin(n) \qquad \text{et} \qquad B_n = \frac{1}{n}$$

Par ailleurs, on note $(S_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après la question 1., on a :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k)}{k}=\sum_{k=1}^{n}a_kB_k=A_nB_n-\sum_{k=1}^{n-1}A_kb_k \qquad (*)$$

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$b_k=B_{k+1}-B_k=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}=-\frac{1}{k(k+1)}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n-1}A_kb_k=-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_k}{k(k+1)}$$

Comme la suite $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est bornée, on sait d'après la question précédente que la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{A_k}{k(k+1)}$ est absolument convergente et donc convergente. Ainsi, la suite $\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{A_k}{k(k+1)}\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente. Par ailleurs, la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et on a $B_n=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $A_nB_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. D'après $(*)$, la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente. Finalement :

$$\boxed{\text{la série }\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(n)}{n}\text{ est convergente}}$$

Exercice 14

Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On a :

$$\ln(n!)=\ln\left(\prod_{k=1}^{n}k\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k)=\sum_{k=2}^{n}\ln(k)$$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. La fonction ln est croissante sur l'intervalle $[k,k+1]$ donc :

$$\forall t\in[k,k+1],\qquad \ln(k)\leqslant\ln(t)\leqslant\ln(k+1)$$

et donc, par croissance de l'intégrale,

$$\int_k^{k+1}\ln(k)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_k^{k+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_k^{k+1}\ln(k+1)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad \ln(k)\overset{(*)}{\leqslant}\int_k^{k+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t\overset{(**)}{\leqslant}\ln(k+1)$$

★ En sommant les inégalités $(*)$ sur les entiers $k\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t\qquad i.e.\qquad \ln(n!)\leqslant\int_1^{n+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$

★ On somme maintenant les inégalités $(**)$ sur les entiers $k\in[\![1,n-1]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)=\sum_{k=2}^{n-1}\ln(k)\qquad i.e.\qquad \int_1^{n}\ln(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\ln(n!)$$

Ainsi :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\qquad \int_1^{n}\ln(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\ln(n!)\leqslant\int_1^{n+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\int_1^{n}\ln(t)\,\mathrm{d}t=\Big[t\ln(t)-t\Big]_1^n=n\ln(n)-n+1\underset{n\to+\infty}{\sim}n\ln(n)$$

et :

$$\begin{aligned}\int_1^{n+1}\ln(t)\,\mathrm{d}t&=(n+1)\ln(n+1)-n=(n+1)\ln\left(n\left[1+\frac{1}{n}\right]\right)-n\\&=n\ln(n)+\ln(n)+\underbrace{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\sim}1}-n\\&\underset{n\to+\infty}{\sim}n\ln(n)\end{aligned}$$

Les inégalités précédentes et le théorème des gendarmes (version équivalent) permet de conclure que :

$$\boxed{\ln(n!)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\ln(n)}$$

Exercice 15

1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $N\in\mathbb{N}\setminus[\![0,n]\!]$. On pose $R_{n,N}=\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k^2}$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. La fonction $t\longmapsto\frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\forall t\in[k,k+1],\qquad \frac{1}{(k+1)^2}\leqslant\frac{1}{t^2}\leqslant\frac{1}{k^2}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{(k+1)^2} \overset{(*)}{\leqslant} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \overset{(**)}{\leqslant} \frac{1}{k^2}$$

- ⋆ En sommant les inégalités $(**)$ sur les entiers $k \in [\![n+1, N]\!]$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \qquad \textit{i.e.} \qquad \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant R_{n,N}$$

- ⋆ On somme maintenant les inégalités $(*)$ sur les entiers $k \in [\![n, N-1]\!]$:

$$\sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=n}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{i.e.} \qquad R_{n,N} = \sum_{\ell=n+1}^{N} \frac{1}{\ell^2} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi :

$$\forall N \geqslant n+1, \qquad \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant R_{n,N} \leqslant \int_n^N \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

i.e., en calculant les intégrales :

$$\forall N \geqslant n+1, \qquad \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leqslant R_{n,N} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$$

Or $R_{n,N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} R_n$ donc on obtient, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans les inégalités précédentes :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Or $\dfrac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc, d'après le théorème des gendarmes (version équivalent) :

$$\boxed{R_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

2. Soient $\alpha \in]-\infty, 1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\alpha > 0$ donc :

$$\forall t \in [k, k+1], \qquad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

et donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \overset{(*)}{\leqslant} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \overset{(**)}{\leqslant} \frac{1}{k^\alpha}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- ⋆ On somme les inégalités $(**)$ sur les entiers $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \qquad \textit{i.e.} \qquad \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant S_n(\alpha)$$

- ⋆ On somme les inégalités $(*)$ sur les entiers $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \qquad \textit{i.e.} \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

et comme :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - 1 = S_n(\alpha) - 1, \qquad \text{on a} \qquad S_n(\alpha) \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant S_n(\alpha) \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a (puisque $\alpha \neq 1$) :

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) \leqslant S_n(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right)$$

Comme $\alpha < 1$, on a $n^{1-\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $(n+1)^{1-\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc :

$$\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \qquad \text{et} \qquad 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Les inégalités précédentes et le théorème précédent (version équivalent) permettent de conclure que :

$$\boxed{S_n(\alpha) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

Exercice 16 On note $(S_n)_{n\geqslant 2}$ la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln(n)}$.

Soit $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. La fonction $t\longmapsto\dfrac{1}{t\ln(t)}$ est décroissante sur l'intervalle $[2,+\infty[$ donc :

$$\forall t\in[k,k+1],\qquad \frac{1}{t\ln(t)}\leqslant\frac{1}{k\ln(k)}$$

puis, par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1}\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{k\ln(k)}\,\mathrm{d}t\qquad i.e.\qquad \int_k^{k+1}\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{k\ln(k)}$$

Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. En sommant les inégalités précédentes sur les entiers $k\in[\![2,n]\!]$, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}\qquad i.e.\qquad \int_2^{n+1}\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t\leqslant S_n$$

Or :

$$\int_2^{n+1}\frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t=\Big[\ln(\ln(t))\Big]_2^{n+1}=\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(2))$$

Ainsi :

$$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\},\qquad S_n\geqslant\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(2))$$

Comme $\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln(2))\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, le théorème de comparaison (pour les suites) nous permet de conclure que $S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$. Autrement dit :

$$\boxed{\text{la série }\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n\ln(n)}\text{ est divergente}}$$