Question 910

Vincent Devinck

Question. Pour tout entier n au moins égal à 2 on pose $S_n = \displaystyle\sum_{z^n=1\,;\,z\neq 1} \frac{1}{|1-z|}$.
Dans l'exercice 7 corrigé dans RMS 123-4, on établit l'existence d'une constante strictement positive C telle que $S_n \leqslant Cn\ln n$ pour tout n.
Étudier l'existence et le calcul des constantes a, b, c tels que $S_n - an\ln n - bn$ tend vers c quand n tend vers ∞.

(RMS)

Solution. Nous allons démontrer le résultat suivant.

Théorème 1. *Le développement asymptotique de la suite* $(S_n)_{n\geqslant 2}$ *est*

$$S_n \underset{+\infty}{=} \frac{n}{\pi}\ln(n) + \frac{n}{\pi}\left(\gamma + \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)\right) + \mathrm{o}(1)$$

où $\gamma = 1 - \displaystyle\int_1^{+\infty} \{t\}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \approx 0,5772156649\ldots$ *est la constante d'Euler. Nous obtenons donc les coefficients* :

$$a = \frac{1}{\pi}, \qquad b = \frac{1}{\pi}\left(\gamma + \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)\right) \qquad \textit{et} \qquad c = 0$$

Nous commençons par expliciter les sommes que nous souhaitons estimer. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. D'après la formule d'Euler pour le sinus, on a

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \qquad \left|1 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right| = \left|-2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right| = 2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

car $\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) \geqslant 0$ puisque $\dfrac{k\pi}{n} \in [0,\pi]$. Donc

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left|1 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right|} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \tag{1}$$

L'existence et le calcul de a, b et c se déroule en essentiellement deux étapes. Donnons en l'idée générale. La somme S_n $(n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\})$ est la somme de Riemann d'une fonction qui n'est pas définie en 0 et en π. L'idée est alors de *perturber* cette fonction (et donc de modifier la somme S_n) pour obtenir une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle $[0,\pi]$ dans le but d'appliquer un théorème *renforcé* sur les sommes de Riemann (proposition **??**). Dans un premier temps, nous allons chercher un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$, ce qui nous donnera la valeur de a (proposition **??**). Nous remarquons que cet équivalent est lié à celui de la suite des sommes partielles de la série harmonique (ce qui est précisé dans le lemme **??**) dont il est plus facile d'en donner un développement asymptotique. En perturbant la somme initiale par une somme liée à la série harmonique, nous faisons apparaître les sommes de Riemann d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0,\pi]$, ce qui nous permet d'appliquer le théorème évoqué sur ce type de sommes (proposition **??**) et d'en déduire finalement le développement asymptotique de notre suite.

Première étape : recherche d'un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$

Pour obtenir cet équivalent, nous aurons besoin d'un développement asymptotique de la suite des sommes partielles de la série harmonique.

Lemme 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a le développement asymptotique suivant :*

$$h_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $\gamma = 1 - \displaystyle\int_1^{+\infty} \{t\} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \approx 0,5772156649\ldots$ est la constante d'Euler. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a ici noté $\{t\}$ la partie fractionnaire de t qui est définie par $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ où $\lfloor t \rfloor$ est la partie entière de t.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise une sommation par parties :

$$\begin{aligned} h_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_k^n \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{1}{n} \right) &= \sum_{k=1}^{n} \int_1^n \mathbf{1}_{[k,n]}(t) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 1 \\ &= \int_1^n \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[k,n]}(t) \right) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 1 \\ &= \int_1^n \lfloor t \rfloor \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 1 \end{aligned}$$

car pour tout $t \in [1,n]$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[k,n]}(t)$ compte le nombre d'entiers naturels k non nuls inférieurs ou égaux à t. Donc

$$\begin{aligned} h_n &= \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + 1 - \int_1^n \{t\} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= \ln(n) + \left(1 - \int_1^{+\infty} \{t\} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \right) + \int_n^{+\infty} \{t\} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \end{aligned}$$

car l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \{t\} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (puisque $0 \leqslant \{t\} \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et par comparaison de fonctions intégrables à valeurs positives). En majorant la partie fractionnaire par 1, on trouve donc que

$$h_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{2}$$

En posant $u_n = h_n - \ln(n) - \gamma$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= h_{n+1} - \ln(n+1) - h_n + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{1}{n\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est convergente. D'après le théorème de sommation des équivalents (sur les restes des séries équivalentes convergentes), on sait que

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

c'est-à-dire

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ d'après (**??**). On utilise maintenant une comparaison série-intégrale pour déterminer un équivalent de la série $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ quand n tend vers $+\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a par décroissance de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1\}$, il vient en sommant (les séries numériques mises en jeu sont convergentes) :

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n-1} \qquad \text{d'où l'on déduit que} \qquad \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

en divisant par $\dfrac{1}{n}$ dans chaque membre de ces inégalités et en invoquant le théorème des gendarmes. Finalement, $u_n \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, c'est-à-dire $h_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \dfrac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. □

Remarque. Ce développement asymptotique montre en particulier que la suie $(h_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite γ et donc

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)$$

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de cette partie.

Proposition 2. *On a l'équivalent suivant* :

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi}\ln(n) \qquad \textit{et donc} \qquad a = \frac{1}{\pi}$$

Démonstration. Si A et α sont des nombres réels tels que $\alpha > 0$, la notation $A = \mathcal{O}^*(\alpha)$ signifiera que $|A| \leqslant \alpha$. Nous allons utiliser la formule de symétrie du sinus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x) \tag{3}$$

pour démontrer le lemme suivant.

Lemme 2. *Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a l'égalité*

$$S_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} + \mathcal{O}^*(1) \tag{4}$$

Démonstration. Justifions cette égalité en distinguant deux cas suivant la parité de n. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Si n est impair, alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2m+1$ et donc

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)} + \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)} + \frac{1}{2}\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{\sin\left(\frac{(2m+1-k)\pi}{2m+1}\right)}
\end{aligned}$$

d'après (**??**). Le changement d'indice $j = 2m+1-k$ dans la deuxième somme fournit

$$S_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

puisque $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor m + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = m$. Autrement dit, la constante $\mathcal{O}^*(1)$ est nulle dans ce cas. Si maintenant n est pair, alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2m$ et donc

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)} + \frac{1}{2}\sum_{k=m}^{2m-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)} + \frac{1}{2}\sum_{k=m}^{2m-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{(2m-k)\pi}{2m}\right)} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

car on a compté deux fois le terme d'indice m (et toujours d' après la formule de symétrie du sinus (**??**) pour la deuxième égalité). Le changement d'indice $j = 2m-k$ dans la deuxième somme fournit

$$S_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{2m}\right)} - \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} - \frac{1}{2}$$

car ici $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = \lfloor m \rfloor = m$. Autrement dit, la constante $\mathcal{O}^*(1)$ vaut $-\dfrac{1}{2}$ dans ce deuxième et dernier cas. Ceci démontre l'égalité (**??**) et le lemme. □

Pour démontrer la proposition **??**, nous allons commencer par utiliser le développement en série entière de la fonction sinus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} \tag{5}$$

Si $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la série mise en jeu est alternée. En effet, pour un tel nombre réel x, on a pour tout entier naturel n :

$$\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)\,!} \times \frac{(2n+1)\,!}{x^{2n+1}} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} \leqslant \frac{\pi^2}{4(2n+2)(2n+3)} \leqslant \frac{\pi^2}{24} \leqslant 1$$

et donc la suite des valeurs absolues du terme général de la série (**??**) est décroissante (et elle tend bien vers 0). D'après le critère de convergence des séries alternées, le reste $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!}$ vérifie, pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} \right| \leqslant \frac{x^3}{6} \tag{6}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le lemme **??**, le développement en série entière en 0 de la fonction sinus appliqué en tout entier $k \in [\![1, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$ (on a bien $0 < \dfrac{k\pi}{n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$) et la majoration (**??**) fournissent :

$$S_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{\frac{k\pi}{n} + \mathcal{O}^*\left(\frac{k^3\pi^3}{6n^3}\right)} + \mathcal{O}^*(1) = \frac{n}{\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k} \times \frac{1}{1 + \mathcal{O}^*\left(\frac{k^2\pi^2}{6n^2}\right)} + \mathcal{O}^*(1)$$

Soit $k \in [\![1, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$. On a $\left|\mathcal{O}^*\left(\dfrac{k^2\pi^2}{6n^2}\right)\right| \leqslant \dfrac{k^2\pi^2}{6n^2}$ donc, puisque $k \in [\![1, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$, il vient

$$1 + \mathcal{O}^*\left(\frac{k^2\pi^2}{6n^2}\right) \geqslant 1 - \frac{k^2\pi^2}{6n^2} \geqslant 1 - \frac{\pi^2}{24}$$

Ainsi,

$$\left| \frac{1}{1 + \mathcal{O}^*\left(\frac{k^2\pi^2}{6n^2}\right)} - 1 \right| = \left| \frac{\mathcal{O}^*\left(\frac{k^2\pi^2}{6n^2}\right)}{1 + \mathcal{O}^*\left(\frac{k^2\pi^2}{6n^2}\right)} \right| \leqslant \left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right)^{-1} \frac{k^2\pi^2}{6n^2} \leqslant \frac{3k^2}{n^2} \tag{7}$$

puisque $\left(1 - \dfrac{\pi^2}{24}\right)^{-1} \dfrac{\pi^2}{6} \leqslant 3$. L'estimation (**??**) nous donne donc,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k} \left(1 + \mathcal{O}^*\left(\frac{3k^2}{n^2}\right)\right) + \mathcal{O}^*(1) \\ &= \frac{n}{\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{1}{k} + \mathcal{O}^*\left(\frac{3k}{n^2}\right)\right) + \mathcal{O}^*(1) \\ &= \frac{n}{\pi} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k} + \mathcal{O}^*\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k\right) + \mathcal{O}^*(1) \end{aligned} \tag{8}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k \leqslant \sum_{k=1}^{n} k \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

et le lemme **??** nous donne, en particulier,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k} &\underset{+\infty}{=} \ln\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \mathcal{O}(1) \underset{+\infty}{=} \ln\left(\frac{n}{2} + \mathcal{O}(1)\right) + \mathcal{O}(1) \\ &\underset{+\infty}{=} \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

où la dernière égalité s'obtient en factorisant par $\dfrac{n}{2}$ dans le logarithme. En injectant ces deux estimations dans (**??**), on obtient

$$S_n \underset{+\infty}{=} \frac{n}{\pi} \ln\left(\frac{n}{2}\right) + \mathcal{O}(n) \underset{+\infty}{=} \frac{n}{\pi} \ln(n) + \mathcal{O}(n)$$

Finalement,

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\pi} \ln(n) \qquad \text{et donc} \qquad a = \frac{1}{\pi}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition **??**. □

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$ n'étant pas définie en 0 et en π, nous allons retrancher à la somme S_n une somme dont on sait en calculer un développement asymptotique, et qui aura pour effet de faire apparaître une somme de Riemann d'une fonction suffisamment régulière sur l'intervalle $[0, \pi]$. C'est ce que nous allons étudier dans la suite.

Deuxième étape : à la recherche des deuxième et troisième termes

Afin de compléter l'équivalent précédemment obtenu, nous allons utiliser le résultat suivant qui précise le terme d'erreur dans le théorème lié aux sommes de Riemann.

Proposition 3. *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a, b]$. Alors*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \underset{+\infty}{=} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{b-a}{2n} \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, posons $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$. Posons encore

$$r_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

D'après la relation de Chasles, on a

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left(f(x_k) - f(x)\right)\,\mathrm{d}x$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et $x \in [x_{k-1}, x_k]$. La fonction f est continue sur le segment $[x, x_k]$ et dérivable sur $]x, x_k[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_{k,x} \in\,]x, x_k[$ (dépendant de k et de x) tel que

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x) &= f'(\xi_{k,x})\,(x_k - x) \\ &= f'(x_k)\,(x_k - x) + \big(f'(\xi_{k,x}) - f'(x_k)\big)\,(x_k - x) \end{aligned}$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, la fonction f' est continue sur $[\xi_{k,n}, x_k]$ et dérivable sur $]\xi_{k,n}, x_k[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta_{k,x} \in\,]\xi_{k,n}, x_k[$ (dépendant de k et de x) tel que

$$f'(\xi_{k,x}) - f'(x_k) = f''(\theta_{k,x})\,(\xi_{k,x} - x_k)$$

et donc

$$f(x_k) - f(x) = f'(x_k)\,(x_k - x) + f''(\theta_{k,x})\,(\xi_{k,x} - x_k)\,(x_k - x)$$

Par linéarité de l'intégrale, on a donc

$$r_n = \sum_{k=1}^{n} f'(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(\theta_{k,x})\,(\xi_{k,x} - x_k)\,(x_k - x)\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

D'une part,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} f'(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)\,\mathrm{d}x &= \frac{(b-a)^2}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} f'(x_k) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left(\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{o}(1)\right) \\ &= \frac{b-a}{2n} \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

car la fonction f' est continue sur le segment $[a, b]$ donc la suite $\left(\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(x_k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes de Riemann de f' est convergente de limite $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$. D'autre part, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$, la fonction f'' est bornée sur ce segment donc il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, on ait $|f''(x)| \leqslant M$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $x \in [x_{k-1}, x_k]$, on a

$$\left|f''(\theta_{k,x})\,(\xi_{k,x} - x_k)\,(x_k - x)\right| \leqslant \frac{M(b-a)^2}{n^2}$$

puisqu'on sait aussi que $\xi_{k,x} \in [x_{k-1}, x_k]$. L'inégalité triangulaire pour les sommes et les intégrales fournit alors :

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(\theta_{k,x})\,(\xi_{k,x} - x_k)\,(x_k - x)\;\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{n^2} \tag{11}$$

L'égalité (**??**), l'estimation (**??**) et la majoration (**??**) permettent de conclure que

$$r_n = \frac{b-a}{2n}\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

ce qui achève la démonstration de la proposition **??**. □

Nous allons appliquer la proposition **??** à la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall x \in]0, \pi[, \qquad f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} - \frac{1}{\pi - x} \qquad \text{et} \qquad f(0) = f(\pi) = -\frac{1}{\pi} \tag{12}$$

Commençons par en dégager quelques propriétés.

Lemme 3. *1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle* $[0, \pi]$.

2. On a les égalités :

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right) \qquad \textit{et} \qquad \int_0^\pi f'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Démonstration. 1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc en particulier de classe $\mathcal{C}^2$) sur l'intervalle $]0, \pi[$ comme somme et quotient de fonctions qui le sont (et qui ne s'y annulent pas). Pour montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0, \pi]$, on utilise le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Il suffit pour cela de démontrer que les fonctions f, f' et f'' admettent des limites finies en 0 et en π. Commençons par faire l'étude en 0. On sait que $\sin(x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$ donc

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} \underset{0}{\sim} \frac{x}{6}$$

et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{\pi}$. De plus,

$$\forall x \in]0, \pi[, \qquad f'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(\pi - x)^2}$$

et donc, en utilisant les développements limités des fonctions cosinus et sinus en 0, on a

$$\begin{aligned}\frac{-\cos(x)}{\sin(x)^2} + \frac{1}{x^2} &= \frac{\sin(x)^2 - x^2\cos(x)}{x^2\sin(x)^2}\\ &\underset{0}{=} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} - x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}(x^4)}{x^4 + \mathrm{o}(x^4)}\\ &\underset{0}{\sim} \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Donc $\lim_{x\to 0} f'(x) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{\pi^2}$. Ensuite,

$$\forall x \in]0,\pi[, \qquad f''(x) = \frac{\sin(x)^3 + 2\sin(x)\cos(x)^2}{\sin(x)^4} - \frac{2}{x^3} - \frac{2}{(\pi - x)^3}$$
$$= \frac{x^3\left(\sin(x)^3 + 2\sin(x)\cos(x)^2\right) - 2\sin(x)^4}{x^3\sin(x)^4} - \frac{2}{(\pi-x)^3}$$

et en posant $g(x) = \dfrac{x^3\left(\sin(x)^3 + 2\sin(x)\cos(x)^2\right) - 2\sin(x)^4}{x^3\sin(x)^4}$ pour tout $x \in]0,\pi[$, on a

$$g(x) \underset{0}{=} \frac{x^3\left(x^3 + \mathrm{o}(x^4) + 2\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)\right)\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}(x^4)\right)\right) - 2\left(x^4 - \frac{2x^6}{3} + \mathrm{o}(x^7)\right)}{x^3(x^4 + \mathrm{o}(x^4))}$$
$$\underset{0}{=} \frac{x^3\left(2x - \frac{4x^3}{3} + \mathrm{o}(x^4)\right) - 2x^4 + \frac{4x^6}{3} + \mathrm{o}(x^7)}{x^7 + \mathrm{o}(x^7)}$$
$$\underset{0}{\sim} \frac{\mathrm{o}(x^7)}{x^7 + \mathrm{o}(x^7)}$$

Donc $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ d'où l'on déduit que $\lim_{x\to 0} f''(x) = -\dfrac{2}{\pi^3}$. Le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ permet alors d'affirmer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0,\pi[$. Nous remarquons ensuite que

$$\forall x \in]0,\pi[, \qquad f(\pi - x) = f(x) \tag{13}$$

ce qui fournit, par dérivations successives,

$$\forall x \in]0,\pi[, \qquad f'(x) = -f'(\pi - x) \quad \text{et} \quad f''(x) = f''(\pi - x) \tag{14}$$

Les formules de symétrie (**??**) et (**??**) nous donnent alors :

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{\pi}, \qquad \lim_{x\to\pi} f'(x) = -\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{6}$$

et

$$\lim_{x\to\pi} f''(x) = \lim_{x\to 0} f''(x) = -\frac{2}{\pi^3}$$

Finalement, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0,\pi]$.

2. Comme f est continue sur le segment $[0,\pi]$, elle y est intégrable et d'après la formule de symétrie (**??**), on a

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Il suffit pour cela d'utiliser la relation de Chasles et d'utiliser le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Passons maintenant au calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\int_\varepsilon^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} - \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\pi - x}$$
$$= \int_\varepsilon^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} + \ln(\varepsilon) - \ln(\pi - \varepsilon)$$

La fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $\left[\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right]$ donc on peut faire le changement de variable $t = \cos(x)$ et on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x)} = \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{\cos(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\cos(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}t}{1-t} + \frac{1}{2}\int_0^{\cos(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\
&= \frac{\ln(1+\cos(\varepsilon))}{2} - \frac{\ln(1-\cos(\varepsilon))}{2}
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\ln(\varepsilon) - \frac{\ln(1-\cos(\varepsilon))}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{1-\cos(\varepsilon)}\right) &\underset{0}{=} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{\frac{\varepsilon^2}{2}+\mathrm{o}(\varepsilon^2)}\right) \\
&\underset{0}{=} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{o}(1)}\right)
\end{aligned}$$

donc, en faisant tendre ε vers 0 par valeurs supérieures, il vient

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

d'où la valeur de la première intégrale. Pour terminer, la fonction f' est continue sur le segment $[0, \pi]$ donc elle est intégrable sur ce segment et

$$\int_0^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(\pi) - f(0) = 0$$

d'après (**??**).

□

Nous disposons désormais de tous les outils nécessaires pour démontrer le théorème **??**. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. D'après (**??**), on a $2S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$ et donc, en posant

$$T_n = 2S_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\frac{k\pi}{n}} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\pi - \frac{k\pi}{n}}$$

on a

$$T_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} - \frac{1}{\frac{k\pi}{n}} - \frac{1}{\pi - \frac{k\pi}{n}} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

où f est la fonction définie en (**??**). La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ d'après le lemme **??** donc on peut appliquer le lemme **??** qui fournit une approximation de T_n. En effet,

$$\begin{aligned}
T_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f(\pi) &\underset{+\infty}{=} \frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi} + \mathrm{o}(1) \\
&\underset{+\infty}{=} \frac{n}{\pi}\ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right) + \frac{1}{\pi} + \mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

d'après les valeurs des intégrales obtenues dans le lemme **??**. On en déduit donc (par définition de T_n) que

$$2S_n \underset{+\infty}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\frac{k\pi}{n}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\frac{(n-k)\pi}{n}} + \frac{n}{\pi}\ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right) + \frac{1}{\pi} + \mathrm{o}(1)$$

et le changement d'indice $j = n - k$ dans la deuxième somme fournit :

$$\begin{aligned}
2S_n \underset{+\infty}{=} 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\frac{k\pi}{n}} + \frac{n}{\pi} \ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right) + \frac{1}{\pi} + \mathrm{o}(1) &\underset{+\infty}{=} \frac{2n}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{n}{\pi} \ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right) + \frac{1}{\pi} + \mathrm{o}(1) \\
&\underset{+\infty}{=} \frac{2n}{\pi} \left(h_n - \frac{1}{n}\right) + \frac{n}{\pi} \ln\left(\frac{4}{\pi^2}\right) + \frac{1}{\pi} + \mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

En utilisant enfin le lemme **??**, il vient

$$\begin{aligned}
S_n &\underset{+\infty}{=} \frac{n}{\pi}\left(\ln(n) + \gamma - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{n}{\pi} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) + \frac{1}{2\pi} + \mathrm{o}(1) \\
&\underset{+\infty}{=} \frac{n}{\pi} \ln(n) + \frac{n}{\pi}\left(\gamma + \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)\right) + \mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème **??**.