# Question 871

**Vincent Devinck**

**Question.** Soient $x$ et $y$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$x^x + y^y \geqslant x^y + y^x$$

**RMS**

**Solution.** Soit $\alpha \in ]1, +\infty[$. Notons $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = t^\alpha - t$ si $t > 0$ et $f(0) = 0$. Une étude rapide du signe de la dérivée montre que la fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $[0, \beta]$ puis croissante sur $[\beta, +\infty[$ où l'on a posé $\beta = e^{-\frac{\ln(\alpha)}{\alpha - 1}}$. On a le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $f(\beta)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Soient $x$ et $y$ deux nombres réels strictement positifs. L'inégalité à démontrer est évidente si $x = y$ et on peut supposer dans la suite, sans perte de généralité, que $y < x$, de sorte que $\alpha = \dfrac{x}{y}$ vérifie $\alpha > 1$. L'inégalité à démontrer est équivalente à $f(y^y) \leqslant f(x^y)$. On raisonne par disjonction des cas.

- ⋆ **Premier cas :** $1 \leqslant y < x$. Comme $\alpha > 1$, on a $\beta \leqslant 1 \leqslant y^y \leqslant x^y$. La fonction $f$ étant croissante sur l'intervalle $[\beta, +\infty[$, il vient $f(y^y) \leqslant f(x^y)$, ce qu'il fallait démontrer.
- ⋆ **Deuxième cas :** $y < 1 \leqslant x$. Si $y^y \in [\beta, +\infty[$, alors on a encore $\beta \leqslant y^y \leqslant x^y$ et donc $f(y^y) \leqslant f(x^y)$. Sinon $y^y \in [0, \beta]$ et donc $f(y^y) \leqslant 0$. Comme $\beta \leqslant 1 \leqslant x^y$, on a par croissance de $f$ sur l'intervalle $[\beta, +\infty[$,

$$f(1) \leqslant f(x^y) \qquad \text{et donc} \qquad f(y^y) \leqslant 0 \leqslant f(x^y)$$

- ⋆ **Troisième cas :** $y < x < 1$. Nous allons démontrer que $\beta \leqslant y^y$. La croissance de $f$ sur l'intervalle $[\beta, +\infty[$ permet alors de conclure comme dans le premier cas. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \beta \leqslant y^y \iff -\frac{\ln\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x}{y} - 1} \leqslant y \ln(y) &\iff \frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y} \geqslant -\ln(y) \\ &\iff (y - x + 1)\ln(y) - \ln(x) \leqslant 0 \end{aligned}$$

On est donc ramené à démontrer la dernière inégalité. La fonction $g : t \longmapsto (y - t + 1)\ln(y) - \ln(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $g'(t) = -\ln(y) - \dfrac{1}{t}$. On trouve que $g$ est décroissante sur l'intervalle $]0, -1/\ln(y)]$ et croissante sur $[-1/\ln(y), +\infty[$. Une étude rapide de fonction permet de montrer que $-y\ln(y) \leqslant 1$ et donc $y \leqslant -\dfrac{1}{\ln(y)}$. De plus, $g(y) = 0$ et $g(1) = y\ln(y) < 0$.

- Si $-\dfrac{1}{\ln(y)} < 1$, alors le tableau de variations de $g$ sur $[y, 1]$ est le suivant :

| $t$ | $y$ | | $-\dfrac{1}{\ln(y)}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $y\ln(y) < 0$ |

  Comme $x \in [y, 1]$, on a bien $g(x) \leqslant 0$.
- Si $-\dfrac{1}{\ln(y)} \geqslant 1$, alors le tableau de variation de $g$ est

| $t$ | $y$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g$ | $0$ | $\searrow$ | $y\ln(y) < 0$ |

  On a encore $g(x) \leqslant 0$.

Dans les deux cas, on trouve que $g(x) \leqslant 0$. Ceci achève la démonstration de l'inégalité dans ce troisième et dernier cas.