

# Question 1028

Vincent Devinck

**Question.** On considère l'espace de Hardy  $H$  constitué des fonctions développables en série entière dans le disque unité ouvert  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad (a_n \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{D}),$$

et telles que  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$ . On munit  $H$  de la norme  $\ell^2$  définie par

$$\|f\| = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

Soit la fonction  $\varphi : z \mapsto \alpha z + \beta$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres complexes tels que  $|\alpha| + |\beta| \leq 1$  et  $\alpha \neq 0$ .

a) Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall f \in H, \quad \|f \circ \varphi\| \leq C \|f\| \quad (\star)$$

b) Dans le cas particulier où  $|\alpha| + |\beta| = 1$ , déterminer la plus petite constante  $C$  satisfaisant

$$(\star), \text{ c'est-à-dire déterminer la norme de l'opérateur } C_\varphi : \begin{cases} H & \longrightarrow H \\ f & \longmapsto f \circ \varphi \end{cases}.$$

(Vincent Devinck)

**Une réponse.** Nous allons démontrer que la propriété  $(\star)$  est vérifiée pour la constante  $C = |\alpha|^{-1/2}$  et que cette constante est optimale. Les calculs reposent sur le résultat élémentaire suivant.

**Lemme 1.** Pour tout entier naturel  $k$ , la série entière  $\sum_{n \geq k} \binom{n}{k} z^n$  a un rayon de convergence égal à 1 et, pour tout  $s \in \mathbb{D}$ , on a

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} s^{n-k} = \frac{1}{(1-s)^{k+1}}$$

*Démonstration.* Le rayon de convergence est évident. Soit  $s \in \mathbb{D}$ . On sait que  $\frac{1}{1-s} = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n$  ce qui donne, en dérivant  $k$  fois :

$$\frac{k!}{(1-s)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)s^{n-k} = k! \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} s^{n-k},$$

d'où le résultat. □

Soit  $f$  un élément de  $H$ , noté  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ . Les fonctions  $f$  et  $\varphi$  sont développables en séries entières dans  $\mathbb{D}$  et  $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$  donc la fonction  $f \circ \varphi$  est développable en série entière dans  $\mathbb{D}$  et :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{D}, \quad (f \circ \varphi)(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\alpha z + \beta)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} z^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} a_n \right) z^k, \end{aligned}$$

l'interversion des sommes provenant de la sommabilité de la famille  $\left( \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} |a_n| |z|^k \right)_{0 \leq k \leq n}$ .

Justifions que  $f \circ \varphi$  appartient à  $H$  et estimons sa norme. Sous réserve de convergence des séries mises en jeu, on cherche à montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} a_n \right|^2 \leq |\alpha|^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2$$

Fixons  $k \in \mathbb{N}$ . La fonction carré étant convexe sur  $\mathbb{R}$ , on sait d'après l'inégalité de Jensen, que pour tout entier naturel  $N$  supérieur ou égal à  $k$ , on a :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=k}^N \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} |a_n| \right)^2 &\leq \left( \sum_{n=k}^N \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} \right) \sum_{n=k}^N \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} |a_n|^2 \\ &\leq \left( \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} \right) \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} |a_n|^2 \quad (1) \end{aligned}$$

D'après le lemme, la première série de (1) converge de somme :

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} = \frac{|\alpha|^k}{(1-|\beta|)^{k+1}} \leq \frac{1}{|\alpha|},$$

puisque  $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ . La deuxième série de (1) converge car la famille  $\left( \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} |a_n|^2 \right)_{0 \leq k \leq n}$  est sommable. En effet :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} \right) |a_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty, \quad (2)$$

car  $|\alpha| + |\beta| \leq 1$  et  $f \in H$ . En faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$  dans l'inégalité (1), on obtient :

$$\left( \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} |a_n| \right)^2 \leq |\alpha|^{-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} |a_n|^2 \quad (3)$$

Pour tout  $K \in \mathbb{N}$  on a donc, en utilisant l'inégalité triangulaire et en sommant les inégalités (3) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K \left| \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} a_n \right|^2 &\leq \sum_{k=0}^K \left( \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} |a_n| \right)^2 \\ &\leq |\alpha|^{-1} \sum_{k=0}^K \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} |a_n|^2 \\ &\leq |\alpha|^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} |\alpha|^k |\beta|^{n-k} |a_n|^2 \\ &\leq |\alpha|^{-1} \|f\|^2 \end{aligned}$$

en permutant les sommes et d'après (2). Ainsi,  $f \circ \varphi$  appartient à  $H$  et :

$$\|f \circ \varphi\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} a_n \right|^2 \leq |\alpha|^{-1} \|f\|^2$$

On a donc démontré que pour tout  $f \in H$ , la fonction  $f \circ \varphi$  appartient à  $H$  avec :

$$\forall f \in H, \quad \|f \circ \varphi\| \leq |\alpha|^{-1/2} \|f\| \quad (4)$$

Montrons maintenant que la constante  $|\alpha|^{-1/2}$  est optimale. Pour  $a \in [0, 1[$ , considérons la fonction :

$$f_a : z \mapsto \frac{1}{1 - ae^{-i\theta}z}$$

où  $\theta$  désigne un argument du nombre complexe  $\beta$  (on prendra  $\theta = 0$  si  $\beta = 0$ ), de sorte que  $e^{-i\theta}\beta = |\beta|$ . Comme  $|ae^{-i\theta}| < 1$ , la fonction  $f_a$  est développable en série entière dans le disque  $\mathbb{D}$  et :

$$\forall z \in \mathbb{D}, \quad f_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-in\theta} z^n$$

La fonction  $f_a$  appartient à  $H$  puisque la série géométrique de raison  $a^2$  converge et on a :

$$\|f_a\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{2n} = \frac{1}{1 - a^2}$$

De plus, pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , on a :

$$(f_a \circ \varphi)(z) = \frac{1}{1 - a|\beta|} \times \frac{1}{1 - \frac{ae^{-i\theta}\alpha}{1 - a|\beta|}z} = \frac{1}{1 - a|\beta|} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n e^{-in\theta} \alpha^n}{(1 - a|\beta|)^n} z^n$$

donc (on sait que  $f_a \circ \varphi \in H$ ) :

$$\|f_a \circ \varphi\|^2 = \left( \frac{1}{1 - a|\beta|} \right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n} |\alpha|^{2n}}{(1 - a|\beta|)^{2n}} = \frac{1}{(1 - a|\beta|)^2 - a^2 |\alpha|^2}$$

Or  $|\alpha| + |\beta| = 1$  donc :

$$\frac{\|f_a \circ \varphi\|^2}{\|f_a\|^2} = \frac{1 + a}{1 - a(|\beta| - |\alpha|)} \xrightarrow{a \rightarrow 1^-} \frac{2}{1 + |\alpha| - |\beta|} = \frac{1}{|\alpha|}$$

Ainsi :

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{\|f_a \circ \varphi\|}{\|f_a\|} = |\alpha|^{-1/2}$$

Cette limite et la majoration (4) impliquent que la plus petite constante vérifiant  $(\star)$  est  $|\alpha|^{-1/2}$ .