Question 1018

Vincent Devinck

Question. Soit a un entier naturel non nul. On considère la suite $(h_n(a))_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_n(a) = \sum_{\substack{k=1 \\ (k,a)=1}}^{n} \frac{1}{k}$$

où (k, a) désigne le plus grand commun diviseur des entiers k et a.

a) Montrer que la suite $(h_n(a))_{n\geqslant 1}$ est divergente. En déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

b) Que dire de la suite $(h_n(n))_{n\geqslant 1}$?

(Vincent Devinck)

Une réponse. On rappelle que la fonction indicatrice d'Euler φ est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \varphi(n) = \operatorname{card}\big\{k \in [\![1, n]\!] \,\big|\, (k, n) = 1\big\}$$

La proportion d'entiers premiers avec a dans l'intervalle $[\![1, n]\!]$ étant équivalent à $\dfrac{\varphi(a)}{a}$ quand n tend vers $+\infty$, on s'attend à ce que la somme $h_n(a)$ soit de l'ordre de

$$\frac{\varphi(a)}{a} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(a)}{a} \ln(n)$$

Nous allons préciser cette idée en introduisant la notion de *multiplicativité*, ce qui sera possible grâce à la fonction μ de Möbius ; ceci aura pour effet de faire apparaître explicitement la fonction φ.

La fonction μ est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\mu(1) = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 2$, par :

- $\mu(n) = 0$ si n a un facteur carré (c'est-à-dire s'il existe un nombre premier p tel que p^2 divise n) ;
- $\mu(n) = 1$ si n est le produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts ;
- $\mu(n) = -1$ si n est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts.

Cette fonction vérifie la relation fondamentale suivante (voir par exemple [2])

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Cette identité et l'estimation classique suivante (dont une démonstration est proposée à la fin de la réponse, et où γ désigne la constante d'Euler) :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad \sum_{k\leqslant x} \frac{1}{k} = \ln(x) + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2}$$

vont nous permettre de donner des formes exploitables des sommes $h_n(a)$ et $h_n(n)$ (proposition 1) et de répondre directement à la première question. Une estimation (minoration) adaptée sera nécessaire pour étudier plus précisément le cas $a = n$. Commençons par dire quelques mots sur la multiplicativité.

Dans la suite, on notera $d \mid \delta$ pour dire que d divise δ (d et δ sont des entiers naturels non nuls) et $\sum_{d|\delta} a_d$ correspondra à la somme des nombres a_d portée par les diviseurs (positifs) de δ. Enfin, la lettre p désignera systématiquement un nombre premier et une somme de la forme $\sum_{p \leqslant x} a_p$ sera celle des nombres a_p portée par les nombres premiers inférieurs ou égaux au nombre réel x.

1 Fonctions multiplicatives

Une fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *multiplicative* si $f(1) = 1$ et si, pour tout couple (m, n) d'entiers naturels non nuls premiers entre eux, on a l'égalité $f(mn) = f(m)f(n)$. Une telle fonction est donc entièrement déterminée par ses valeurs sur les puissances des nombres premiers (en vertu du théorème fondamental de l'arithmétique).

La fonction μ définie plus haut est clairement une fonction multiplicative. Les fonctions :

$$\delta : n \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \qquad \mathrm{Id} : n \longmapsto n, \qquad \mathbf{1} : n \longmapsto 1$$

en sont d'autres. La fonction φ est également une fonction multiplicative d'après le théorème des restes chinois.

L'ensemble $\mathcal{M}$ des fonctions multiplicatives peut-être muni d'une loi de composition *interne* : si f et g sont deux telles fonctions, alors le *produit de convolution* de f et g :

$$f \star g : n \in \mathbb{N}^* \longmapsto \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

est encore une fonction multiplicative (voir par exemple [1]). On peut en fait montrer que $(\mathcal{M}, \star)$ est un groupe abélien d'élément neutre δ. Remarquons que l'identité de Möbius (1) se réécrit, avec la convolution, sous la forme :

$$\mu \star \mathbf{1} = \delta$$

Dégageons enfin deux formules qui seront utiles dans la suite. Si p est un nombre premier et si $\alpha \in \mathbb{N}^*$, alors $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ (car un entier $k \in [\![1, p^\alpha]\!]$ n'est pas premier avec p si et seulement s'il est divisible par p et on dénombre $p^{\alpha-1}$ multiples de p dans cet intervalle). Un calcul élémentaire montre que l'on a également $(\mu \star \mathrm{Id})(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ si bien que, par multiplicativité de φ et $\mu \star \mathrm{Id}$, on en déduit que

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\varphi(a)}{a} = \sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d} \tag{3}$$

Par ailleurs, en décomposant un entier $n \geqslant 2$ en produit de facteurs premiers :

$$n = \prod_{p \geqslant 2} p^{v_p(n)},$$

alors la multiplicativité de φ entraîne que

$$\begin{aligned}\varphi(n) = \prod_{p \geqslant 2} \varphi(p^{v_p(n)}) &= \prod_{p|n} (p^{v_p(n)} - p^{v_p(n)-1}) \\ &= \left(\prod_{p|n} p^{v_p(n)}\right) \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\end{aligned}$$

soit encore

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{4}$$

Nous allons maintenant utiliser la fonction μ (et plus précisément (1)) pour calculer les sommes h_n.

2 Forme exploitable des sommes h_n

Nous avons les deux premières estimations suivantes.

Proposition 1. $\star$ *Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier naturel n non nul, on a l'estimation*

$$h_n(a) = \frac{\varphi(a)}{a} \ln(n) + C_a + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

où

$$C_a := \frac{\varphi(a)}{a} \left(\gamma + \sum_{p|a} \frac{\ln(p)}{p-1}\right)$$

$\star$ *Pour la suite $(h_n(n))_{n\geqslant 1}$, l'estimation est analogue* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_n(n) = \frac{\varphi(n)}{n} \left(\ln(n) + \gamma + \sum_{p|n} \frac{\ln(p)}{p-1}\right) + \mathcal{O}(1) \tag{5}$$

Remarquons que ce résultat permet de répondre à la première question : nous avons un développement asymptotique de la suite $(h_n(a))_{n\geqslant 1}$ qui prouve sa divergence vers $+\infty$ (puisque $\frac{\varphi(a)}{a} > 0$) et on a l'équivalent simple (qui confirme l'intuition avancée dans l'introduction) :

$$h_n(a) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\varphi(a)}{a} \ln(n)$$

Démonstration de la proposition 1. On exploite l'identité (1) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbf{1}_{(\cdot,a)=1}(k) = \delta((k,a)) = \sum_{d|(k,a)} \mu(d),$$

d'où l'on tire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$h_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{\substack{d|k \\ d|a}} \mu(d) = \sum_{d|a} \mu(d) \sum_{\substack{k=1 \\ d|k}}^{n} \frac{1}{k}$$

Un entier $k \in [\![1, n]\!]$ est divisible par a si et seulement s'il existe $\ell \in [\![1, \lfloor n/d \rfloor]\!]$ tel que $k = \ell a$ (ici, $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière). En utilisant aussi (2), on obtient

$$\begin{aligned}
h_n(a) &= \sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\ell \leqslant n/d} \frac{1}{\ell} \\
&= \sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d} \left[\ln\left(\frac{n}{d}\right) + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{d}{n}\right)\right] \\
&= \left(\sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d}\right) (\ln(n) + \gamma) - \sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d} \ln(d) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n} \sum_{d|a} \mu^2(d)\right) \\
&= \frac{\varphi(a)}{a} (\ln(n) + \gamma) - \sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d} \ln(d) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

d'après (3). Il reste à traiter la somme $\sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d} \ln(d)$. En posant $f(s) := \sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d^s}$ ($s \in \mathbb{C}$), on a (par multiplicativité de f)

$$f(s) = \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

et donc, en dérivant les deux expressions,

$$\begin{aligned} f'(s) = -\sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d^s} \ln(d) &= \sum_{p|a} \frac{\ln(p)}{p^s} \prod_{\substack{q \text{ premier} \\ q \neq p \\ q|a}} \left(1 - \frac{1}{q^s}\right) \\ &= f(s) \sum_{p|a} \frac{\ln(p)}{p^s} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ &= f(s) \sum_{p|a} \frac{\ln(p)}{p^s - 1} \end{aligned}$$

On évalue finalement en $s = 1$:

$$-\sum_{d|a} \frac{\mu(d)}{d} \ln(d) = \frac{\varphi(a)}{a} \sum_{p|a} \frac{\ln(p)}{p - 1}$$

Dans les calculs menés ci-dessus, a peut être égal à n, la proposition est donc démontrée (pour le terme reste de la suite $(h_n(n))_{n \geqslant 1}$, on majore par contre la somme $\sum_{d|n} \mu^2(d)$ par n, ce qui nous donne le reste en $\mathcal{O}(1)$). □

Pour la suite $(h_n(n))_{n \geqslant 1}$, il résulte de l'estimation (5) qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_n(n) \geqslant \frac{\varphi(n)}{n} \ln(n) - C$$

Remarquons que si n est un nombre premier, alors $\varphi(n) = n - 1$, d'où l'on tire que

$$\limsup_{n \to +\infty} h_n(n) = +\infty$$

Cependant, on peut préciser le comportement de la suite.

3 Étude plus précise de la suite $(h_n)_{n \geqslant 1}$

Nous souhaitons établir le résultat suivant.

Proposition 2. *La suite $(h_n(n))_{n \geqslant 1}$ est divergente de limite $+\infty$ et on a l'équivalent*

$$h_n(n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\varphi(n)}{n} \ln(n)$$

Ceci nécessite une minoration adaptée de la fonction φ.

Lemme 1. *Pour tout entier n supérieur ou égal à 8, on a l'inégalité*

$$\varphi(n) \geqslant \mathrm{e}^{-1} \frac{n}{\ln(\ln(n))^{11}}$$

Remarque. La clé de la démonstration qui suit repose sur une bonne estimation de la somme $\sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}$. Nous n'en donnons ci-dessous (dans la deuxième étape) qu'une majoration (ce qui suffira). Signalons qu'il est tout à fait possible d'améliorer la minoration du lemme. On peut en effet montrer qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{\varphi(n)}{n} \geqslant \frac{A}{\ln(\ln(9n))}$$

Cette minoration requiert plus de travail ; signalons simplement qu'elle découle du deuxième théorème de Mertens qui stipule qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln(\ln(x)) + C + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Démonstration du lemme. La preuve se déroule en plusieurs étapes.

- ⋆ **Première étape :** *majoration de type Tchebychev de* $\pi(x)$

  Nous allons montrer que :

$$\forall x \in [2, +\infty[, \qquad \pi(x) := \sum_{p \leqslant x} 1 \leqslant 5 \frac{x}{\ln(x)}$$

  Pour cela, commençons par montrer, en utilisant une récurrence forte, que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\prod_{p \leqslant n} p \leqslant 4^n$. C'est évident si $n \in \{1, 2\}$. Soit maintenant un entier $n \geqslant 3$ et supposons que l'inégalité précédente soit vraie pour tous les entiers $k \in [\![1, n-1]\!]$. Si n est pair, alors n n'est pas un nombre premier (puisque $n \neq 2$) et alors

$$\prod_{p \leqslant n} p = \prod_{p \leqslant n-1} p \leqslant 4^{n-1} \leqslant 4^n$$

  Supposons maintenant que $n = 2m+1$ soit impair. On peut écrire que

$$\begin{aligned} \prod_{p \leqslant n} p &= \left(\prod_{p \leqslant m+1} p\right) \left(\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p\right) \\ &\leqslant 4^{m+1} \left(\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p\right) \end{aligned}$$

  par hypothèse de récurrence. Il nous reste à majorer le dernier produit. Pour cela, on part de l'égalité

$$m!\binom{2m+1}{m} = \prod_{k=m+2}^{2m+1} k$$

  Si p est un nombre premier tel que $m+1 < p \leqslant 2m+1$, alors p divise $\binom{2m+1}{m}$ d'après le lemme de Gauss. En particulier, on a l'inégalité

$$\prod_{m+1 < p \leqslant 2m+1} p \leqslant \binom{2m+1}{m}$$

  Par ailleurs, on a clairement (d'après la formule du binôme de Newton)

$$2\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} \leqslant 2^{2m+1}$$

donc

$$\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 2^{2m},$$

ce qui achève la récurrence.

On peut désormais établir la majoration de $\pi(x)$ annoncée. Si n est un entier supérieur ou égal à 2, alors

$$\prod_{p\leqslant n} p \geqslant \prod_{\sqrt{n}<p\leqslant n} p \geqslant \left(\sqrt{n}\right)^{\pi(n)-\pi(\sqrt{n})}$$

Le point précédent entraîne que

$$\left(\sqrt{n}\right)^{\pi(n)-\pi(\sqrt{n})} \leqslant 4^n$$

puis

$$\pi(n)-\pi(\sqrt{n}) \leqslant 2\ln(4)\frac{n}{\ln(n)}$$

Par ailleurs, on voit facilement que $\pi(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n} \leqslant \dfrac{n}{\ln(n)}$ donc

$$\pi(n) \leqslant (1+2\ln(4))\frac{n}{\ln(n)} \leqslant 4\frac{n}{\ln(n)}$$

Si x est un nombre réel supérieur ou égal à 3 de partie entière n, alors

$$\pi(x) = \pi(n) \leqslant 4\frac{n}{\ln(n)} \leqslant 4\frac{x}{\ln(x)}$$

par croissance de la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Comme f est de plus décroissante sur $]1, \mathrm{e}]$, on a la majoration suivante pour $x \in [2, 3[$ (ici $n = 2$) :

$$f(2) = \frac{2}{\ln(2)} = f(x)\frac{f(2)}{f(x)} \leqslant \frac{2}{\ln(2)\,\mathrm{e}} \times \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{5}{4} \times \frac{\ln(x)}{x}$$

Pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a donc bien $\pi(x) \leqslant 5\dfrac{x}{\ln(x)}$.

- ⋆ **Deuxième étape :** *majoration de* $\displaystyle\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}$

  Pour tout $x \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \sum_{p\leqslant x}\left(\int_p^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{1}{x}\right) &= \int_2^x \frac{\pi(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi(x)}{x} \\ &\leqslant 5\int_2^x \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t + \frac{5}{\ln(x)} \\ &\leqslant 5\ln(\ln(x)) + \frac{5}{\ln(x)}\end{aligned}$$

- ⋆ **Troisième étape :** *conclusion*

  Pour tout entier $n \geqslant 2$, l'égalité (4) nous donne

$$\ln\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right) = \sum_{p|n}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

  On montre facilement que

$$\forall x \in]-1, 0], \qquad x - \frac{x^2}{1+x} \leqslant \ln(1+x)$$

Comme de plus

$$\sum_{p|n} \frac{\frac{1}{p^2}}{1-\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1,$$

on a la minoration

$$\ln\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right) \geqslant -1 - \sum_{p|n} \frac{1}{p} \tag{6}$$

Si $P \in [2, n[$ est un paramètre réel (que l'on déterminera dans la suite), on peut écrire (en utilisant le point précédent) que

$$\begin{aligned}
\sum_{p|n} \frac{1}{p} &\leqslant \sum_{p \leqslant P} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p|n \\ p>P}} \frac{1}{p} \\
&\leqslant 5\ln(\ln(P)) + \frac{5}{\ln(P)} + \frac{1}{P} \sum_{\substack{p|n \\ p>P}} 1 \\
&\leqslant 5\ln(\ln(P)) + \frac{5}{\ln(P)} + \frac{\ln(n)}{P\ln(P)}
\end{aligned}$$

Détaillons la dernière majoration. Si n_P désigne le nombre de facteurs premiers p de n tels que $p > P$ et si $P < p_1 < \cdots < p_{n_P} \leqslant n$ sont ces facteurs premiers, alors $p_1 \ldots p_{n_P}$ divise n. On a donc en particulier :

$$P^{n_P} \leqslant p_1 \ldots p_{n_P} \leqslant n$$

d'où l'on tire bien que

$$\sum_{\substack{p|n \\ p>P}} 1 = n_P \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(P)}$$

La valeur $P = \ln(n)$ (ici, n est donc un entier supérieur à e^2), on a

$$\begin{aligned}
\sum_{p|n} \frac{1}{p} &\leqslant 5\ln(\ln(\ln(n))) + \frac{6}{\ln(\ln(n))} \\
&\leqslant 11\ln(\ln(\ln(n)))
\end{aligned}$$

si $n \geqslant \mathrm{e}^2$. En effet, la fonction $t \longmapsto \ln(\ln(t)) - \frac{1}{\ln(t)}$ est croissante sur $]1, +\infty[$ et prend une valeur positive en e^2. D'après (6), pour tout $n \geqslant 8$, on a l'inégalité

$$\ln\left(\frac{\varphi(n)}{n}\right) \geqslant -1 - 11\ln(\ln(\ln(n))) \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\varphi(n)}{n} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{\ln(\ln(n))^{11}}$$

Ceci termine la démonstration du lemme. □

Démonstration de la proposition 2. On sait qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_n(n) \geqslant \frac{\varphi(n)}{n}\ln(n) - C$$

Le lemme entraîne donc bien la divergence vers $+\infty$ de la suite $(h_n(n))_{n\geqslant 1}$. Pour justifier l'équivalent annoncé de $h_n(n)$, il nous reste à établir (d'après (5)) que

$$\sum_{p|n} \frac{\ln(p)}{p-1} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\ln(n))$$

On traite cette somme comme dans la troisième étape de la démonstration du lemme. Si $P \geqslant 2$ est un paramètre et si n est assez grand, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{p|n} \frac{\ln(p)}{p-1} &\leqslant \sum_{p \leqslant P} \frac{\ln(p)}{p-1} + \sum_{\substack{p|n \\ p>P}} \frac{\ln(p)}{p-1} \\
&\leqslant 2\ln(P) \sum_{p \leqslant P} \frac{1}{p} + \frac{\ln(P)}{P-1} \sum_{\substack{p|n \\ p>P}} 1 \\
&\leqslant 2\ln(P) \left(5\ln(\ln(P)) + \frac{5}{\ln(P)} \right) + \frac{\ln(P)}{P-1} \times \frac{\ln(n)}{\ln(P)}
\end{aligned}$$

et donc, pour $P = \ln(n)$,

$$\sum_{p|n} \frac{\ln(p)}{p-1} \leqslant 10\ln(\ln(n))\ln(\ln(\ln(n))) + 10 + \frac{\ln(n)}{\ln(n)-1},$$

qui est bien négligeable devant $\ln(n)$ au voisinage de $+\infty$. □

Démonstration de l'estimation classique (2). Soit $x \in [1, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k \leqslant x} \frac{1}{k} = \sum_{k \leqslant x} \left(\int_k^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{1}{x} \right) &= \sum_{k \leqslant x} \int_1^x \mathbf{1}_{[k,x]}(t) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \\
&= \int_1^x \left(\sum_{k \leqslant x} \mathbf{1}_{[k,x]}(t) \right) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \\
&= \int_1^x \lfloor t \rfloor \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{\lfloor x \rfloor}{x}
\end{aligned}$$

En notant $\{\theta\} := \theta - \lfloor \theta \rfloor$ la partie fractionnaire d'un nombre réel θ, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k \leqslant x} \frac{1}{k} &= \ln(x) - \int_1^x \{t\} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 1 - \frac{\{x\}}{x} \\
&= \ln(x) + \left(1 - \int_1^{+\infty} \{t\} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \right) + \int_x^{+\infty} \{t\} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} - \frac{\{x\}}{x},
\end{aligned}$$

la convergence de l'intégrale généralisée découlant des inégalités $0 \leqslant \{t\} \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En majorant la partie fractionnaire par 1, on trouve bien l'estimation (2) avec $\gamma = 1 - \displaystyle\int_1^{+\infty} \{t\} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$. □

Références

[1] P. BERMENT ET O. RAMARÉ, *Estimation de l'ordre moyen d'une fonction arithmétique par la méthode de convolution,* RMS, Volume 122-1, 2011

[2] G. TENENBAUM, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres,* Société Mathématique de France, Paris, seconde édition, 1995