

# Questions 1010 & 1015

Vincent Devinck

Dans cette note, nous nous attachons à répondre aux deux questions liées suivantes :

**Question 1010 (Omar Sonebi, volume 131-1).** Déterminer la nature de la série de terme général  $\frac{(-1)^n}{\sigma(n)}$  où  $\sigma(n)$  désigne la somme des diviseurs positifs de  $n$ .

et :

**Question 1015 (Philippe Bonnet, volume 131-2).** Déterminer un équivalent de la suite des sommes partielles de la série de terme général  $1/\sigma(n)$ , où  $\sigma(n)$  est la somme des diviseurs positifs de l'entier  $n$ .

Dans tout ce qui suit, la lettre  $p$  fera systématiquement référence à un nombre premier. En particulier, la notation  $\prod_{p \geq 2} f(p)$  désignera le produit, porté par l'ensemble des nombres premiers, des nombres réels  $f(p)$ .

Si  $(a_n)_{n \geq 0}$  désigne une suite de nombres réels, on dit que le produit infini  $\prod_{n=0}^{+\infty} a_n$  est convergent si les

produits partiels  $\prod_{n=0}^N a_n$  admettent une limite finie non nulle quand  $N$  tend vers  $+\infty$ . Si les nombres  $a_n$  sont strictement positifs, la convergence du produit infini est équivalente à la convergence de la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \ln(a_n)$ .

Nous noterons  $F$  la *fonction sommatoire* de la fonction arithmétique  $n \mapsto \frac{(-1)^n}{\sigma(n)}$ ; celle-ci est définie sur  $[1, +\infty[$  par

$$\forall X \in [1, +\infty[, \quad F(X) := \sum_{n \leq X} \frac{(-1)^n}{\sigma(n)}$$

Nous répondons à la question Q1010 en déterminant l'*ordre moyen* de la fonction arithmétique précédemment évoquée, c'est-à-dire en trouvant le comportement asymptotique de sa fonction sommatoire. Pour ce faire, nous aurons besoin de trouver l'ordre moyen de la fonction arithmétique positive  $1/\sigma$  (ce qui nous donnera donc une réponse à la question Q1015). Introduisons donc encore la fonction  $H$  telle que :

$$\forall X \in [1, +\infty[, \quad H(X) := \sum_{n \leq X} \frac{1}{\sigma(n)}$$

**Théorème 1.** *Nous avons les estimations*

$$F(X) \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} C \ln(X) \quad \text{et} \quad H(X) \underset{X \rightarrow +\infty}{\sim} D \ln(X)$$

où

$$C := \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}-1} \right) \prod_{p \geq 3} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{k+1}-1} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \right) < 0$$

et

$$D := \prod_{p \geq 2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{k+1}-1} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \right) > 0$$

La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sigma(n)}$  est donc divergente.

Nous démontrons ce résultat dans la partie IV en utilisant une méthode dite *de convolution*. Les notions importantes sont celles de fonctions multiplicatives, de produit de convolution de fonctions arithmétiques et de séries de Dirichlet. Nous énumérons les définitions et propriétés utiles dans les deux premières parties, en démontrant la plupart d'entre elles. Nous isolons dans la partie III deux petites estimations essentielles pour démontrer le théorème 1.

Signalons, pour terminer cette introduction, que la méthode de convolution a fait l'objet d'un très joli article de théorie analytique des nombres de Perrine Berment et Olivier Ramaré [1], paru dans le volume 122-1 de la présente revue (voir aussi [2]).

## Partie I : notion de fonction multiplicative

**Définition 1.** Soit  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction (dite arithmétique). On dit que  $f$  est multiplicative si elle vérifie les deux conditions

- $f(1) = 1$  ;
- pour tout couple  $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$  d'entiers premiers entre eux, on a  $f(mn) = f(m)f(n)$ .

Voici quelques fonctions multiplicatives.

- ★ La fonction 1 définie par  $\mathbf{1}(n) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  est multiplicative.
- ★ La fonction identité Id définie par  $\text{Id}(n) = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  est multiplicative.
- ★ La fonction indicatrice de  $\{1\}$ , notée  $\delta_1$ , qui est donc définie sur  $\mathbb{N}^*$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \delta_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases},$$

est une fonction multiplicative.

- ★ La fonction de Möbius, notée  $\mu$ , définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $\mu(1) = 1$  et pour tout entier  $n \geq 2$ ,
  - $\mu(n) = 0$  si  $n$  a un facteur carré
  - $\mu(n) = 1$  si  $n$  est le produit d'un nombre pair de nombres premiers distincts
  - $\mu(n) = -1$  si  $n$  est le produit d'un nombre impair de nombres premiers distincts

est une fonction multiplicative. Cette fonction est telle que  $\mu \star \mathbf{1} = \delta_1$ , où l'opération  $\star$  est définie ci-après.

Nous introduisons ici la notion de convolution de fonctions arithmétiques qui permet notamment de construire de nouvelles fonctions multiplicatives.

**Définition 2.** Le produit de convolution de deux fonctions arithmétiques  $f$  et  $g$  est la fonction arithmétique notée  $f \star g$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right),$$

où la somme porte sur les entiers  $d \geq 1$  divisant  $n$ .

*Remarque.* Une autre façon d'écrire le produit de convolution de  $f$  et  $g$  est :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (f \star g)(n) = \sum_{ab=n} f(a)g(b),$$

où la somme porte sur les couples  $(a, b)$  d'entiers naturels non nuls dont le produit vaut  $n$ .

Nous allons démontrer que l'ensemble des fonctions multiplicatives est stable pour l'opération de convolution (proposition 2). Nous aurons besoin du résultat élémentaire ci-dessous. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $\mathcal{D}(n)$  l'ensemble des diviseurs positifs de  $n$ . Par exemple

$$\mathcal{D}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

**Lemme 1.** Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. L'application

$$\vartheta : \begin{cases} \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n) & \longrightarrow \mathcal{D}(mn) \\ (d, \delta) & \longmapsto d\delta \end{cases}$$

est bijective.

*Démonstration.* C'est évident si  $m$  ou  $n$  est égal à 1. On suppose désormais que  $m$  et  $n$  sont supérieurs ou égaux à 2. On décompose ces nombres en produits de facteurs premiers : il existe  $(r, s) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , des nombres premiers  $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s$  deux à deux distincts et des entiers naturels non nuls  $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$  tels que

$$m = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i} \quad \text{et} \quad n = \prod_{i=1}^s q_i^{\beta_i}$$

On a  $\text{card}(\mathcal{D}(m)) = \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1)$  et  $\text{card}(\mathcal{D}(n)) = \prod_{i=1}^s (\beta_i + 1)$ . En écrivant  $mn$  en produit de facteurs premiers, on trouve que

$$\text{card}(\mathcal{D}(mn)) = \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1) \times \prod_{i=1}^s (\beta_i + 1) = \text{card}(\mathcal{D}(m)) \times \text{card}(\mathcal{D}(n))$$

Pour démontrer de lemme, il suffit donc de vérifier que  $\vartheta$  est surjective. Si  $\ell$  est un diviseur de  $mn$ , alors pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$  et tout  $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ , il existe  $a_i \in \llbracket 0, \alpha_i \rrbracket$  et  $b_j \in \llbracket 0, \beta_j \rrbracket$  tels que  $\ell = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r} q_1^{b_1} \dots q_s^{b_s}$ . Les entiers  $d = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$  et  $\delta = q_1^{b_1} \dots q_s^{b_s}$  sont des diviseurs de  $m$  et  $n$  respectivement tels que  $\vartheta(d, \delta) = \ell$ .  $\square$

On en déduit le résultat de stabilité annoncé.

**Proposition 2.** Soient  $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$  et  $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$  deux fonctions multiplicatives. Alors la fonction  $f \star g$  est multiplicative.

*Démonstration.* Tout d'abord,  $(f \star g)(1) = f(1)g(1) = 1$ . Si  $m$  et  $n$  sont deux entiers naturels non nuls premiers entre eux, alors

$$(f \star g)(mn) = \sum_{\ell|mn} f(\ell)g\left(\frac{mn}{\ell}\right) = \sum_{\ell \in \mathcal{D}(mn)} f(\ell)g\left(\frac{mn}{\ell}\right)$$

D'après le lemme 1, on peut réécrire la somme comme suit :

$$(f \star g)(mn) = \sum_{(d, \delta) \in \mathcal{D}(m) \times \mathcal{D}(n)} f(d\delta)g\left(\frac{mn}{d\delta}\right) = \sum_{\substack{d|m \\ \delta|n}} f(d\delta)g\left(\frac{mn}{d\delta}\right)$$

Comme les entiers  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux, leurs diviseurs respectifs  $d$  et  $\delta$  d'une part,  $\frac{m}{d}$  et  $\frac{n}{\delta}$  d'autre part, sont premiers entre eux. Or  $f$  et  $g$  sont des fonctions multiplicatives, donc

$$f(d\delta) = f(d)f(\delta) \quad \text{et} \quad g\left(\frac{mn}{d\delta}\right) = g\left(\frac{m}{d}\right)g\left(\frac{n}{\delta}\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (f \star g)(mn) &= \sum_{\substack{d|m \\ d|n}} f(d)f(\delta)g\left(\frac{m}{d}\right)g\left(\frac{n}{\delta}\right) \\ &= \left( \sum_{d|m} f(d)g\left(\frac{m}{d}\right) \right) \left( \sum_{\delta|n} f(\delta)g\left(\frac{n}{\delta}\right) \right) \\ &= (f \star g)(m)(f \star g)(n) \end{aligned}$$

Finalement, la fonction  $f \star g$  est multiplicative. □

Par exemple, la fonction *somme des diviseurs*  $\sigma$  qui à tout  $n \in \mathbb{N}^*$  associe la somme  $\sigma(n)$  des diviseurs de  $n$  est multiplicative. En effet,  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$  donc  $\sigma = \text{Id} \star \mathbf{1}$  (et on sait que les fonctions  $\mathbf{1}$  et  $\text{Id}$

sont multiplicatives). Comme  $\sigma$  et  $\text{Id}$  ne s'annulent pas, les fonctions  $\sigma^{-1}$ ,  $\text{Id}^{-1}$  et  $n \mapsto \frac{(-1)^n}{\sigma(n)}$  sont aussi multiplicatives (ici,  $\sigma^{-1} := 1/\sigma$  et  $\text{Id}^{-1} := 1/\text{Id}$ ).

On peut démontrer que l'ensemble des fonctions multiplicatives, muni de l'opération de convolution  $\star$  est un groupe abélien dont l'élément neutre est  $\delta_1$ . Pour une preuve de ce résultat, nous renvoyons le lecteur à ([3], Théorème 2.4).

## Partie II : fonction multiplicative et série de Dirichlet

À toute fonction arithmétique, on peut lui associer sa série de Dirichlet formelle.

**Définition 3.** Soit  $f$  une fonction arithmétique. La série de Dirichlet associée à  $f$  est la fonction  $s \mapsto D(f, s)$  de la variable réelle  $s$  définie formellement par

$$D(f, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \tag{1}$$

Dans la suite, nous aurons besoin d'explicitier les séries de Dirichlet des fonctions multiplicatives  $D(\text{Id}^{-1}, s)$  et  $D(\sigma^{-1}, s)$ . Pour la première d'entre elle :

$$D(\text{Id}^{-1}, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{s+1}} = \zeta(s+1)$$

Cette série de Dirichlet converge absolument en tout point  $s$  de  $]0, +\infty[$ . Pour la deuxième série, nous utiliserons le résultat suivant qui assure la possibilité de représenter la série de Dirichlet d'une fonction multiplicative en produit eulérien.

**Proposition 3.** Soient  $f$  une fonction multiplicative et  $s \in \mathbb{R}$ . Alors la série de Dirichlet  $D(f, s)$  converge absolument si et seulement si la série  $\sum_{p \geq 2} \sum_{k \geq 1} \frac{|f(p^k)|}{p^{ks}}$  est convergente. Lorsque la série de Dirichlet  $D(f, s)$  converge absolument, on a la représentation en produit eulérien suivante

$$D(f, s) = \prod_{p \geq 2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right) = \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right),$$

et on dit que le produit eulérien converge absolument au point  $s$ .

*Démonstration.* Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Supposons que la série  $D(f, s)$  converge absolument. Pour tout nombre premier  $p$  et pour tout entier naturel  $N$ , on a

$$\sum_{k=1}^N \frac{|f(p^k)|}{p^{ks}} \leq D(|f|, s)$$

donc la série à termes positifs  $\sum_{k \geq 1} |f(p^k)| p^{-ks}$  converge. Pour tout  $N \geq 2$ , on a toujours la majoration

$$\sum_{p \leq N} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|f(p^k)|}{p^{ks}} \leq D(|f|, s)$$

puisque les entiers de la forme  $p^k$  avec  $p$  premier et  $k \geq 1$  sont deux à deux distincts. Donc la série double est bien convergente. Supposons maintenant que la série double soit convergente. En particulier, la série  $s_p = \sum_{k \geq 1} |f(p^k)| p^{-ks}$  est convergente pour tout nombre premier  $p$ . La majoration

$1 + x \leq e^x$  (valable pour tout nombre réel  $x$ ) fournit, pour tout entier  $N \geq 2$ , la majoration

$$\sum_{n \leq N} \frac{|f(n)|}{n^s} \leq \prod_{p \leq N} \left( 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|f(p^k)|}{p^{ks}} \right) \leq \prod_{p \leq N} e^{s_p} \leq \exp \left( \sum_{p=2}^{+\infty} s_p \right),$$

où la première inégalité provient du fait que les facteurs premiers  $p$  d'un entier inférieur ou égal à  $N$  sont nécessairement tels que  $p \leq N$  (et de la multiplicativité de  $f$ ). Ces inégalités montrent que la série de Dirichlet  $D(|f|, s)$ , ainsi que le produit infini, convergent (comme limites de suites croissantes majorées).

Il reste à établir le développement en produit eulérien de  $D(f, s)$  en un point de convergence absolue  $s$ .

Soit  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Tout élément du produit  $\prod_{p \leq N} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}$  s'écrit sous la forme  $\frac{f(p_1^{k_1}) \cdots f(p_\ell^{k_\ell})}{p_1^{k_1 s} \cdots p_\ell^{k_\ell s}}$

où les  $p_i$  sont des nombres premiers distincts inférieurs ou égaux à  $N$  et où les  $k_i$  sont des entiers naturels. Par multiplicativité de  $f$ ,

$$\frac{f(p_1^{k_1}) \cdots f(p_\ell^{k_\ell})}{p_1^{k_1 s} \cdots p_\ell^{k_\ell s}} = \frac{f(p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell})}{(p_1^{k_1} \cdots p_\ell^{k_\ell})^s}$$

Les éléments du produit sont donc les termes de la forme  $f(n)n^{-s}$  où l'entier  $n$  est tel que son plus grand facteur premier  $P^+(n)$  soit inférieur ou égal à  $N$ . On en déduit donc que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s} - \prod_{p \leq N} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}} \right| &= \left| \sum_{\substack{n \geq 1 \\ P^+(n) > N}} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{\substack{n \geq 1 \\ P^+(n) > N}} \frac{|f(n)|}{n^s} \\ &\leq \sum_{n > N} \frac{|f(n)|}{n^s}, \end{aligned}$$

où la dernière majoration provient de l'inclusion  $\{n \in \mathbb{N}^* ; P^+(n) > N\} \subset [N, +\infty[ \cap \mathbb{N}$ . On obtient le résultat en faisant tendre  $N$  vers  $+\infty$ .  $\square$

On peut donc écrire, par exemple, que

$$\begin{aligned} \forall s > 0, \quad D(\text{Id}^{-1}, s) = \zeta(s+1) &= \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{p^{s+1}} + \frac{1}{p^{2(s+1)}} + \cdots \right) \\ &= \prod_{p \geq 2} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^{s+1}}} \end{aligned} \quad (2)$$

Déterminons maintenant la série de Dirichlet de la fonction multiplicative  $\sigma^{-1}$ . Pour tout nombre premier  $p$  et pour tout entier naturel  $k$ , on a

$$\sigma(p^k) = \sum_{\ell=0}^k p^\ell = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

La série de Dirichlet de la fonction multiplicative  $\sigma^{-1}$  est donc définie formellement par

$$\begin{aligned} D(\sigma^{-1}, s) &= \prod_{p \geq 2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\sigma(p^k) p^{ks}} \right) = \prod_{p \geq 2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p-1}{(p^{k+1} - 1) p^{ks}} \right) \\ &= \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{(p+1)p^s} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p-1}{(p^{k+1} - 1) p^{ks}} \right) \end{aligned}$$

Pour tout  $s > 0$  et pour tout nombre premier  $p$ , on a

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p-1}{(p^{k+1} - 1) p^{ks}} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{p^k} \times \frac{1}{p^{ks}} = \frac{1}{p^{2(s+1)} - p^{s+1}}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p-1}{(p^{k+1} - 1) p^{ks}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p^{s+1}}$$

La série  $\sum_{p \geq 2} \frac{1}{p^{s+1}}$  est convergente (puisque  $s > 0$ ) donc, d'après la proposition 3, la série de Dirichlet de  $\sigma^{-1}$  (et le produit eulérien associé) convergent absolument en tout point de  $]0, +\infty[$ .

La propriété essentielle qui relie le produit de convolution et les séries de Dirichlet est la suivante.

**Proposition 4.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions multiplicatives dont les séries de Dirichlet convergent absolument en un même point  $s_0 \in \mathbb{R}$ . Alors la série de Dirichlet  $D(f \star g, s_0)$  est absolument convergente et

$$D(f \star g, s_0) = D(f, s_0) \times D(g, s_0)$$

*Démonstration.* On sait que les séries de Dirichlet  $D(f, s_0)$  et  $D(g, s_0)$  convergent absolument donc le produit de Cauchy de ces deux séries converge aussi absolument. Le terme général de cette série produit est

$$\sum_{\substack{(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ ab=n}} \frac{f(a)g(b)}{a^{s_0} b^{s_0}} = \frac{1}{n^{s_0}} \sum_{\substack{(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ ab=n}} f(a)g(b) = \frac{(f \star g)(n)}{n^{s_0}} \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

d'où le résultat. □

### Partie III : deux premières estimations

Si  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite de nombre réels et si  $X \in [1, +\infty[$ , on notera  $\sum_{n \leq X} a_n$  la somme des nombres  $a_n$  pour les entiers naturels non nuls  $n$  inférieurs ou égaux à  $X$ . Le premier lemme qui suit est très classique.

**Lemme 2.** Pour tout nombre réel  $X \in [\frac{1}{2}, +\infty[$ , on a

$$h(X) := \sum_{n \leq X} \frac{1}{n} = \ln(X) + \mathcal{O}(1)$$

*Démonstration.* Soit  $X \in [1, +\infty[$ . Alors

$$\begin{aligned} h(X) &= \sum_{n \leq X} \left( \int_n^X \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{X} \right) = \int_1^X \left( \sum_{n \leq X} \mathbf{1}_{[n, X]}(t) \right) \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{X} \sum_{n \leq X} 1 \\ &= \int_1^X \lfloor t \rfloor \frac{dt}{t^2} + \frac{\lfloor X \rfloor}{X} \end{aligned}$$

car la somme  $\sum_{n \leq X} \mathbf{1}_{[n, X]}(t)$  compte le nombre d'entiers naturels non nuls inférieurs ou égaux à  $t$ . En utilisant maintenant l'estimation  $\lfloor t \rfloor = t + \mathcal{O}(1)$ , il vient

$$\begin{aligned} h(X) &= \int_1^X (t + \mathcal{O}(1)) \frac{dt}{t^2} + \frac{X + \mathcal{O}(1)}{X} \\ &= \int_1^X \frac{dt}{t} + 1 + \mathcal{O} \left( \int_1^X \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{X} \right) \\ &= \ln(X) + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

L'estimation est claire si  $X \in [\frac{1}{2}, 1[$  puisqu'alors  $h(X) = 0$  et  $|h(X) - \ln(X)| \leq \ln(2)$ . □

Dans la suite, on désigne par  $\kappa$  la fonction définie sur  $\mathbb{N}^*$  par

$$\forall d \in \mathbb{N}^*, \quad \kappa(d) = \begin{cases} 2 & \text{si } d \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } d \text{ est impair} \end{cases} \quad (3)$$

**Corollaire 1.** Pour tout  $X \in [1, +\infty[$  et pour tout  $d \in [1, 2X] \cap \mathbb{N}$ , on a l'estimation

$$h_d(X) := \sum_{\substack{n \leq X \\ d|2n}} \frac{1}{n} = \frac{\kappa(d)}{d} \ln \left( \frac{\kappa(d)}{d} X \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{d} \right)$$

*Démonstration.* Soit  $X \in [1, +\infty[$ . On distingue deux cas suivant la parité de l'entier  $d$ .

★ Si  $d$  est impair, alors  $d$  divise  $2n$  si et seulement si  $d$  divise  $n$ . Le changement de variable  $n = dk$  nous donne

$$\begin{aligned} h_d(X) &= \sum_{\substack{n \leq X \\ d|n}} \frac{1}{n} = \sum_{k \leq X/d} \frac{1}{dk} = \frac{h(X/d)}{d} \\ &= \frac{1}{d} \left( \ln \left( \frac{X}{d} \right) + \mathcal{O}(1) \right) \\ &= \frac{1}{d} \ln \left( \frac{X}{d} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{d} \right) \end{aligned}$$

★ Si  $d$  est pair, alors il existe  $\delta \in \mathbb{N}^*$  tel que  $d = 2\delta$ , et  $d$  divise  $2n$  si et seulement si  $\delta$  divise  $n$ . Ainsi

$$\begin{aligned} h_d(X) &= \sum_{\substack{n \leq X \\ \delta|n}} \frac{1}{n} = \frac{1}{\delta} \left( \ln \left( \frac{X}{\delta} \right) + \mathcal{O}(1) \right) \\ &= \frac{2}{d} \ln \left( \frac{2X}{d} \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{d} \right) \end{aligned}$$

On obtient bien l'estimation annoncée par définition de la fonction  $\kappa$ . □

## Partie IV : démonstration du théorème 1

Rappelons qu'il est question de déterminer le comportement asymptotique de la fonction sommatoire

$$F(X) = \sum_{n \leq X} \frac{(-1)^n}{\sigma(n)}$$

quand  $X$  tend vers  $+\infty$ .

★ **Première étape :** de la fonction multiplicative  $(-1)^n/\sigma(n)$  à la fonction multiplicative  $\sigma^{-1}$

L'observation suivante nous permet de nous débarrasser du terme oscillant  $(-1)^n$  :

$$F(X) = 2 \sum_{\substack{n \leq X \\ 2|n}} \frac{1}{\sigma(n)} - \sum_{n \leq X} \frac{1}{\sigma(n)} \quad (4)$$

$$=: 2G(X) - H(X), \quad (5)$$

avec des notations évidentes.

★ **Deuxième étape :** mise en place de la méthode de convolution

La méthode de convolution consiste à comparer la série de Dirichlet de la fonction multiplicative qui nous intéresse (à savoir  $\sigma^{-1}$ ) avec une série de Dirichlet *usuelle*. Cela aura pour effet de faire apparaître une fonction multiplicative, qui sera *un facteur* de  $\sigma^{-1}$  pour le produit de convolution, et dont le domaine de convergence absolue de la série de Dirichlet associée sera *plus grand*.

Analysons donc la série de Dirichlet de  $\sigma^{-1}$ . Rappelons que celle-ci converge absolument dans  $]0, +\infty[$  et que

$$\forall s > 0, \quad D(\sigma^{-1}, s) = \prod_{p \geq 2} \left( 1 + \frac{1}{(p+1)p^s} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p-1}{(p^{k+1}-1)p^{ks}} \right),$$

Pour chaque nombre premier  $p$ , le facteur

$$1 + \frac{1}{(p+1)p^s} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{p-1}{(p^{k+1}-1)p^{ks}}$$

ressemble à

$$1 + \frac{1}{p^{s+1}} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{p^{k(s+1)}},$$

qui est le facteur, associé au nombre premier  $p$ , du développement en produit eulérien de la série de Dirichlet de la fonction  $\text{Id}^{-1}$  (voir (2)). On introduit alors la fonction multiplicative  $\theta$  solution de l'équation  $\sigma^{-1} = \theta \star \text{Id}^{-1}$  (une telle fonction existe puisque  $\text{Id}^{-1}$  est inversible dans le groupe des fonctions multiplicatives). En utilisant la proposition 4, la série de Dirichlet de la fonction  $\theta$  est définie, pour  $s$  suffisamment grand, par

$$D(\theta, s) = \frac{D(\sigma^{-1}, s)}{D(\text{Id}^{-1}, s)} = \prod_{p \geq 2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p-1}{(p^{k+1}-1)p^{ks}} \right) \left( 1 - \frac{1}{p^{s+1}} \right) \quad (6)$$

Pour tout nombre premier  $p$ , le facteur noté  $F(p, s)$  du produit eulérien (6) vaut

$$\begin{aligned} F(p, s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p-1}{(p^{k+1}-1)p^{ks}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p-1}{(p^{k+1}-1)p^{(k+1)s+1}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{ks}} \left( \frac{1}{p^{k+1}-1} - \frac{1}{p(p^k-1)} \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} D(\theta, s) &= \prod_{p \geq 2} \left( 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p-1)^2}{p^{ks}(p^{k+1}-p)(p^{k+1}-1)} \right) \\ &= \prod_{p \geq 2} \left( 1 - \frac{1}{(p+1)p^{s+1}} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(p-1)^2}{p^{ks}(p^{k+1}-p)(p^{k+1}-1)} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

On montre facilement que, pour tout nombre premier  $p$ ,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(p-1)^2}{p^{ks}(p^{k+1}-p)(p^{k+1}-1)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{p^{2(s+2)}}\right)$$

d'où l'on tire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(p-1)^2}{p^{ks}(p^{k+1}-p)(p^{k+1}-1)} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p^{s+2}},$$

qui est le terme général d'une série convergente si  $s > -1$ . La proposition 3 nous assure alors que la série de Dirichlet de  $\theta$  converge absolument dans l'intervalle  $] -1, +\infty[$ .

*Remarque* : le développement (7) semble indiquer que la fonction  $\theta$  est donnée par  $\theta(1) = 1$  et

$$\forall p \text{ premier}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \theta(p^k) = -\frac{(p-1)^2}{(p^{k+1}-p)(p^{k+1}-1)}$$

On peut effectivement vérifier par le calcul que l'égalité  $\sigma^{-1} = \theta \star \text{Id}^{-1}$  est vérifiée sur les puissances des nombres premiers, et donc sur tous les entiers par multiplicativité. D'où l'expression de  $\theta$  annoncée par unicité de la solution.

★ **Troisième étape** : estimation des fonctions sommatoires  $G$  et  $H$

Rappelons que  $G(X) = \sum_{\substack{n \leq X \\ 2|n}} \frac{1}{\sigma(n)}$  et  $H(X) = \sum_{n \leq X} \frac{1}{\sigma(n)}$ . Pour tout  $X \in [2, +\infty[$ , on peut

écrire que

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_{n \leq X} (\theta \star \text{Id}^{-1})(n) = \sum_{n \leq X} \sum_{d|n} \theta(d) \frac{d}{n} \\ &= \sum_{d \leq X} \theta(d) \sum_{k \leq X/d} \frac{1}{k} \quad (\text{en posant } n = dk) \end{aligned}$$

Le lemme 2 permet d'estimer la dernière somme :

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_{d \leq X} \theta(d) \left( \ln\left(\frac{X}{d}\right) + \mathcal{O}(1) \right) \\ &= \left( \sum_{d \leq X} \theta(d) \right) \ln(X) - \sum_{d \leq X} \theta(d) \ln(d) + \mathcal{O}\left( \sum_{d \leq X} |\theta(d)| \right) \end{aligned}$$

Comme la série de Dirichlet  $D(\theta, s)$  converge absolument dans  $] -1, +\infty[$ , les séries  $\sum_{d \geq 1} |\theta(d)|$

et  $\sum_{d \geq 1} \theta(d) \ln(d)$  convergent. Ainsi

$$\sum_{d \leq X} |\theta(d)| = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \sum_{d \leq X} \theta(d) \ln(d) = \mathcal{O}(1)$$

Par conséquent

$$H(X) \underset{+\infty}{=} \left( \sum_{d=1}^{+\infty} \theta(d) \right) \ln(X) + o(\ln(X)) \quad (8)$$

De la même manière :

$$\begin{aligned} G(X) &:= \sum_{\substack{n \leq X \\ 2|n}} \frac{1}{\sigma(n)} = \sum_{n \leq X/2} \frac{1}{\sigma(2n)} = \sum_{n \leq X/2} \sum_{d|2n} \theta(d) \frac{d}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{d \leq X} d\theta(d) \sum_{\substack{n \leq X/2 \\ d|2n}} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

On utilise maintenant le corollaire 1 :

$$\begin{aligned} G(X) &= \frac{1}{2} \sum_{d \leq X} d\theta(d) \left( \frac{\kappa(d)}{d} \ln \left( \frac{\kappa(d)}{2d} X \right) + \mathcal{O} \left( \frac{1}{d} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{d \leq X} \theta(d)\kappa(d) \right) \ln(X) - \frac{1}{2} \sum_{d \leq X} \theta(d)\kappa(d) \ln \left( \frac{2d}{\kappa(d)} \right) + \mathcal{O} \left( \sum_{d \leq X} |\theta(d)| \right) \end{aligned}$$

Pour tout  $d \in \mathbb{N}^*$ , on a (rappelons que  $\kappa$  est définie en (3))

$$|\theta(d)\kappa(d)| \leq 2|\theta(d)| \quad \text{et} \quad \left| \theta(d)\kappa(d) \ln \left( \frac{2d}{\kappa(d)} \right) \right| \leq 2|\theta(d)| \ln(2d),$$

et puisque  $D(\theta, s)$  converge absolument dans  $] -1, +\infty[$ , on peut écrire que

$$\sum_{d > X} \theta(d)\kappa(d) \underset{+\infty}{=} o(1) \quad \text{et} \quad \sum_{d \leq X} \theta(d)\kappa(d) \ln \left( \frac{2d}{\kappa(d)} \right) = \mathcal{O}(1)$$

On obtient donc

$$G(X) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2} \left( \sum_{d=1}^{+\infty} \theta(d)\kappa(d) \right) \ln(X) + o(\ln(X)) \quad (9)$$

L'égalité (4) et les estimations (8) et (9) nous donnent

$$\begin{aligned} F(X) &\underset{+\infty}{=} \left( \sum_{d=1}^{+\infty} \theta(d)(\kappa(d) - 1) \right) \ln(X) + o(\ln(X)) \\ &\underset{+\infty}{=} \left( \sum_{d=1}^{+\infty} \theta(2d) \right) \ln(X) + o(\ln(X)) \end{aligned}$$

par définition de  $\kappa$ .

Explicitons enfin la constante  $C := \sum_{d=1}^{+\infty} \theta(2d)$ . En utilisant le développement en produit eulérien de la série de Dirichlet  $D(\theta, s)$ , on obtient (les facteurs  $F(p, s)$  sont ceux du produit (6))

$$\begin{aligned} C &= \sum_{d=1}^{+\infty} \theta(d) - \sum_{\substack{d=1 \\ d \text{ impair}}}^{+\infty} \theta(d) \\ &= \prod_{p \geq 2} F(p, 0) - \prod_{p \geq 3} F(p, 0) \\ &= \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1} - 1} \right) \underbrace{\prod_{p \geq 3} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{k+1} - 1} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \right)}_{=: \alpha_p > 0} \end{aligned} \quad (10)$$

Cette constante est strictement négative car la somme devant le produit infini de (10), au signe moins près, est strictement positive et car le produit infini est convergent. En effet, cela revient à dire que la série  $\sum_{p \geq 3} \ln(a_p)$  est convergente et, si on note  $S$  sa somme, alors le produit eulérien de (10) est égal à  $e^S > 0$ . Finalement,  $C < 0$ .

On a également

$$D = \sum_{d=1}^{+\infty} \theta(d) = \prod_{p \geq 2} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p-1}{p^{k+1}-1} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right) > 0$$

La preuve du théorème 1 est complète.

## Références

- [1] P. BERMENT ET O. RAMARÉ, *Estimation de l'ordre moyen d'une fonction arithmétique par la méthode de convolution*, RMS, Volume 122-1, 2011
- [2] V. DEVINCK, *Les nombres premiers de la forme  $n^2 + 1$  passés au crible (de Selberg)*, RMS, Volume 126-3, 2016
- [3] G. TENENBAUM, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Société Mathématique de France, Paris, seconde édition, 1995