Relations binaires

(corrigés)

Exercice 1

1.
   - ⋆ La relation $\mathscr{R}$ n'est pas réflexive car 1 n'est pas en relation avec lui-même (en effet, $1 \neq -1$).
   - ⋆ Pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$, si $x\mathscr{R}y$, alors $x = -y$ ce que l'on peut réécrire $y = -x$. On a donc la relation $y\mathscr{R}x$. On en déduit que la relation $\mathscr{R}$ est symétrique.
   - ⋆ La relation $\mathscr{R}$ n'est pas antisymétrique car on a $1\mathscr{R}(-1)$ et $(-1)\mathscr{R}1$ mais $1 \neq -1$.
   - ⋆ La relation n'est pas transitive car $1\mathscr{R}(-1)$ et $(-1)\mathscr{R}1$ mais 1 n'est pas en relation avec lui-même.

   Finalement :

   la relation $\mathscr{R}$ est symétrique et elle n'est ni réflexive, ni antisymétrique, ni transitive

2.
   - ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ donc on a $x\mathscr{R}y$. Ainsi, la relation $\mathscr{R}$ est réflexive.
   - ⋆ Montrons que la relation $\mathscr{R}$ est symétrique. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $x\mathscr{R}y$. Alors :
   $$\cos(x)^2 + \sin(y)^2 = 1 \qquad i.e. \qquad (1 - \sin(x)^2) + (1 - \cos(y)^2) = 1,$$
   soit encore $\cos(y)^2 + \sin(x)^2 = 1$. On a donc la relation $y\mathscr{R}x$. Ceci montre que la relation $\mathscr{R}$ est symétrique.
   - ⋆ La relation $\mathscr{R}$ n'est pas antisymétrique. En effet, on a $0\mathscr{R}\pi$ et $\pi\mathscr{R}0$ mais $0 \neq \pi$.
   - ⋆ Montrons que la relation $\mathscr{R}$ est transitive. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$. On a donc :
   $$\cos(x)^2 + \sin(y)^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \cos(y)^2 + \sin(z)^2 = 1$$
   On en déduit que :
   $$\begin{aligned} \cos(x)^2 + \sin(z)^2 &= (1 - \sin(y)^2) + (1 - \cos(y)^2) = 2 - (\cos(y)^2 + \sin(y)^2) \\ &= 2 - 1 \\ &\ 1 \end{aligned}$$
   On a donc $x\mathscr{R}z$. La relation $\mathscr{R}$ est donc transitive.

   Finalement :

   la relation $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive mais elle n'est pas antisymétrique

3.
   - ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $x = 1 \times x^1$ et $1 \in \mathbb{N}^*$ donc on a la relation $x\mathscr{R}x$. La relation $\mathscr{R}$ est donc réflexive.
   - ⋆ Montrons que la relation $\mathscr{R}$ n'est pas symétrique. On a $1\mathscr{R}2$ (car $2 = 2 \times 1^1$ et $1, 2 \in \mathbb{N}^*$). Supposons que l'on ait aussi $2\mathscr{R}1$. Alors il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 = p2^q$. Comme $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, on a $1 \geqslant 2$, ce qui est absurde. Ceci montre que la relation $\mathscr{R}$ n'est pas symétrique.
   - ⋆ Montrons que la relation $\mathscr{R}$ est antisymétrique. Soient $x, y \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on ait $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$. Il existe alors $p, q, r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = px^q$ et $x = ry^s$. Ainsi :
   $$x = ry^s = r\big(px^q\big)^s = rp^s x^{qs} \qquad i.e. \qquad x\big(1 - rp^s x^{qs-1}\big) = 0 \qquad (\text{car } rs \geqslant 1)$$
   On a donc $x = 0$ ou $rp^s x^{qs-1} = 1$. On distingue trois cas.
     - — Si $x = 0$, alors $y = px^q = p0^q = 0$ (car $q \geqslant 1$). Ainsi, $x = y = 0$.
     - — Si $x \geqslant 1$, alors $rp^s x^{qs-1} = 1$. Comme $q, s \in \mathbb{N}^*$, on a $qs - 1 \geqslant 0$ donc $x^{qs-1} \geqslant 1$. De même, $r \geqslant 1$ et $p^s \geqslant 1$ (car $p, r, s \in \mathbb{N}^*$). L'égalité $rp^s x^{qs-1} = 1$ implique donc que $r = 1$, $p^s = 1$ et $x^{qs-1} = 1$. Si $p > 1$, alors $p^s > 1$, ce qui est absurde. Ainsi, $p = 1$.
       - • On en déduit que si $x = 1$, alors $y = px^q = 1 \times 1^q = 1 = x$.
       - • Si $x \geqslant 2$, alors l'égalité $x^{qs-1} = 1$ implique (puisque $qs - 1 \geqslant 0$) que $sq = 1$. Or s et q sont des entiers naturels donc $s = q = 1$. Ainsi, $y = px^q = 1 \times x^1 = x$.

   Dans tous les cas, on a l'égalité $x = y$. On en déduit que la relation $\mathscr{R}$ est antisymétrique.
   - ⋆ Montrons que la relation $\mathscr{R}$ est transitive. Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$. Il existe $p, q, r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = px^q$ et $z = ry^s$. Ainsi :
   $$z = ry^s = r\big(px^q\big)^s = rp^s x^{qs} = ax^b$$
   en posant $a = rp^s$ et $b = qs$. Comme p, q, r, s sont des entiers supérieurs ou égaux à 1, on a $a, b \in \mathbb{N}^*$. La relation $\mathscr{R}$ est donc transitive.

   Finalement :

$\boxed{\text{la relation } \mathscr{R} \text{ est réflexive, antisymétrique et transitive mais elle n'est pas symétrique}}$

On peut conclure que : Finalement :

> ⋆ la relation de la question 1. n'est ni une relation d'ordre, ni une relation d'équivalence ;
> ⋆ la relation de la question 2. est une relation d'équivalence (et n'est pas une relation d'ordre) ;
> ⋆ la relation de la question 3. est une relation d'ordre (et n'est pas une relation d'équivalence).

Exercice 2

Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.

⋆ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'égalité $|z| = |z|$ nous donne la relation $z \sim z$. La relation $\sim$ est donc réflexive.

⋆ Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On suppose que $z \sim z'$. Alors $|z| = |z'|$ et comme la relation d'égalité est symétrique, cette égalité se réécrit $|z'| = |z|$ donc on a la relation $z' \sim z$. Ainsi, la relation $\sim$ est symétrique.

⋆ Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$. Si on a $z \sim z'$ et $z' \sim z''$, alors $|z| = |z'|$ et $|z'| = |z''|$ donc $|z| = |z''|$ (par transitivité de la relation d'égalité). La relation $\sim$ est donc transitive.

Ainsi :

$$\boxed{\sim \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathbb{C}}$$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. La classe d'équivalence de z, notée $\mathrm{Cl}(z)$, est :

$$\mathrm{Cl}(z) = \left\{ w \in \mathbb{C} \,\middle|\, w \sim z \right\} = \left\{ w \in \mathbb{C} \,\middle|\, |w| \sim |z| \right\}$$

Donc :

$$\boxed{\mathrm{Cl}(z) \text{ est le cercle de centre } O(0,0) \text{ et de rayon } |z| > 0}$$

La classe de $z = 0$ est $\mathrm{Cl}(0) = \{0\}$ (cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon nul).

Exercice 3

1. Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$.

⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x}$ donc $x \sim x$. La relation $\sim$ est donc réflexive.

⋆ Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \sim y$. On a $\dfrac{\ln(x)}{y} = \dfrac{\ln(y)}{x}$ ce que l'on peut réécrire (par symétrie de la relation d'égalité) $\dfrac{\ln(y)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{y}$. On a donc $y \sim x$. La relation $\sim$ est donc symétrique.

⋆ Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $x \sim y$ et $y \sim z$ *i.e.* que :

$$\frac{\ln(x)}{y} = \frac{\ln(y)}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln(y)}{z} = \frac{\ln(z)}{y}$$

On a :

$$\ln(x) = \frac{y\ln(y)}{x} = \frac{y}{x} \times \frac{z\ln(z)}{y} = \frac{z\ln(z)}{x}$$

En divisant par $z \neq 0$, on obtient $\dfrac{\ln(x)}{z} = \dfrac{\ln(z)}{x}$. On a donc $x \sim z$. La relation $\sim$ est donc transitive.

Finalement :

$$\boxed{\sim \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathbb{R}_+^*}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La classe $\overline{x}$ de x pour la relation $\sim$ est :

$$\begin{aligned}\overline{x} = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^* \,\middle|\, y \sim x \right\} &= \left\{ y \in \mathbb{R}_+^* \,\middle|\, y\ln(y) = x\ln(x) \right\} \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}_+^* \,\middle|\, f(y) = f(x) \right\}\end{aligned}$$

où $f : t \longmapsto t\ln(t)$. Le nombre d'éléments de $\overline{x}$ est donc le nombre d'antécédents de $f(x)$ par l'application f dans $\mathbb{R}_+^*$. Étudions donc la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

donc (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0, \mathrm{e}^{-1}]$ et strictement croissante sur $[\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations suivant (la limite en 0^+ fait l'objet des croissances comparées) :

t	0		e^{-1}		$+\infty$
f	$\|\|$ 0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

On distingue trois cas.

- ⋆ Si $x = \mathrm{e}^{-1}$, alors les variations obtenues nous donnent $\overline{x} = \{\mathrm{e}^{-1}\}$ (*i.e.* $\overline{x} = \{x\}$).
- ⋆ Soit $x \in]0,1[\setminus\{\mathrm{e}^{-1}\}$. Alors $f(x) \in]-\mathrm{e}^{-1},0[$. Comme f est strictement monotone et continue sur chacun des deux intervalles $]0,\mathrm{e}^{-1}[$ et $]\mathrm{e}^{-1},1[$, on sait d'après le théorème de la bijection que l'équation $f(t) = f(x)$ admet exactement une solution dans chacun de ces deux intervalles. Cette équation n'admet pas de solution dans l'ensemble $\{\mathrm{e}^{-1}\} \cup [1,+\infty[$ car $f(\mathrm{e}^{-1}) = -\mathrm{e}^{-1} \neq f(x)$ et car pour tout $t \geqslant 1$, on a $f(t) \geqslant 0$ donc $f(t) \neq f(x)$. Ainsi, $\overline{x}$ contient deux éléments.
- ⋆ Soit $x \in [1,+\infty[$. Alors $f(x) \geqslant 0$. Pour tout $t \in]0,1[$, on a $f(t) \leqslant 0$ donc $f(t) \neq f(x)$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(t) = f(x)$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1,+\infty[$, à savoir x.

Finalement :

> pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la classe $\overline{x}$ de x contient :
> - ⋆ un seul élément si $x \in \{\mathrm{e}^{-1}\} \cup [1,+\infty[$;
> - ⋆ deux éléments si $x \in]0,\mathrm{e}^{-1}[\cup]\mathrm{e}^{-1},1[$.

Exercice 4

1. Montrons que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.
   - ⋆ Pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, l'égalité $X \cap A = X \cap A$ nous donne la relation $X \simeq X$. Ainsi, la relation $\simeq$ est réflexive.
   - ⋆ Soient $X, Y \in \mathscr{P}(E)$. Si $X \simeq Y$, alors $X \cap A = Y \cap A$ *i.e.* (par symétrie de la relation d'égalité) $Y \cap A = X \cap A$. On a donc $Y \simeq X$. La relation $\simeq$ est donc symétrique.
   - ⋆ Soient $X, Y, Z \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \simeq Y$ et $Y \simeq Z$. On a $X \cap A = Y \cap A$ et $Y \cap A = Z \cap A$. Par transitivité de la relation d'égalité, on a donc $X \cap A = Z \cap A$. Autrement dit, on a la relation $X \simeq Z$.

   Ainsi :

   $$\boxed{\simeq \text{ est une relation d'équivalence sur } \mathscr{P}(E)}$$

2. On considère l'application :

   $$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(A) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E)/\simeq \\ X & \longmapsto & \mathrm{Cl}(X) \end{array} \right.$$

   où $\mathrm{Cl}(X)$ désigne la classe de $X \in \mathscr{P}(A)$ pour la relation $\simeq$, *i.e.* :

   $$\begin{aligned} \mathrm{Cl}(X) &= \{Y \in \mathscr{P}(E) \mid Y \simeq X\} \\ &= \{Y \in \mathscr{P}(E) \mid Y \cap A = X \cap A\} \\ &= \{Y \in \mathscr{P}(E) \mid Y \cap A = X\} \qquad (\text{car } X \subset A) \end{aligned}$$

   Montrons que l'application θ est bijective.
   - ⋆ Soient $X, Y \in \mathscr{P}(A)$ tels que $\theta(X) = \theta(Y)$. Alors $\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{Cl}(Y)$. Comme $X \in \mathrm{Cl}(X)$, on a aussi $X \in \mathrm{Cl}(Y)$, *i.e.* $X \cap A = Y \cap A$. Or X et Y sont des parties de A donc $X \cap A = X$ et $Y \cap A = Y$. Finalement, $X = Y$ et donc l'application θ est injective.
   - ⋆ Montrons que θ est surjective. Soit $C \in \mathscr{P}(E)/\simeq$. Il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $C = \mathrm{Cl}(X)$ (par définition d'une classe d'équivalence). Posons $\tilde{X} = X \cap A$. On a $\tilde{X} \simeq X$ car :

     $$\tilde{X} \cap A = (X \cap A) \cap A = X \cap (A \cap A) = X \cap A$$

     On en déduit que $\mathrm{Cl}(\tilde{X}) = \mathrm{Cl}(X)$. Ainsi, $C = \mathrm{Cl}(\tilde{X})$ et comme $\tilde{X} \in \mathscr{P}(A)$, cette dernière égalité se réécrit $\theta(\tilde{X}) = C$. Finalement, l'application θ est surjective.

   Finalement :

   $$\boxed{\text{l'application } \theta \text{ est une bijection de } \mathscr{P}(A) \text{ sur } \mathscr{P}(E)/\simeq}$$

Exercice 5

1. Montrons que $\equiv_f$ est une relation d'équivalence sur E.
   - ⋆ Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = f(x)$ *i.e.* $x \equiv_f x$. La relation $\equiv_f$ est donc réflexive.
   - ⋆ Pour tout $x, y \in E$, si $x \equiv_f y$, *i.e.* si $f(x) = f(y)$, alors on a aussi $f(y) = f(x)$ (par symétrie de la relation d'égalité) donc $y \equiv_f x$. Ainsi, la relation $\equiv_f$ est symétrique.
   - ⋆ Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \equiv_f y$ et $y \equiv_f z$. On a $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$ donc (par transitivité de la relation d'égalité) on a $f(x) = f(z)$. Autrement dit, on a $x \equiv_f z$. La relation $\equiv_f$ est donc transitive.

   Finalement :

   $$\boxed{\equiv_f \text{ est une relation d'équivalence sur } E}$$

2. Soit $x \in E$. Si y est un élément de $\overline{x}$, alors $\overline{x} = \overline{y}$. On a $y \in \overline{y}$ donc $y \in \overline{x}$. Ainsi, $x \equiv_f y$ et donc $f(x) = f(y)$ par définition de la relation $\equiv_f$. On en déduit donc que la valeur de $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$ ne dépend pas du représentant x de la classe $\overline{x}$ choisi. Autrement dit :

   $$\boxed{\text{l'application } \overline{f} \text{ est bien définie}}$$

3. Montrons que $\overline{f}$ est injective. Soient $C, D \in E/\equiv_f$ tels que $\overline{f}(C) = \overline{f}(D)$. Montrons que $C = D$. Par définition de $E/\equiv_f$, il existe $x, y \in E$ tels que $C = \overline{x}$ et $D = \overline{y}$. Par hypothèse, on a $f(x) = f(y)$ donc $x \equiv_f y$. On en déduit que $\overline{x} = \overline{y}$, *i.e.* que $C = D$. Ainsi :

$$\boxed{\text{l'application } \overline{f} \text{ est injective}}$$

Exercice 6

Montrons que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{I}$.

- ⋆ Soit $z \in \mathscr{I}$. On peut écrire que $|z| = |z|$ et $\mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(z)$ donc $z \preccurlyeq z$. La relation $\preccurlyeq$ est donc réflexive.
- ⋆ Montrons que la relation $\preccurlyeq$ est antisymétrique. Soient $z, w \in \mathscr{I}$ tels que $z \preccurlyeq w$ et $w \preccurlyeq z$. Montrons que $z = w$.
  - — Montrons d'abord que $|z| = |w|$. Par l'absurde, supposons que $|z| \neq |w|$. Quitte à échanger les rôles de z et w, on peut supposer que $|z| < |w|$. Comme on a la relation $w \preccurlyeq z$, on a $|w| = |z|$ (et $\mathrm{Re}(w) \leqslant \mathrm{Re}(z)$), ce qui est absurde. On a donc nécessairement $|z| = |w|$.
  - — Les relations $z \preccurlyeq w$ et $w \preccurlyeq z$ et $|z| = |w|$ impliquent que $\mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(w)$ et $\mathrm{Re}(w) \leqslant \mathrm{Re}(z)$. Par antisymétrie de la relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$, on a $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z)$. On en déduit que :

    $$\mathrm{Im}(z)^2 = |z|^2 - \mathrm{Re}(z)^2 = |w|^2 - \mathrm{Re}(w)^2 = \mathrm{Im}(w)^2$$

    On en déduit que $\sqrt{\mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{\mathrm{Im}(w)^2}$ *i.e.* $|\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Im}(w)|$. Or $z, w \in \mathscr{I}$ donc $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ et $\mathrm{Im}(w) \geqslant 0$. La dernière égalité se réécrit donc $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$. Ainsi :

    $$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(w) + i\,\mathrm{Im}(w) = w$$

  La relation $\preccurlyeq$ est donc antisymétrique.
- ⋆ Montrons que la relation $\preccurlyeq$ est transitive. Soient $z, w, \xi \in \mathscr{I}$ tels que $z \preccurlyeq w$ et $w \preccurlyeq \xi$.
  - — Si $|z| < |w|$, alors comme $|w| \leqslant |\xi|$ (puisque $w \preccurlyeq \xi$), on a $|z| < |\xi|$ donc $z \preccurlyeq \xi$.
  - — Sinon, comme $z \preccurlyeq w$, on a $|z| = |w|$ et $\mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(w)$.
    - • Si $|w| < |\xi|$, alors $|z| < |\xi|$ et donc $z \preccurlyeq \xi$.
    - • Sinon, comme $w \preccurlyeq \xi$, on a $|w| = |\xi|$ et $\mathrm{Re}(w) \leqslant \mathrm{Re}(\xi)$. Par transitivité des relations $=$ et $\leqslant$, on a $|z| = |\xi|$ et $\mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(\xi)$. Ainsi, on a $z \preccurlyeq \xi$.

  La relation $\preccurlyeq$ est donc transitive.
- ⋆ Soient $z, w \in \mathscr{I}$. On distingue trois cas.
  - — Si $|z| < |w|$, alors $z \preccurlyeq w$.
  - — Si $|z| > |w|$, alors $w \preccurlyeq z$.
  - — Si $|z| = |w|$, alors on a ou bien $\mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(w)$ et alors $z \preccurlyeq w$, ou bien $\mathrm{Re}(w) \leqslant \mathrm{Re}(z)$ et alors $w \preccurlyeq z$

  Ainsi, la relation d'ordre $\preccurlyeq$ est totale.

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\preccurlyeq \text{ est une relation d'ordre totale sur } \mathscr{I}}$$

Exercice 7

Montrons que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

- ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $x = x^1$ et $1 \in \mathbb{N}$ donc $x \preccurlyeq x$. La relation $\preccurlyeq$ est donc réflexive.
- ⋆ Soient $x, y \in \mathbb{N}$. On suppose que $x \preccurlyeq y$ et que $y \preccurlyeq x$. Il existe donc $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $y = x^m$ et $x = y^n$. Ainsi :

  $$x = y^n = \left(x^m\right)^n \qquad i.e. \qquad x = x^{mn}$$

  - — Si $x = 0$, alors l'égalité $x = y^n$ implique que $y = 0$ (en effet, si $y \geqslant 1$, alors on a $0 = x = y^n \geqslant 1$, ce qui est absurde).
  - — Sinon, on a $x \geqslant 1$. L'égalité $x = x^{mn}$ se réécrit $\mathrm{e}^{\ln(x)} = \mathrm{e}^{mn\ln(x)}$ donc $\ln(x) = mn\ln(x)$, soit encore $\ln(x)(mn-1) = 0$. Ainsi, $\ln(x) = 0$ ou $mn = 1$.
    - • Si $\ln(x) = 0$, alors $x = 1$ et donc $y = x^m = 1^m = 1$. Donc $x = y$.
    - • Sinon, $mn = 1$ et comme m et n sont des entiers naturels, on a $m = n = 1$. Ainsi, $x = y^n = y^1 = y$.

  Dans tous les cas, on a $x = y$. La relation $\preccurlyeq$ est donc antisymétrique.
- ⋆ Montrons que la relation $\preccurlyeq$ est transitive. Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$ tels que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$. Il existe alors $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $y = x^m$ et $z = y^n$. On a donc :

  $$z = y^n = \left(x^m\right)^n = x^{mn} \qquad \text{et} \qquad mn \in \mathbb{N} \text{ (car } m, n \in \mathbb{N})$$

  Ainsi, on a la relation $x \preccurlyeq z$. La relation $\preccurlyeq$ est donc transitive.
- ⋆ Montrons que l'ordre sur $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ n'est pas total en montrant que $2 \in \mathbb{N}$ et $3 \in \mathbb{N}$ ne peuvent pas être mis en relation.
  - — Supposons que $2 \preccurlyeq 3$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $3 = 2^n$. L'entier 3 est donc impair, ce qui est absurde.
  - — De même, si on avait $3 \preccurlyeq 2$, alors 2 serait impair, ce qui est absurde.

  Les entiers 2 et 3 ne peuvent donc pas être mis en relation avec la relation $\preccurlyeq$. L'ordre sur $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ n'est donc pas total.

Finalement :

$$\boxed{(\mathbb{N}, \preccurlyeq) \text{ est un ensemble partiellement ordonné}}$$

Exercice 8

1. ⋆ Montrons que $\mathscr{A}$ est majoré par $\mathbb{R}_+ \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathscr{A}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A = [\varepsilon, +\infty[$. Comme $\varepsilon \geqslant 0$, on a $A \subset \mathbb{R}_+$. On a donc montré que :

$$\forall A \in \mathscr{A}, \qquad A \subset \mathbb{R}_+$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble } (\mathscr{A}, \subset) \text{ est majoré par } \mathbb{R}_+}$$

⋆ Montrons que $\mathscr{A}$ est minoré par $\varnothing \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathscr{A}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A = [\varepsilon, +\infty[$. On a $\varnothing \subset A$. On a donc montré que :

$$\forall A \in \mathscr{A}, \qquad \varnothing \subset A$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{l'ensemble } (\mathscr{A}, \subset) \text{ est minoré par } \varnothing}$$

⋆ D'après les deux premiers points :

$$\boxed{\text{l'ensemble } (\mathscr{A}, \subset) \text{ est borné}}$$

⋆ Montrons que $\mathscr{A}$ n'admet pas de maximum en raisonnant par l'absurde. Supposons que $\mathscr{A}$ admet un maximum noté A^*. Il existe alors $\varepsilon^* > 0$ tel que $A^* = [\varepsilon^*, +\infty[$ et :

$$\forall A \in \mathscr{A}, \qquad A \subset A^*,$$

i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad [\varepsilon, +\infty[\subset [\varepsilon^*, +\infty[$$

Pour le choix $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon^*}{2} > 0$, on a :

$$\left[\frac{\varepsilon^*}{2}, +\infty\right[\subset [\varepsilon^*, +\infty[\qquad \text{donc} \qquad \varepsilon^* \leqslant \frac{\varepsilon^*}{2} \qquad i.e. \qquad 2\varepsilon^* \leqslant \varepsilon^*$$

Ceci implique que $\varepsilon^* \leqslant 0$, ce qui est absurde. Ainsi :

$$\boxed{(\mathscr{A}, \subset) \text{ n'admet pas de maximum}}$$

⋆ Montrons que $\mathscr{A}$ n'admet pas de minimum en raisonnant par l'absurde. Supposons que $\mathscr{A}$ admette un minimum noté A_0. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $A_0 = [\varepsilon_0, +\infty[$ et :

$$\forall A \in \mathscr{A}, \qquad A_0 \subset A,$$

i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad [\varepsilon_0, +\infty[\subset [\varepsilon, +\infty[$$

Pour le choix $\varepsilon = \varepsilon_0 + 1 > 0$, on a :

$$[\varepsilon_0, +\infty[\subset [\varepsilon_0 + 1, +\infty[\qquad \text{donc} \qquad \varepsilon_0 + 1 \leqslant \varepsilon_0$$

Ceci implique que $1 \leqslant 0$, ce qui est absurde. Ainsi :

$$\boxed{(\mathscr{A}, \subset) \text{ n'admet pas de minimum}}$$

2. ⋆ Montrons que $\mathscr{B}$ est majoré par $[-1, 1]$. Soit $B \in \mathscr{B}$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $B = \left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right]$. On a $n \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$ (par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$). Ainsi :

$$-1 \leqslant -\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1 \qquad \text{et donc} \qquad \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \subset [-1, 1]$$

On a donc montré que :

$$\forall B \in \mathscr{B}, \qquad B \subset [-1, 1]$$

Ainsi :

$$\boxed{(\mathscr{B}, \subset) \text{ est majoré par } [-1, 1]}$$

On remarque que $[-1, 1]$ appartient à $\mathscr{B}$ (il suffit de choisir $n = 1 \in \mathbb{N}^*$). Ainsi :

$$\boxed{\max(\mathscr{B}, \subset) = [-1, 1]}$$

⋆ Comme à la question précédente, on vérifie que :

$$\boxed{(\mathscr{B}, \subset) \text{ est minoré par } \varnothing \text{ et il est donc borné}}$$

⋆ Si $\mathscr{B}$ admet un minimum, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left[-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right] \subset \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{n_0} \leqslant \frac{1}{n}$$

Pour $n = n_0 + 1 \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\dfrac{1}{n_0} \leqslant \dfrac{1}{n_0 + 1}$ *i.e.* $n_0 + 1 \leqslant n_0$, soit encore $1 \leqslant 0$ ce qui est absurde. Ainsi :

$$\boxed{(\mathscr{B}, \subset) \text{ n'admet pas de minimum}}$$

Exercice 9

- ⋆ Soit $x \in X$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2^n$. On a $1 \mid 2^n$. Ainsi :

$$\forall x \in X, \qquad 1 \mid x$$

Ainsi :

$$\boxed{(X, \mid) \text{ est minoré par } 1}$$

On a $1 = 2^0$ et $0 \in \mathbb{N}$ donc $1 \in X$. Comme de plus 1 minore X, on peut conclure que :

$$\boxed{\min(X, \mid) = 1}$$

- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2^n \mid 0$ (car $0 = 2^n \times 0$) donc :

$$\forall x \in X, \qquad x \mid 0$$

Ainsi :

$$\boxed{(X, \mid) \text{ est majoré par } 0}$$

On en déduit que :

$$\boxed{(X, \mid) \text{ est borné}}$$

- ⋆ Montrons que X n'admet pas de maximum en raisonnant par l'absurde. Supposons que X admette une maximum x_0. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 = 2^{n_0}$ et tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 2^n \mid 2^{n_0}$$

Pour le choix $n = n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, on a $2^{n_0+1} \mid 2^{n_0}$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{n_0+1}k = 2^{n_0}$. En simplifiant par 2^{n_0}, on obtient $2k = 1$ et donc 1 est pair, ce qui est absurde. Ainsi :

$$\boxed{(X, \mid) \text{ n'admet pas de maximum}}$$