

RELATIONS BINAIRES

(corrigés)

Exercice 1

- ★ La relation $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive car 1 n'est pas en relation avec lui-même (en effet, $1 \neq -1$).
 - ★ Pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$, si $x\mathcal{R}y$, alors $x = -y$ ce que l'on peut réécrire $y = -x$. On a donc la relation $y\mathcal{R}x$. On en déduit que la relation $\mathcal{R}$ est symétrique.
 - ★ La relation $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique car on a $1\mathcal{R}(-1)$ et $(-1)\mathcal{R}1$ mais $1 \neq -1$.
 - ★ La relation n'est pas transitive car $1\mathcal{R}(-1)$ et $(-1)\mathcal{R}1$ mais 1 n'est pas en relation avec lui-même.

Finalement :

la relation $\mathcal{R}$ est symétrique et elle n'est ni réflexive, ni antisymétrique, ni transitive

- ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ donc on a $x\mathcal{R}y$. Ainsi, la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.
 - ★ Montrons que la relation $\mathcal{R}$ est symétrique. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $x\mathcal{R}y$. Alors :

$$\cos(x)^2 + \sin(y)^2 = 1 \quad i.e. \quad (1 - \sin(x)^2) + (1 - \cos(y)^2) = 1,$$

soit encore $\cos(y)^2 + \sin(x)^2 = 1$. On a donc la relation $y\mathcal{R}x$. Ceci montre que la relation $\mathcal{R}$ est symétrique.

- ★ La relation $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique. En effet, on a $0\mathcal{R}\pi$ et $\pi\mathcal{R}0$ mais $0 \neq \pi$.
- ★ Montrons que la relation $\mathcal{R}$ est transitive. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a donc :

$$\cos(x)^2 + \sin(y)^2 = 1 \quad \text{et} \quad \cos(y)^2 + \sin(z)^2 = 1$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \cos(x)^2 + \sin(z)^2 &= (1 - \sin(y)^2) + (1 - \cos(y)^2) = 2 - (\cos(y)^2 + \sin(y)^2) \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

On a donc $x\mathcal{R}z$. La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.

Finalement :

la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive mais elle n'est pas antisymétrique

- ★ Pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $x = 1 \times x^1$ et $1 \in \mathbb{N}^*$ donc on a la relation $x\mathcal{R}x$. La relation $\mathcal{R}$ est donc réflexive.
 - ★ Montrons que la relation $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique. On a $1\mathcal{R}2$ (car $2 = 2 \times 1^1$ et $1, 2 \in \mathbb{N}^*$). Supposons que l'on ait aussi $2\mathcal{R}1$. Alors il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 = p2^q$. Comme $p \geq 1$ et $q \geq 1$, on a $1 \geq 2$, ce qui est absurde. Ceci montre que la relation $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique.
 - ★ Montrons que la relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique. Soient $x, y \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on ait $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$. Il existe alors $p, q, r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = px^q$ et $x = ry^s$. Ainsi :

$$x = ry^s = r(px^q)^s = rp^s x^{qs} \quad i.e. \quad x(1 - rp^s x^{qs-1}) = 0 \quad (\text{car } rs \geq 1)$$

On a donc $x = 0$ ou $rp^s x^{qs-1} = 1$. On distingue trois cas.

- Si $x = 0$, alors $y = px^q = p0^q = 0$ (car $q \geq 1$). Ainsi, $x = y = 0$.
- Si $x \geq 1$, alors $rp^s x^{qs-1} = 1$. Comme $q, s \in \mathbb{N}^*$, on a $qs - 1 \geq 0$ donc $x^{qs-1} \geq 1$. De même, $r \geq 1$ et $p^s \geq 1$ (car $p, r, s \in \mathbb{N}^*$). L'égalité $rp^s x^{qs-1} = 1$ implique donc que $r = 1$, $p^s = 1$ et $x^{qs-1} = 1$. Si $p > 1$, alors $p^s > 1$, ce qui est absurde. Ainsi, $p = 1$.
 - On en déduit que si $x = 1$, alors $y = px^q = 1 \times 1^q = 1 = x$.
 - Si $x \geq 2$, alors l'égalité $x^{qs-1} = 1$ implique (puisque $qs - 1 \geq 0$) que $sq = 1$. Or s et q sont des entiers naturels donc $s = q = 1$. Ainsi, $y = px^q = 1 \times x^1 = x$.

Dans tous les cas, on a l'égalité $x = y$. On en déduit que la relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

- ★ Montrons que la relation $\mathcal{R}$ est transitive. Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Il existe $p, q, r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = px^q$ et $z = ry^s$. Ainsi :

$$z = ry^s = r(px^q)^s = rp^s x^{qs} = ax^b$$

en posant $a = rp^s$ et $b = qs$. Comme p, q, r, s sont des entiers supérieurs ou égaux à 1, on a $a, b \in \mathbb{N}^*$. La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.

Finalement :

la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive mais elle n'est pas symétrique

On peut conclure que : Finalement :

- ★ la relation de la question 1. n'est ni une relation d'ordre, ni une relation d'équivalence ;
- ★ la relation de la question 2. est une relation d'équivalence (et n'est pas une relation d'ordre) ;
- ★ la relation de la question 3. est une relation d'ordre (et n'est pas une relation d'équivalence).

Exercice 2 Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$.

- ★ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'égalité $|z| = |z|$ nous donne la relation $z \sim z$. La relation $\sim$ est donc réflexive.
- ★ Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On suppose que $z \sim z'$. Alors $|z| = |z'|$ et comme la relation d'égalité est symétrique, cette égalité se réécrit $|z'| = |z|$ donc on a la relation $z' \sim z$. Ainsi, la relation $\sim$ est symétrique.
- ★ Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$. Si on a $z \sim z'$ et $z' \sim z''$, alors $|z| = |z'|$ et $|z'| = |z''|$ donc $|z| = |z''|$ (par transitivité de la relation d'égalité). La relation $\sim$ est donc transitive.

Ainsi :

$\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. La classe d'équivalence de z , notée $\text{Cl}(z)$, est :

$$\text{Cl}(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid w \sim z\} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| = |z|\}$$

Donc :

$\text{Cl}(z)$ est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon $|z| > 0$

La classe de $z = 0$ est $\text{Cl}(0) = \{0\}$ (cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon nul).

Exercice 3

1. Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$.

- ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(x)}{x}$ donc $x \sim x$. La relation $\sim$ est donc réflexive.

★ Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \sim y$. On a $\frac{\ln(x)}{y} = \frac{\ln(y)}{x}$ ce que l'on peut réécrire (par symétrie de la relation d'égalité) $\frac{\ln(y)}{x} = \frac{\ln(x)}{y}$. On a donc $y \sim x$. La relation $\sim$ est donc symétrique.

★ Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $x \sim y$ et $y \sim z$ i.e. que :

$$\frac{\ln(x)}{y} = \frac{\ln(y)}{x} \quad \text{et} \quad \frac{\ln(y)}{z} = \frac{\ln(z)}{y}$$

On a :

$$\ln(x) = \frac{y \ln(y)}{x} = \frac{y}{x} \times \frac{z \ln(z)}{y} = \frac{z \ln(z)}{x}$$

En divisant par $z \neq 0$, on obtient $\frac{\ln(x)}{z} = \frac{\ln(z)}{x}$. On a donc $x \sim z$. La relation $\sim$ est donc transitive.

Finalement :

$\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La classe $\bar{x}$ de x pour la relation $\sim$ est :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \{y \in \mathbb{R}_+^* \mid y \sim x\} = \{y \in \mathbb{R}_+^* \mid y \ln(y) = x \ln(x)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}_+^* \mid f(y) = f(x)\} \end{aligned}$$

où $f : t \mapsto t \ln(t)$. Le nombre d'éléments de $\bar{x}$ est donc le nombre d'antécédents de $f(x)$ par l'application f dans $\mathbb{R}_+^*$. Étudions donc la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

donc (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > e^{-1}$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0, e^{-1}]$ et strictement croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations suivant (la limite en 0^+ fait l'objet des croissances comparées) :

t	0	e^{-1}	$+\infty$
f	0	$-e^{-1}$	$+\infty$

On distingue trois cas.

- ★ Si $x = e^{-1}$, alors les variations obtenues nous donnent $\bar{x} = \{e^{-1}\}$ (i.e. $\bar{x} = \{x\}$).
- ★ Soit $x \in]0, 1[\setminus \{e^{-1}\}$. Alors $f(x) \in]-e^{-1}, 0[$. Comme f est strictement monotone et continue sur chacun des deux intervalles $]0, e^{-1}[$ et $]e^{-1}, 1[$, on sait d'après le théorème de la bijection que l'équation $f(t) = f(x)$ admet exactement une solution dans chacun de ces deux intervalles. Cette équation n'admet pas de solution dans l'ensemble $\{e^{-1}\} \cup [1, +\infty[$ car $f(e^{-1}) = -e^{-1} \neq f(x)$ et car pour tout $t \geq 1$, on a $f(t) \geq 0$ donc $f(t) \neq f(x)$. Ainsi, $\bar{x}$ contient deux éléments.
- ★ Soit $x \in [1, +\infty[$. Alors $f(x) \geq 0$. Pour tout $t \in]0, 1[$, on a $f(t) \leq 0$ donc $f(t) \neq f(x)$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(t) = f(x)$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1, +\infty[$, à savoir x .

Finalement :

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la classe $\bar{x}$ de x contient :

- ★ un seul élément si $x \in \{e^{-1}\} \cup [1, +\infty[$;
- ★ deux éléments si $x \in]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, 1[$.

Exercice 4

1. Montrons que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.

- ★ Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, l'égalité $X \cap A = X \cap A$ nous donne la relation $X \simeq X$. Ainsi, la relation $\simeq$ est réflexive.
- ★ Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. Si $X \simeq Y$, alors $X \cap A = Y \cap A$ i.e. (par symétrie de la relation d'égalité) $Y \cap A = X \cap A$. On a donc $Y \simeq X$. La relation $\simeq$ est donc symétrique.
- ★ Soient $X, Y, Z \in \mathcal{P}(E)$ tels que $X \simeq Y$ et $Y \simeq Z$. On a $X \cap A = Y \cap A$ et $Y \cap A = Z \cap A$. Par transitivité de la relation d'égalité, on a donc $X \cap A = Z \cap A$. Autrement dit, on a la relation $X \simeq Z$.

Ainsi :

$\simeq$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$

2. On considère l'application :

$$\theta : \begin{cases} \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E)/\simeq \\ X & \longmapsto & \text{Cl}(X) \end{cases}$$

où $\text{Cl}(X)$ désigne la classe de $X \in \mathcal{P}(A)$ pour la relation $\simeq$, i.e. :

$$\begin{aligned} \text{Cl}(X) &= \{Y \in \mathcal{P}(E) \mid Y \simeq X\} \\ &= \{Y \in \mathcal{P}(E) \mid Y \cap A = X \cap A\} \\ &= \{Y \in \mathcal{P}(E) \mid Y \cap A = X\} \quad (\text{car } X \subset A) \end{aligned}$$

Montrons que l'application θ est bijective.

- ★ Soient $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ tels que $\theta(X) = \theta(Y)$. Alors $\text{Cl}(X) = \text{Cl}(Y)$. Comme $X \in \text{Cl}(X)$, on a aussi $X \in \text{Cl}(Y)$, i.e. $X \cap A = Y \cap A$. Or X et Y sont des parties de A donc $X \cap A = X$ et $Y \cap A = Y$. Finalement, $X = Y$ et donc l'application θ est injective.
- ★ Montrons que θ est surjective. Soit $C \in \mathcal{P}(E)/\simeq$. Il existe $X \in \mathcal{P}(E)$ tel que $C = \text{Cl}(X)$ (par définition d'une classe d'équivalence). Posons $\tilde{X} = X \cap A$. On a $\tilde{X} \simeq X$ car :

$$\tilde{X} \cap A = (X \cap A) \cap A = X \cap (A \cap A) = X \cap A$$

On en déduit que $\text{Cl}(\tilde{X}) = \text{Cl}(X)$. Ainsi, $C = \text{Cl}(\tilde{X})$ et comme $\tilde{X} \in \mathcal{P}(A)$, cette dernière égalité se réécrit $\theta(\tilde{X}) = C$. Finalement, l'application θ est surjective.

Finalement :

l'application θ est une bijection de $\mathcal{P}(A)$ sur $\mathcal{P}(E)/\simeq$

Exercice 5

1. Montrons que $\equiv_f$ est une relation d'équivalence sur E .

- ★ Pour tout $x \in E$, on a $f(x) = f(x)$ i.e. $x \equiv_f x$. La relation $\equiv_f$ est donc réflexive.
- ★ Pour tout $x, y \in E$, si $x \equiv_f y$, i.e. si $f(x) = f(y)$, alors on a aussi $f(y) = f(x)$ (par symétrie de la relation d'égalité) donc $y \equiv_f x$. Ainsi, la relation $\equiv_f$ est symétrique.
- ★ Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \equiv_f y$ et $y \equiv_f z$. On a $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$ donc (par transitivité de la relation d'égalité) on a $f(x) = f(z)$. Autrement dit, on a $x \equiv_f z$. La relation $\equiv_f$ est donc transitive.

Finalement :

$\equiv_f$ est une relation d'équivalence sur E

2. Soit $x \in E$. Si y est un élément de $\bar{x}$, alors $\bar{x} = \bar{y}$. On a $y \in \bar{y}$ donc $y \in \bar{x}$. Ainsi, $x \equiv_f y$ et donc $f(x) = f(y)$ par définition de la relation $\equiv_f$. On en déduit donc que la valeur de $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$ ne dépend pas du représentant x de la classe $\bar{x}$ choisi. Autrement dit :

l'application $\bar{f}$ est bien définie

3. Montrons que $\bar{f}$ est injective. Soient $C, D \in E/ \equiv_f$ tels que $\bar{f}(C) = \bar{f}(D)$. Montrons que $C = D$. Par définition de $E/ \equiv_f$, il existe $x, y \in E$ tels que $C = \bar{x}$ et $D = \bar{y}$. Par hypothèse, on a $f(x) = f(y)$ donc $x \equiv_f y$. On en déduit que $\bar{x} = \bar{y}$, i.e. que $C = D$. Ainsi :

l'application $\bar{f}$ est injective

Exercice 6 Montrons que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{J}$.

- ★ Soit $z \in \mathcal{J}$. On peut écrire que $|z| = |z|$ et $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(z)$ donc $z \preccurlyeq z$. La relation $\preccurlyeq$ est donc réflexive.
- ★ Montrons que la relation $\preccurlyeq$ est antisymétrique. Soient $z, w \in \mathcal{J}$ tels que $z \preccurlyeq w$ et $w \preccurlyeq z$. Montrons que $z = w$.
 - Montrons d'abord que $|z| = |w|$. Par l'absurde, supposons que $|z| \neq |w|$. Quitte à échanger les rôles de z et w , on peut supposer que $|z| < |w|$. Comme on a la relation $w \preccurlyeq z$, on a $|w| = |z|$ (et $\operatorname{Re}(w) \leq \operatorname{Re}(z)$), ce qui est absurde. On a donc nécessairement $|z| = |w|$.
 - Les relations $z \preccurlyeq w$ et $w \preccurlyeq z$ et $|z| = |w|$ impliquent que $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(w)$ et $\operatorname{Re}(w) \leq \operatorname{Re}(z)$. Par antisymétrie de la relation $\leq$ dans $\mathbb{R}$, on a $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w)$. On en déduit que :

$$\operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2 - \operatorname{Re}(z)^2 = |w|^2 - \operatorname{Re}(w)^2 = \operatorname{Im}(w)^2$$

On en déduit que $\sqrt{\operatorname{Im}(z)^2} = \sqrt{\operatorname{Im}(w)^2}$ i.e. $|\operatorname{Im}(z)| = |\operatorname{Im}(w)|$. Or $z, w \in \mathcal{J}$ donc $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ et $\operatorname{Im}(w) \geq 0$. La dernière égalité se réécrit donc $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w)$. Ainsi :

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(w) + i \operatorname{Im}(w) = w$$

La relation $\preccurlyeq$ est donc antisymétrique.

- ★ Montrons que la relation $\preccurlyeq$ est transitive. Soient $z, w, \xi \in \mathcal{J}$ tels que $z \preccurlyeq w$ et $w \preccurlyeq \xi$.
 - Si $|z| < |w|$, alors comme $|w| \leq |\xi|$ (puisque $w \preccurlyeq \xi$), on a $|z| < |\xi|$ donc $z \preccurlyeq \xi$.
 - Sinon, comme $z \preccurlyeq w$, on a $|z| = |w|$ et $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(w)$.
 - Si $|w| < |\xi|$, alors $|z| < |\xi|$ et donc $z \preccurlyeq \xi$.
 - Sinon, comme $w \preccurlyeq \xi$, on a $|w| = |\xi|$ et $\operatorname{Re}(w) \leq \operatorname{Re}(\xi)$. Par transitivité des relations $=$ et $\leq$, on a $|z| = |\xi|$ et $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(\xi)$. Ainsi, on a $z \preccurlyeq \xi$.

La relation $\preccurlyeq$ est donc transitive.

- ★ Soient $z, w \in \mathcal{J}$. On distingue trois cas.

- Si $|z| < |w|$, alors $z \preccurlyeq w$.
- Si $|z| > |w|$, alors $w \preccurlyeq z$.

- Si $|z| = |w|$, alors on a ou bien $\operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(w)$ et alors $z \preccurlyeq w$, ou bien $\operatorname{Re}(w) \leq \operatorname{Re}(z)$ et alors $w \preccurlyeq z$.

Ainsi, la relation d'ordre $\preccurlyeq$ est totale.

On peut donc conclure que :

$\preccurlyeq$ est une relation d'ordre totale sur $\mathcal{J}$

Exercice 7 Montrons que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

- ★ Pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $x = x^1$ et $1 \in \mathbb{N}$ donc $x \preccurlyeq x$. La relation $\preccurlyeq$ est donc réflexive.
- ★ Soient $x, y \in \mathbb{N}$. On suppose que $x \preccurlyeq y$ et que $y \preccurlyeq x$. Il existe donc $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $y = x^m$ et $x = y^n$. Ainsi :

$$x = y^n = (x^m)^n \quad \text{i.e.} \quad x = x^{mn}$$

- Si $x = 0$, alors l'égalité $x = y^n$ implique que $y = 0$ (en effet, si $y \geq 1$, alors on a $0 = x = y^n \geq 1$, ce qui est absurde).
- Sinon, on a $x \geq 1$. L'égalité $x = x^{mn}$ se réécrit $e^{\ln(x)} = e^{mn \ln(x)}$ donc $\ln(x) = mn \ln(x)$, soit encore $\ln(x)(mn - 1) = 0$. Ainsi, $\ln(x) = 0$ ou $mn = 1$.
 - Si $\ln(x) = 0$, alors $x = 1$ et donc $y = x^m = 1^m = 1$. Donc $x = y$.
 - Sinon, $mn = 1$ et comme m et n sont des entiers naturels, on a $m = n = 1$. Ainsi, $x = y^n = y^1 = y$.

Dans tous les cas, on a $x = y$. La relation $\preccurlyeq$ est donc antisymétrique.

- ★ Montrons que la relation $\preccurlyeq$ est transitive. Soient $x, y, z \in \mathbb{N}$ tels que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$. Il existe alors $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $y = x^m$ et $z = y^n$. On a donc :

$$z = y^n = (x^m)^n = x^{mn} \quad \text{et} \quad mn \in \mathbb{N} \quad (\text{car } m, n \in \mathbb{N})$$

Ainsi, on a la relation $x \preccurlyeq z$. La relation $\preccurlyeq$ est donc transitive.

- ★ Montrons que l'ordre sur $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ n'est pas total en montrant que $2 \in \mathbb{N}$ et $3 \in \mathbb{N}$ ne peuvent pas être mis en relation.
 - Supposons que $2 \preccurlyeq 3$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $3 = 2^n$. L'entier 3 est donc impair, ce qui est absurde.
 - De même, si on avait $3 \preccurlyeq 2$, alors 2 serait impair, ce qui est absurde.

Les entiers 2 et 3 ne peuvent donc pas être mis en relation avec la relation $\preccurlyeq$. L'ordre sur $(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ n'est donc pas total.

Finalement :

$(\mathbb{N}, \preccurlyeq)$ est un ensemble partiellement ordonné

Exercice 8

1. ★ Montrons que $\mathcal{A}$ est majoré par $\mathbb{R}_+ \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A = [\varepsilon, +\infty[$. Comme $\varepsilon \geq 0$, on a $A \subset \mathbb{R}_+$. On a donc montré que :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad A \subset \mathbb{R}_+$$

Ainsi :

l'ensemble $(\mathcal{A}, \subset)$ est majoré par $\mathbb{R}_+$

- ★ Montrons que $\mathcal{A}$ est minoré par $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A = [\varepsilon, +\infty[$. On a $\emptyset \subset A$. On a donc montré que :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \emptyset \subset A$$

Ainsi :

l'ensemble $(\mathcal{A}, \subset)$ est minoré par $\emptyset$

- ★ D'après les deux premiers points :

l'ensemble $(\mathcal{A}, \subset)$ est borné

- ★ Montrons que $\mathcal{A}$ n'admet pas de maximum en raisonnant par l'absurde. Supposons que $\mathcal{A}$ admet un maximum noté A^* . Il existe alors $\varepsilon^* > 0$ tel que $A^* = [\varepsilon^*, +\infty[$ et :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad A \subset A^*,$$

i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad [\varepsilon, +\infty[\subset [\varepsilon^*, +\infty[$$

Pour le choix $\varepsilon = \frac{\varepsilon^*}{2} > 0$, on a :

$$\left[\frac{\varepsilon^*}{2}, +\infty[\subset [\varepsilon^*, +\infty[\quad \text{donc} \quad \varepsilon^* \leq \frac{\varepsilon^*}{2} \quad \text{i.e.} \quad 2\varepsilon^* \leq \varepsilon^*$$

Ceci implique que $\varepsilon^* \leq 0$, ce qui est absurde. Ainsi :

$(\mathcal{A}, \subset)$ n'admet pas de maximum

- ★ Montrons que $\mathcal{A}$ n'admet pas de minimum en raisonnant par l'absurde. Supposons que $\mathcal{A}$ admette un minimum noté A_0 . Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $A_0 = [\varepsilon_0, +\infty[$ et :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad A_0 \subset A,$$

i.e. :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad [\varepsilon_0, +\infty[\subset [\varepsilon, +\infty[$$

Pour le choix $\varepsilon = \varepsilon_0 + 1 > 0$, on a :

$$[\varepsilon_0, +\infty[\subset [\varepsilon_0 + 1, +\infty[\quad \text{donc} \quad \varepsilon_0 + 1 \leq \varepsilon_0$$

Ceci implique que $1 \leq 0$, ce qui est absurde. Ainsi :

$(\mathcal{A}, \subset)$ n'admet pas de minimum

2. ★ Montrons que $\mathcal{B}$ est majoré par $[-1, 1]$. Soit $B \in \mathcal{B}$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $B = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$. On a $n \geq 1$ donc $\frac{1}{n} \leq 1$ (par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$). Ainsi :

$$-1 \leq -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1 \quad \text{et donc} \quad \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \subset [-1, 1]$$

On a donc montré que :

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad B \subset [-1, 1]$$

Ainsi :

$(\mathcal{B}, \subset)$ est majoré par $[-1, 1]$

On remarque que $[-1, 1]$ appartient à $\mathcal{B}$ (il suffit de choisir $n = 1 \in \mathbb{N}^*$). Ainsi :

$$\max(\mathcal{B}, \subset) = [-1, 1]$$

- ★ Comme à la question précédente, on vérifie que :

$(\mathcal{B}, \subset)$ est minoré par $\emptyset$ et il est donc borné

- ★ Si $\mathcal{B}$ admet un minimum, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left[-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right] \subset \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n_0} \leq \frac{1}{n}$$

Pour $n = n_0 + 1 \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\frac{1}{n_0} \leq \frac{1}{n_0 + 1}$ i.e. $n_0 + 1 \leq n_0$, soit encore $1 \leq 0$ ce qui est absurde. Ainsi :

$(\mathcal{B}, \subset)$ n'admet pas de minimum

Exercice 9

★ Soit $x \in X$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2^n$. On a $1 \mid 2^n$. Ainsi :

$$\forall x \in X, \quad 1 \mid x$$

Ainsi :

$$(X, \mid) \text{ est minoré par } 1$$

On a $1 = 2^0$ et $0 \in \mathbb{N}$ donc $1 \in X$. Comme de plus 1 minore X , on peut conclure que :

$$\min(X, \mid) = 1$$

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2^n \mid 0$ (car $0 = 2^n \times 0$) donc :

$$\forall x \in X, \quad x \mid 0$$

Ainsi :

$$(X, \mid) \text{ est majoré par } 0$$

On en déduit que :

$$(X, \mid) \text{ est borné}$$

★ Montrons que X n'admet pas de maximum en raisonnant par l'absurde. Supposons que X admette une maximum x_0 . Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 = 2^{n_0}$ et tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n \mid 2^{n_0}$$

Pour le choix $n = n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, on a $2^{n_0+1} \mid 2^{n_0}$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2^{n_0+1}k = 2^{n_0}$. En simplifiant par 2^{n_0} , on obtient $2k = 1$ et donc 1 est pair, ce qui est absurde. Ainsi :

$$(X, \mid) \text{ n'admet pas de maximum}$$