

RELATIONS BINAIRES

Exercice 1 On considère les relations $\mathcal{R}$ sur les ensembles E ci-dessous. Dans chaque cas, étudier les propriétés de $\mathcal{R}$ (réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité).

1. $E = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \iff x = -y$$

2. $E = \mathbb{R}$ et $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \iff (\cos(x))^2 + \sin(y)^2 = 1$$

3. $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y \iff (\exists p, q \in \mathbb{N}^*, y = px^q)$$

Quelles sont les relations qui sont des relations d'ordre ? des relations d'équivalence ?

1 Relations d'équivalence

Exercice 2 On définit une relation notée $\sim$ sur $\mathbb{C}$ en posant :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad z \sim z' \iff |z| = |z'|$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$ et interpréter géométriquement les classes d'équivalence.

Exercice 3 On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \sim y \iff \frac{\ln(x)}{y} = \frac{\ln(y)}{x}$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x .

Exercice 4 Soient E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On définit une relation $\simeq$ sur $\mathcal{P}(E)$ en posant :

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), \quad X \simeq Y \iff X \cap A = Y \cap A$$

1. Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Expliciter une application bijective de $\mathcal{P}(A)$ sur l'ensemble quotient $\mathcal{P}(E)/\simeq$.

Exercice 5 Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ une application. On définit une relation $\equiv_f$ sur E en posant :

$$\forall x, y \in E, \quad x \equiv_f y \iff f(x) = f(y)$$

1. Montrer que $\equiv_f$ est une relation d'équivalence sur E et déterminer ses classes d'équivalence.
2. Justifier que l'application :

$$\bar{f} : \begin{cases} E/\equiv_f & \longrightarrow & F \\ \bar{x} & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

est bien définie, *i.e.* que $\bar{f}(\bar{x})$ ne dépend pas du représentant de $\bar{x}$ choisi.

3. Montrer que l'application $\bar{f}$ est injective.

2 Relations d'ordre

Exercice 6 On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathcal{I} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ par :

$$\forall z, z' \in \mathcal{I}, \quad z \preccurlyeq z' \iff \left[|z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(z')) \right]$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre totale sur $\mathcal{I}$.

Exercice 7 On définit sur $\mathbb{N}$ une relation $\preccurlyeq$ en posant :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x \preccurlyeq y \iff (\exists n \in \mathbb{N}, y = x^n)$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Cette relation est-elle totale ?

Exercice 8 On travaille dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ muni de la relation d'inclusion $\subset$.

1. L'ensemble $\mathcal{A} = \{[\varepsilon, +\infty[\mid \varepsilon > 0\}$ est-il majoré ? minoré ? borné ? Possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
2. Même question pour l'ensemble $\mathcal{B} = \left\{ \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 9 On travaille dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité notée $\mid$. L'ensemble :

$$X = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

est-il majoré ? minoré ? borné ? Possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?