

RELATIONS BINAIRES

Exercice 1 On considère les relations \mathcal{R} sur les ensembles E ci-dessous. Dans chaque cas, dire si la relation est réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.

1. $E = \mathbb{Z}$ et \mathcal{R} définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \iff x = -y$$

2. $E = \mathbb{R}$ et \mathcal{R} définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \iff (\cos(x)^2 + \sin(y)^2 = 1)$$

3. $E = \mathbb{N}$ et \mathcal{R} définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x\mathcal{R}y \iff (\exists p, q \in \mathbb{N}^*, y = px^q)$$

Quelles sont les relations qui sont des relations d'ordre ? des relations d'équivalence ?

1 Relations d'équivalence

Exercice 2 On définit une relation notée \sim sur \mathbb{C} en posant :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad z \sim z' \iff |z| = |z'|$$

Montrer que \sim est une relation d'équivalence sur \mathbb{C} et déterminer ses classes d'équivalence.

Exercice 3 On définit une relation \sim sur \mathbb{R}_+^* en posant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \sim y \iff \frac{\ln(x)}{y} = \frac{\ln(y)}{x}$$

1. Montrer que \sim est une relation d'équivalence sur \mathbb{R}_+^* .
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x .

Exercice 4 Soient E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On définit une relation \simeq sur $\mathcal{P}(E)$ en posant :

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), \quad X \simeq Y \iff X \cap A = Y \cap A$$

1. Montrer que \simeq est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Expliciter une application bijective de $\mathcal{P}(A)$ sur l'ensemble quotient $\mathcal{P}(E)/\simeq$.

Exercice 5 Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. On définit une relation \equiv_f sur E en posant :

$$\forall x, y \in E, \quad x \equiv_f y \iff f(x) = f(y)$$

1. Montrer que \equiv_f est une relation d'équivalence sur E et déterminer ses classes d'équivalence.
2. Justifier que l'application :

$$\bar{f} : \begin{cases} E/\equiv_f & \rightarrow & F \\ \bar{x} & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

est bien définie.

3. Montrer que l'application \bar{f} est injective.

2 Relations d'ordre

Exercice 6 On définit une relation binaire \preccurlyeq sur $\mathcal{I} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) \geq 0\}$ par :

$$\forall z, z' \in \mathcal{I}, \quad z \preccurlyeq z' \iff \left[|z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \text{Re}(z) \leq \text{Re}(z')) \right]$$

Montrer que \preccurlyeq est une relation d'ordre totale sur \mathcal{I} .

Exercice 7 On définit sur \mathbb{N} une relation \preccurlyeq en posant :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x \preccurlyeq y \iff (\exists n \in \mathbb{N}, y = x^n)$$

Montrer que \preccurlyeq est une relation d'ordre sur \mathbb{N} . Cette relation est-elle totale ?

Exercice 8 On travaille dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ muni de la relation d'inclusion \subset .

1. L'ensemble $A = \{[\varepsilon, +\infty[\mid \varepsilon > 0\}$ est-il majoré ? minoré ? borné ? Possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?
2. Même question pour l'ensemble $B = \left\{ \left[-\frac{1}{n}, n \right] \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 9 On travaille dans \mathbb{N} muni de la relation de divisibilité notée \mid . L'ensemble :

$$X = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

est-il majoré ? minoré ? borné ? Possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?