

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

(corrigés)

Exercice 1 (propriétés algébriques de $\ln$ et $\exp$)

On rappelle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$$

1. Comme $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, on a :

$$A = \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) + \ln\left(e^{\frac{1}{4}}\right) + e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad i.e. \quad \boxed{A = 2}$$

2. Soit $w > 0$. On a $\ln\left(\frac{1}{w}\right) = -\ln(w)$ et :

$$\ln\left(\frac{1}{w^2}\right) = -\ln(w^2) = -2\ln(w)$$

donc :

$$B = \exp\left(-\frac{\ln\left(\frac{1}{w^2}\right)}{\ln\left(\frac{1}{w}\right)}\right) = \exp\left(-\frac{-2\ln(w)}{-\ln(w)}\right) \quad i.e. \quad \boxed{B = e^{-2}}$$

Remarque : on a utilisé ici le fait que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (e^x)^y = e^{xy}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) = \ln(e^x + 1) - x \quad (\text{car } \ln(e^x) = x)$$

donc :

$$\boxed{C = e^{\ln(1+e^x)} = 1 + e^x}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $e^{2\ln(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2$ donc :

$$\boxed{D = \frac{1}{e} \times e^{x^2+2x+1-x^2} = e^{2x}}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned} 3\ln(2x) - \ln(x) &= \ln((2x)^3) - \ln(x) = \ln(8x^3) - \ln(x) \\ &= \ln\left(\frac{8x^3}{x}\right) \\ &= \ln(8x^2) \end{aligned}$$

et :

$$e^{x-3\ln(x)} = e^x \times e^{\ln(x^{-3})} = \frac{e^x}{x^3}$$

Ainsi :

$$f(x) = x \times \frac{8x^2 \times \frac{e^x}{x^3}}{e^x \times e^{-2}} = 8e^2$$

On vient de montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 8e^2$$

donc :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est constante sur } \mathbb{R}_+^*}$$

Exercice 2

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} \star \quad f'(x) &= \frac{1}{x}; \\ \star \quad f''(x) &= -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}; \\ \star \quad f^{(3)}(x) &= 2x^{-3}; \\ \star \quad f^{(4)}(x) &= -6x^{-4}; \\ \star \quad f^{(5)}(x) &= 24x^{-5}. \end{aligned}$$

Notation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \quad (\text{factorielle de } n)$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Avec cette notation, on conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n},$$

Nous allons le vérifier par récurrence.

★ Pour $n = 1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (-1)^{1-1} \frac{(1-1)!}{x^1} = \frac{1}{x} = f'(x)$$

donc l'égalité est vraie au rang $n = 1$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n}$$

Par définition de la dérivée $(n+1)^e$, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (-n) x^{-n-1} \\ &= (-1) \times (-1)^{n-1} \times (n-1)! \times n x^{-(n+1)} \\ &= (-1)^n n! x^{-(n+1)} \end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \quad (\text{et } f^{(0)} = \ln)}$$

2. Posons $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Pour tout $x \in D$, on a :

$$g(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \times \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

Notons a et b les fonctions définies sur D par :

$$\forall x \in D, \quad a(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{et} \quad b(x) = \frac{1}{x+1}$$

On peut montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D, \quad a^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \quad \text{et} \quad b^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D, \quad g^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \right)}$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h'(x) = (x+1)e^x, \quad h''(x) = (x+2)e^x \quad \text{et} \quad h^{(3)}(x) = (x+3)e^x$$

On conjecture alors que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad h^{(n)}(x) = (x+n)e^x},$$

ce que l'on vérifie par récurrence.

Exercice 3

1. On a :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} \right) = -\infty$$

$$\text{car } x^3 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \quad \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

2. On a :

$$\ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^4 \left(1 + \frac{3}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^3} \right)} = 0$$

$$\text{car } 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad x^2 \left(1 + \frac{3}{x^3} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

3. On a :

$$\ell_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{x \left(1 + \frac{\ln(x)}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{\ln(x)}{x}} = 1$$

$$\text{car } \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{par croissances comparées.}$$

4. On utilise l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\ell_4 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\ &= 0\end{aligned}$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc, en multipliant par $\frac{1}{x} \leq 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad \frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq -\frac{1}{x}$$

Or $\pm \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut conclure que $\ell_5 = 0$.

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on sait que $x^x = e^{x \ln(x)}$. Or $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ par croissances comparées donc :

$$\ell_6 = \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1$$

7. On a $x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -1 < 0$ donc $x(x - 1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^-$ puis :

$$\ell_7 = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} = -\infty$$

8. On utilise à nouveau l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\ell_8 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)}{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x^2} + 1)}{(1+x^2) - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x^2} + 1) \\ &= 2\end{aligned}$$

9. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $-1 \leq \cos(e^x) \leq 1$ donc, en multipliant par $\frac{x}{x^2 + 1} \geq 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad -\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \pm \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \pm \frac{x}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \pm \frac{1}{x(1 + \frac{1}{x^2})} = 0$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut conclure que $\ell_9 = 0$.

10. On remarque que 1 est racine du polynôme (du second degré) $X^2 - 3X + 2$ et on a la factorisation :

$$X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$$

donc :

$$\ell_{10} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1$$

11. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x^{(x^x)} = e^{x^x \ln(x)}$. Or :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \ell_6 = 1 \quad \text{et} \quad \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$$

donc $x^x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$. On en déduit que :

$$\ell_{11} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

12. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$(x^x)^x = e^{x \ln(x^x)} = e^{x^2 \ln(x)}$$

et on sait (par croissances comparées) que $x^2 \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. On en déduit que :

$$\ell_{12} = \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1$$

Exercice 4 Pour chaque fonction, on note $\mathcal{D}$ son domaine de définition et Δ son domaine de dérivabilité.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\begin{aligned}x \in \mathcal{D}_f &\iff x^2 - 1 \geq 0 \iff (x-1)(x+1) \geq 0 \\ &\iff x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\quad (\text{tableau de signes})\end{aligned}$$

Le domaine de définition de f est donc $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Par ailleurs, la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc (en reprenant le raisonnement précédent), on obtient $\Delta_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. De plus :

$$\forall x \in \Delta_f, \quad f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

2. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}x \in \mathcal{D}_g &\iff x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } x - \sqrt{x} \geq 0 \iff x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \geq 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } (x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} \geq 1) \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x \geq 1\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{D}_g = \{0\} \cup [1, +\infty[$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient (en reprenant le raisonnement précédent) $\Delta_g =]1, +\infty[$. De plus :

$$\forall x \in \Delta_g, \quad g'(x) = \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}}$$

3. La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule en 1 donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{D}_h \iff x > 0 \text{ et } \ln(x) \neq 0 \iff x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

Ainsi, $\mathcal{D}_h =]0, 1[\cup]1, +\infty[$. La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ (elle l'est en fait sur $\mathbb{R}_+^*$) et elle ne s'annule pas sur cet ensemble donc h est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Ainsi, $\Delta_h =]0, 1[\cup]1, +\infty[$. De plus :

$$\forall x \in \Delta_h, \quad h'(x) = -\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)^2} = -\frac{1}{x \ln(x)^2}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_k &\iff e^x + 2e^{-x} - 3 > 0 \iff e^x + \frac{2}{e^x} - 3 > 0 \\ &\iff \frac{e^{2x} - 3e^x + 2}{e^x} > 0 \\ &\iff (e^x)^2 - 3e^x + 2 > 0 \quad (\text{car } e^x > 0) \\ &\iff t^2 - 3t + 2 > 0 \quad (\text{en posant } t = e^x) \\ &\iff t \in]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[\end{aligned}$$

car les racines du trinôme du second degré $t^2 - 3t + 2$ sont 1 et 2. Comme $t = e^x$, on a :

$$x \in \mathcal{D}_k \iff e^x < 1 \text{ ou } e^x > 2 \iff x < 0 \text{ ou } x > \ln(2)$$

Le domaine de définition de k est donc $\mathcal{D}_k =]-\infty, 0[\cup]\ln(2), +\infty[$. La fonction $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$) donc on a également $\Delta_k =]-\infty, 0[\cup]\ln(2), +\infty[$ et :

$$\forall x \in \Delta_k, \quad k'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x} - 3}$$

Exercice 5

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Par définition des fonctions sh et ch , on a :

$$\begin{aligned} \text{sh}(x) \text{ch}(y) + \text{ch}(x) \text{sh}(y) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \times \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \times \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + (e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y})}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \\ &= \text{sh}(x+y) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}(x+y) = \text{sh}(x) \text{ch}(y) + \text{ch}(x) \text{sh}(y)}$$

2. On procède de la même manière.

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On sait que $\text{th}(x), \text{th}(y) \in]-1, 1[$ donc $\text{th}(x) \text{th}(y) \in]-1, 1[$. Ainsi, $1 + \text{th}(x) \text{th}(y) > 0$ (donc ce nombre est en particulier non nul). La quantité $\frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x) \text{th}(y)}$ est donc bien définie. De plus :

$$\begin{aligned} \frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x) \text{th}(y)} &= \frac{\frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} + \frac{\text{sh}(y)}{\text{ch}(y)}}{1 + \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \times \frac{\text{sh}(y)}{\text{ch}(y)}} = \frac{\frac{\text{sh}(x) \text{ch}(y) + \text{ch}(x) \text{sh}(y)}{\text{ch}(x) \text{ch}(y)}}{\frac{\text{ch}(x) \text{ch}(y) + \text{sh}(x) \text{sh}(y)}{\text{ch}(x) \text{ch}(y)}} \\ &= \frac{\text{sh}(x) \text{ch}(y) + \text{ch}(x) \text{sh}(y)}{\text{ch}(x) \text{ch}(y) + \text{sh}(x) \text{sh}(y)} \\ &= \frac{\text{sh}(x+y)}{\text{ch}(x+y)} \end{aligned}$$

d'après les questions 1. et 2. Ainsi :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \text{th}(x+y) = \frac{\text{th}(x) + \text{th}(y)}{1 + \text{th}(x) \text{th}(y)}}$$

Exercice 6 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}} &\iff e^{x \ln(\sqrt{x})} = e^{\sqrt{x} \ln(x)} \iff x \ln\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{x} \ln(x) \\
 &\iff \frac{x}{2} \ln(x) = \sqrt{x} \ln(x) \\
 &\iff \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right) \ln(x) = 0 \\
 &\iff \sqrt{x} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right) \ln(x) = 0 \\
 &\iff \sqrt{x} = 0 \text{ ou } \frac{\sqrt{x}}{2} - 1 = 0 \text{ ou } \ln(x) = 0 \\
 &\iff x = 4 \text{ ou } x = 1
 \end{aligned}$$

car $x > 0$. On en déduit que :

l'ensemble des solutions de l'équation est $\{1, 4\}$

Exercice 7

1. La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$; elle est donc en particulier dérivable en 0. Par définition de la dérivabilité, on a :

$$\text{sh}'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x) - \text{sh}(0)}{x - 0}$$

Or $\text{sh}(0) = 0$ et $\text{sh}'(0) = \text{ch}(0) = 1$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sh}(x)}{x} = 1$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $\text{sh}(x) \neq 0$ et :

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{sh}(2x)}{2 \text{sh}(x)} &= \frac{\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}}{2 \times \frac{e^x - e^{-x}}{2}} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2(e^x - e^{-x})} \\
 &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2(e^x - e^{-x})} \\
 &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{ch}(x) = \frac{\text{sh}(2x)}{2 \text{sh}(x)}$$

3. Si x vaut 0, alors chaque terme dans le produit est égal à 1 (puisque $\text{ch}(0) = 1$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_n = 1$.

Supposons maintenant que $x \in \mathbb{R}^*$ et commençons par calculer les premiers termes de la suite. On a $u_0 = \text{ch}(x)$ puis (en utilisant la question 2. avec les nombres non nuls x et $x/2$) :

$$u_1 = \text{ch}(x) \text{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\text{sh}(2x)}{2 \text{sh}(x)} \times \frac{\text{sh}(x)}{2 \text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\text{sh}(2x)}{2^2 \text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On conjecture alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\text{sh}(2x)}{2^{n+1} \text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Démontrons ce résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

★ On sait que :

$$u_0 = \text{ch}(x) = \frac{\text{sh}(2x)}{2 \text{sh}(x)}$$

d'après la question 2. L'égalité est donc vraie au rang $n = 0$.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$u_n = \frac{\text{sh}(2x)}{2^{n+1} \text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Montrons que :

$$u_{n+1} = \frac{\text{sh}(2x)}{2^{n+2} \text{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

On a (en mettant le dernier terme de côté dans le produit définissant u_{n+1}) :

$$u_{n+1} = \underbrace{\left(\prod_{k=0}^n \text{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)}_{=u_n} \times \text{ch}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n+1} = \frac{\text{sh}(2x)}{2^{n+1} \text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)} \times \text{ch}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

Comme $\frac{x}{2^{n+1}} \neq 0$ (puisque $x \neq 0$), la question 2. nous donne :

$$\text{ch}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{\text{sh}\left(2 \times \frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2 \text{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2 \text{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

Ainsi :

$$u_{n+1} = \frac{\text{sh}(2x)}{2^{n+1} \text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)} \times \frac{\text{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2 \text{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\text{sh}(2x)}{2^{n+2} \text{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2^{n+1} \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Il s'agit maintenant de trouver la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$. Remarquons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x \times \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}}$$

Or $\frac{x}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, d'après la question 1., on a $\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. On en déduit

donc que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x}$. Finalement :

$$\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge de limite 1 si } x = 0, \text{ et de limite } \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x} \text{ si } x \neq 0$$

Exercice 8 Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Posons $a = e^x + e^y$ et $b = e^{-x} + e^{-y}$. Alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = \frac{35}{12} \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = \frac{25}{12} \end{cases} &\iff \begin{cases} e^x + e^{-x} + e^y + e^{-y} = \frac{35}{6} \\ e^x - e^{-x} + e^y - e^{-y} = \frac{25}{6} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = \frac{35}{6} \\ a - b = \frac{25}{6} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = \frac{35}{6} \\ 2a = 10 \quad L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b = \frac{5}{6} \\ a = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Posons maintenant $X = e^x$ et $Y = e^y$. Remarquons que :

$$a = X + Y \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{X + Y}{XY} = \frac{a}{XY}$$

donc :

$$\begin{aligned} \begin{cases} b = \frac{5}{6} \\ a = 5 \end{cases} &\iff \begin{cases} X + Y = 5 \\ \frac{a}{XY} = \frac{5}{6} \end{cases} &\iff \begin{cases} X + Y = 5 \\ XY = 6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X + Y = 5 \\ X(5 - X) = 6 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X + Y = 5 \\ X^2 - 5X + 6 = 0 \end{cases} \\ &\iff (X = 2 \text{ et } Y = 3) \text{ ou } (X = 3 \text{ et } Y = 2) \\ &\iff (x = \ln(2) \text{ et } y = \ln(3)) \text{ ou } (x = \ln(3) \text{ et } y = \ln(2)) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\text{l'ensemble des solutions de } (\mathcal{S}) \text{ est } \{(\ln(2), \ln(3)), (\ln(3), \ln(2))\}$$

Exercice 9 On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de chacune des trois équations.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a (en posant $X = e^x$) :

$$\begin{aligned} 3 \operatorname{ch}(x) + 2 \operatorname{sh}(x) = 7 &\iff \frac{5e^x + e^{-x}}{2} = 7 \\ &\iff 5e^x + e^{-x} = 14 \\ &\iff 5(e^x)^2 - 14e^x + 1 = 0 \\ &\iff 5X^2 - 14X + 1 = 0 \\ &\iff X = \frac{7 - 2\sqrt{11}}{5} \text{ ou } X = \frac{5 + 2\sqrt{11}}{5} \end{aligned}$$

Ces deux nombres sont strictement positifs donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ \ln\left(\frac{7 - 2\sqrt{11}}{5}\right), \ln\left(\frac{5 + 2\sqrt{11}}{5}\right) \right\}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Sachant que $\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ch}(x)^4 - \operatorname{sh}(x)^4 = 1 &\iff (\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2)(\operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x)^2) = 1 \\
 &\iff \operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x)^2 = 1 \\
 &\iff e^{2x} + e^{-2x} + 2 + e^{2x} + e^{-2x} - 2 = 4 \\
 &\iff e^{2x} + e^{-2x} - 2 = 0 \\
 &\iff (e^x - e^{-x})^2 = 0 \\
 &\iff e^x = e^{-x} \\
 &\iff x = -x \\
 &\iff x = 0
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{S} = \{0\}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ch}(x)^4 - \operatorname{sh}(x)^4 &= (\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2)(\operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x)^2) \\
 &= \operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x)^2
 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ch}(x)^3 \operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)^3 &= \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x) (\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2) \\
 &= \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ch}(x)^4 + \operatorname{ch}(x)^3 \operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)^3 - \operatorname{sh}(x)^4 &= 0 \\
 &\iff \operatorname{ch}(x)^2 + \operatorname{sh}(x)^2 + \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x) = 0 \\
 &\iff \left(\operatorname{ch}(x) + \frac{\operatorname{sh}(x)}{2} \right)^2 + \frac{3 \operatorname{sh}(x)^2}{4} = 0 \\
 &\iff \operatorname{ch}(x) + \frac{\operatorname{sh}(x)}{2} = 0 \text{ et } \operatorname{sh}(x) = 0
 \end{aligned}$$

La fonction sh ne s'annule qu'en 0 et on remarque que 0 n'annule pas la fonction $\operatorname{ch} + \frac{\operatorname{sh}}{2}$. Ainsi :

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Remarque : à la dernière équivalence, on utilise le fait qu'une somme de deux nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces deux nombres est nul.

Exercice 10

1. La fonction f est dérivable sur I comme produit de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

donc :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1}$$

On en déduit le tableau de variations de f suivant sur I (la limite en 0 provient des croissances comparées) :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$		0	
f	0	$-e^{-1}$	$+\infty$

2. Les fonctions $x \mapsto x^4 - 1$ et $x \mapsto x^4 + 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, la deuxième ne s'annulant pas. On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{4x^3(x^4 + 1) - 4x^3(x^4 - 1)}{(x^4 + 1)^2} = \frac{8x^3}{(x^4 + 1)^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{8}{(x^4 + 1)^2} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de x^3 , *i.e.* de x . On en déduit le tableau de variations de g suivant (les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent en factorisant par x^4 au numérateur et au dénominateur) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	
g	1	-1	1

3. La fonction h est dérivable sur I comme fonction polynomiale (elle est en fait dérivable sur $\mathbb{R}$) et :

$$\forall x \in]-\infty, 0], \quad h'(x) = -7x^6 + 4x^3 + 2x \leq 0$$

car $-7x^6 \leq 0$ (puisque $x^6 \geq 0$), $x^3 \leq 0$ et $x \leq 0$. On en déduit que h est décroissante sur $] -\infty, 0]$. La limite en $-\infty$ s'obtient en factorisant par x^7 :

x	$-\infty$	0
$h'(x)$		0
h	$+\infty$	3

4. On note $\mathcal{D}_k$ le domaine de définition de k . Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$x \in \mathcal{D}_k \iff x^2 - 2x - 3 \geq 0 \iff x \in]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$$

car les racines du trinôme $X^2 - 2X - 3$ sont -1 et 3 . Ainsi, $\mathcal{D}_k =]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction k est dérivable sur $] -\infty, -1[\cup] 3, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]-\infty, -1[\cup] 3, +\infty[, \quad k'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

Pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup] 3, +\infty[$, on a $\sqrt{x^2 - 2x - 3} > 0$ donc $k'(x)$ est du signe de $x - 1$. On en déduit le tableau de signes de k' et le tableau de variations de k sur $] -\infty, -1[\cup] 3, +\infty[$ suivant :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$k'(x)$	$-$		$+$	
k	$+\infty$	0	0	$+\infty$

Exercice 11

- Cette inégalité a été établie en classe (il faut savoir le refaire).
- Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Remarquons que comme $1 \pm \frac{1}{n} > 0$ (en effet, $n \geq 2$ donc $1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}$), on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

- ★ On a $\frac{1}{n} > 0 > -1$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ d'après la question 1. puis, multipliant par $n \geq 0$:

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq n \times \frac{1}{n} = 1$$

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

$$e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leq e^1 = e \quad \text{i.e.} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

- ★ De la même manière, comme $-\frac{1}{n} \geq -\frac{1}{2} > -1$ (puisque $n \geq 2$), la question 1. nous donne :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n} \quad \text{puis} \quad -n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq -n \times \left(-\frac{1}{n}\right) = 1$$

en multipliant par $-n \leq 0$. En invoquant à nouveau la croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on obtient $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \geq e$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Exercice 12

On rappelle que pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, on a $a^b = e^{b \ln(a)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \times \ln(n)} = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$$

Considérons la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{\frac{\ln(x)}{x}} \end{cases}$. Il s'agit de trouver la plus grande de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a clairement $\frac{1}{x^2} \times e^{\frac{\ln(x)}{x}} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. On en déduit le signe de f' sur $\mathbb{R}_+^*$ et le tableau de variations de f suivants :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	−
f		$e^{e^{-1}}$	

Ainsi, sachant que $2 \leq e \leq 3$, la plus grande valeur de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est soit $f(2)$, soit $f(3)$. Or :

$$\begin{aligned} f(2) < f(3) &\iff e^{\frac{\ln(2)}{2}} < e^{\frac{\ln(3)}{3}} \iff \frac{\ln(2)}{2} < \frac{\ln(3)}{3} \\ &\iff 3\ln(2) < 2\ln(3) \\ &\iff \ln(2^3) < \ln(3^2) \\ &\iff 8 < 9, \end{aligned}$$

ce qui est vrai. On a donc bien $f(2) < f(3)$. Finalement :

$$\boxed{\text{la plus grande valeur de } \sqrt[n]{n} = f(n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ est } \sqrt[3]{3} = f(3)}$$

Exercice 13 Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) &\iff \ln(\sqrt{ab}) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\iff \sqrt{a}\sqrt{b} \leq \frac{a+b}{2} \\ &\iff \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \\ &\iff (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie, la première l'est également. Ainsi :

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

Exercice 14

1. Pour tout $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on a :

$$\frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{x \ln(x)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1} \times \frac{\ln(x)}{x-1}$$

et comme $\frac{x}{x+1} > 0$ (car $x > 0$), le signe de l'expression proposée est celui de $\frac{\ln(x)}{x-1}$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		−	+
$x-1$		−	+
$\frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$		+	+

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \quad \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} > 0}$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit et différence de fonctions qui le sont et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - x = \ln(x) + 1 - x$$

Or on sait que :

$\forall t \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+t) \leq t$

donc :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(x) = \ln(1+(x-1)) \leq x-1 \quad (\text{car } t = x-1 \in]-1, +\infty[)$

Ainsi :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) \leq x-1+1-x = 0$

On en déduit que :

la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

3. On remarque que $f(1) = 0$. Le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est le suivant (pour obtenir la limite en $+\infty$, on factorise par x^2) :

x	0	1	$+\infty$
f	$\frac{1}{2}$	$\searrow 0$	$\searrow -\infty$

On en déduit le signe de f sur $\mathbb{R}_+^*$ suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$ $	$+$	$0 \quad -$

Démontrons maintenant l'inégalité. Soit $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas :** $x \in]0, 1[$

On a $f(x) \geq 0$ donc :

$$x \ln(x) - \frac{x^2 - 1}{2} \geq 0 \quad i.e. \quad x \ln(x) \geq \frac{x^2 - 1}{2}$$

Comme $x \in]0, 1[$, on a $x^2 - 1 < 0$. En divisant par $x^2 - 1$ dans la dernière inégalité, on obtient donc :

$$\frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} \leq \frac{1}{2}$$

★ **Deuxième cas :** $x \in]1, +\infty[$

On sait que $f(x) \leq 0$. Autrement dit :

$$x \ln(x) - \frac{x^2 - 1}{2} \leq 0 \quad i.e. \quad x \ln(x) \leq \frac{x^2 - 1}{2}$$

Or $x \in]1, +\infty[$ donc $x^2 - 1 > 0$. En divisant par $x^2 - 1$, il vient :

$$\frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} \leq \frac{1}{2}$$

Finalement :

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, \quad \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 15 La fonction $f : x \mapsto x^x(1-x)^{1-x}$ a pour expression :

$$f(x) = e^{x \ln(x)} \times e^{(1-x) \ln(1-x)} = e^{x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)}$$

Cette fonction est donc définie en tout nombre réel x tel que $x > 0$ et $1-x > 0$. Autrement dit, la fonction f est définie sur l'intervalle $]0, 1[$. Elle y est de plus dérivable (produit et composition de fonctions dérivables) et, pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x} - \ln(1-x) - (1-x) \times \frac{1}{1-x} \right) e^{x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)} \\ &= (\ln(x) - \ln(1-x)) e^{x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)} \end{aligned}$$

donc (puisque $e^{x \ln(x) + (1-x) \ln(1-x)} > 0$) :

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 &\iff \ln(x) - \ln(1-x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq \ln(1-x) \\ &\iff x \geq 1-x \\ &\iff 2x \geq 1 \\ &\iff x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f	$ $	$\searrow 1$	$\nearrow 1 $

Les limites en 0^+ et en 1^- sont conséquences des croissances comparées (d'ailleurs, elles ne sont pas utiles pour répondre à la question posée). En effet :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \ln(1-x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0$$

D'après les variations obtenues, la fonction f est minorée sur $]0, 1[$ par :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Finalement :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) \geq \frac{1}{2},$$

i.e. :

$$\boxed{\forall x \in]0, 1[, \quad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}}$$

Exercice 16 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= \frac{\frac{a}{1+ax} \ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx} \ln(1+ax)}{\ln(1+bx)^2} \\ &= \frac{a(1+bx) \ln(1+bx) - b(1+ax) \ln(1+ax)}{(1+ax)(1+bx) \ln(1+bx)^2} \end{aligned}$$

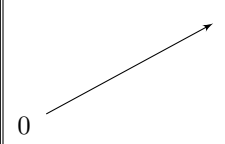
Considérons la fonction $g : x \mapsto a(1+bx) \ln(1+bx) - b(1+ax) \ln(1+ax)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= a \left(b \ln(1+bx) + (1+bx) \times \frac{b}{1+bx} \right) - b \left(a \ln(1+ax) + (1+ax) \times \frac{a}{1+ax} \right) \\ &= ab \ln(1+bx) + ab - ab \ln(1+ax) - ab \\ &= ab \ln \left(\frac{1+bx}{1+ax} \right) \end{aligned}$$

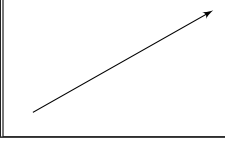
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $0 < a \leq b$, on a $1+bx \geq 1+ax > 0$ et donc :

$$\frac{1+bx}{1+ax} \geq 1 \quad \text{puis} \quad g'(x) \geq 0$$

On en déduit le tableau de variations de g , ainsi que son signe sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0	$+\infty$
g		
$g(x)$		+

Comme f' est du signe de g , la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f		

On a $0 < a \leq b$ donc $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$. La croissance de f entraîne que :

$$f\left(\frac{1}{b}\right) \leq f\left(\frac{1}{a}\right) \quad \text{i.e.} \quad \frac{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)}{\ln(2)} \leq \frac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}$$

En multipliant des deux côtés par $\ln(2) \ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \geq 0$, on obtient bien :

$$\boxed{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right) \ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq \ln(2)^2}$$

Exercice 17

- Remarquons tout d'abord que l'inégalité est claire si α vaut 0 ou 1 (en effet, les deux expressions valent 1 pour tout $x \in [0, 1]$ si $\alpha = 0$, et les deux nombres sont égaux à $1+x$ pour tout $x \in [0, 1]$ si $\alpha = 1$. On se place désormais dans le cas où $\alpha \in]0, 1[$ et on considère la fonction :

$$f : \begin{cases}]-1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x \end{cases}$$

qui est dérivable sur $] -1, +\infty[$. On a :

$$\forall x \in] -1, +\infty[, \quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha$$

Comme $\alpha \in]0, 1[$, on a pour tout $x \in] -1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) \leq 0 &\iff (1+x)^{\alpha-1} - 1 \leq 0 \iff e^{(\alpha-1)\ln(1+x)} \leq 1 \\ &\iff (\alpha-1)\ln(1+x) \leq 0 \\ &\iff \ln(1+x) \geq 0 \quad (\text{car } \alpha-1 < 0) \\ &\iff 1+x \geq 1 \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variations de f suivant sur $] -1, +\infty[$:

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
f		0	

Ainsi :

$$\forall x \in] -1, +\infty[, \quad f(x) \leq f(0)$$

Or $f(0) = 0$ donc l'inégalité ci-dessus se réécrit :

$$\forall x \in] -1, +\infty[, \quad (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

Finalement :

$$\boxed{\forall \alpha \in [0, 1], \forall x \in] -1, +\infty[, \quad (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x}$$

2. Soient $\alpha \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $\frac{\alpha}{k} \in \mathbb{R}_+ \subset] -1, +\infty[$, on a d'après la question précédente :

$$1 + \frac{\alpha}{k} \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha \geq 0$$

En multipliant ces inégalités (ce qui est possible car tous les nombres mis en jeu sont positifs), il vient :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha$$

Or :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha &= \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right)^\alpha = \prod_{k=1}^n \frac{(k+1)^\alpha}{k^\alpha} \\ &= \frac{2^\alpha}{1^\alpha} \times \frac{3^\alpha}{2^\alpha} \times \frac{4^\alpha}{3^\alpha} \times \cdots \times \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \\ &= (n+1)^\alpha \end{aligned}$$

en simplifiant et car $1^\alpha = 1$. Ainsi :

$$\boxed{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha}$$

Exercice 18 Considérons la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x e^x \end{cases}$. Par hypothèse, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(f(x)) = x$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = (1+x)e^x > 0$$

donc la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Montrons alors que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ en utilisant la définition. On veut montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $x < y$. Par l'absurde, supposons que $f(x) \geq f(y)$. Comme g est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $f(x), f(y) \in \mathbb{R}_+$, on peut écrire que $g(f(x)) \geq g(f(y))$, i.e. que $x \geq y$. Ceci contredit la définition de x et de y . On a donc $f(x) < f(y)$. Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$$

Exercice 19 On utilise un raisonnement par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition :

$$\mathcal{P}_n : \ll \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \gg$$

- ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $e^x \geq e^0 = 1$ (par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$) i.e. $e^x \geq \sum_{k=0}^0 \frac{x^k}{k!}$. La proposition $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\forall t \in [0, x], \quad e^t \geq \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$$

Par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_0^x e^t dt \geq \int_0^x \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right) dt$$

Or :

$$\int_0^x e^t dt = [e^t]_0^x = e^x - 1$$

et :

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} \right) dt &= \sum_{k=0}^n \int_0^x \frac{t^k}{k!} dt = \sum_{k=0}^n \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)k!} \right]_0^x \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{x^\ell}{\ell!} \end{aligned}$$

La dernière inégalité se réécrit donc :

$$e^x \geq 1 + \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{x^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{n+1} \frac{x^\ell}{\ell!}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}}$$

Exercice 20

1. La fonction $\ln$ étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, il s'agit de montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On distingue deux cas.

★ **Premier cas** : $x \geq 0$

On a $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ donc $\sqrt{x^2 + 1} > 0$. De plus, $x \geq 0$ donc $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

★ **Deuxième cas** : $x < 0$

On a $x^2 + 1 > x^2$ donc $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2}$. Or $x < 0$ donc $\sqrt{x^2} = -x$. On en déduit donc que :

$$x + \sqrt{x^2 + 1} > x + (-x) \quad i.e. \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

On a donc bien démontré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{on a bien } \mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$$

2. Tout d'abord, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} (-x) + \sqrt{(-x)^2 + 1} &= \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \frac{(x^2 + 1) - x^2}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \ln \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire sur } \mathbb{R}}$$

3. On a $x + \sqrt{x^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$$

La fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(-t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -f(t) = -\infty$$

Ainsi :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty}$$

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0 \end{aligned}$$

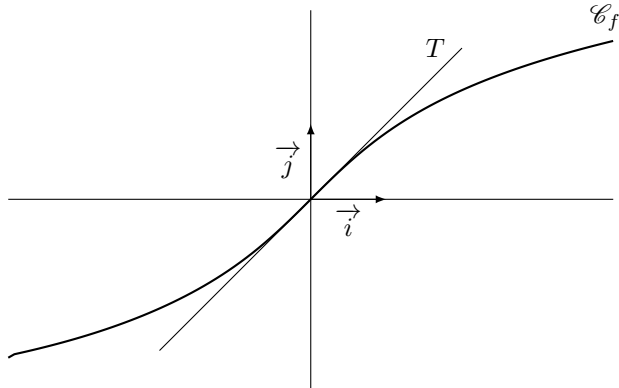
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

5. La fonction f étant dérivable en 0, l'équation de la tangente (notée T) à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ en ce point est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, i.e. :

$$T : y = x$$

6. Graphe de la fonction f sur $\mathbb{R}$:



Exercice 21 Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. On veut comparer $(g \circ f)(x)$ et $(g \circ f)(y)$.

★ La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ et on a $x \leq y$ donc $f(x) \leq f(y)$.

★ La fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$ et on a $f(x) \leq f(y)$ donc $g(f(x)) \geq g(f(y))$, i.e. $(g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(y)$.

On vient donc de démontrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \implies (g \circ f)(x) \geq (g \circ f)(y)$$

Autrement dit :

la fonction $g \circ f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$

Exercice 22 On rappelle que, si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $a, b \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $g : x \mapsto f(ax)$ et $h : x \mapsto f(x+b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = af'(ax) \quad \text{et} \quad h'(x) = f'(x+b)$$

1. Par hypothèse sur f , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)$$

Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on obtient en dérivant l'égalité ci-dessus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) = f'(x) \quad \text{i.e.} \quad f'(-x) = -f'(x)$$

Autrement dit :

la fonction f' est impaire sur $\mathbb{R}$

2. On procède de la même manière. On obtient que f est paire sur $\mathbb{R}$.

3. Par hypothèse sur f , il existe $T > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$$

En dérivant (ce qui est licite car f est dérivable), on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x+T) = f'(x)$$

Autrement dit :

la fonction f' est T -périodique sur $\mathbb{R}$

Exercice 23

1. Il s'agit ici de donner un contre-exemple.

Considérons les fonctions $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto -x$ sur $\mathbb{R}$ qui sont respectivement croissante et décroissante sur $\mathbb{R}$. On pose $h = f + g$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions qui le sont) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$$

Le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$ est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h	$+\infty$	1	$+\infty$

La fonction h n'est ni croissante sur $\mathbb{R}$, ni décroissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut être ni croissante, ni décroissante

2. Soient f et g deux fonctions bornées sur un intervalle I . Il existe alors des nombres réels a, A, b et B tels que :

$$\forall x \in I, \quad a \leq f(x) \leq A \quad \text{et} \quad b \leq g(x) \leq B$$

En sommant les inégalités, on obtient :

$$\forall x \in I, \quad a + b \leq \underbrace{f(x) + g(x)}_{=(f+g)(x)} \leq A + B$$

La fonction $f + g$ est donc bornée sur I . Ainsi :

la somme de deux fonctions bornées est une fonction bornée

3. Soient f et g deux fonctions bornées sur un intervalle I . Il existe alors des nombres réels a, A, b et B tels que :

$$\forall x \in I, \quad a \leq f(x) \leq A \quad \text{et} \quad b \leq g(x) \leq B$$

et, quitte à diminuer les valeurs de a et b , on peut supposer que $a, b \in \mathbb{R}_+$.

Soit $x \in I$. Les inégalités ci-dessus impliquent que :

$$0 \leq f(x) - a \leq A - a \quad \text{et} \quad 0 \leq g(x) - b \leq B - b$$

Les nombres mis en jeu étant positifs, on obtient en multipliant membre à membre :

$$0 \leq (f(x) - a)(g(x) - b) \leq (A - a)(B - b)$$

i.e. :

$$0 \leq f(x)g(x) - bf(x) - ag(x) + ab \leq (A - a)(B - b)$$

soit encore :

$$bf(x) + ag(x) - ab \leq f(x)g(x) \leq (A - a)(B - b) + bf(x) + ag(x) - ab$$

Or $a \leq f(x) \leq A$ et $b \leq 0$ donc $Ab \leq bf(x) \leq ab$. De même, $aB \leq ag(x) \leq ab$. On en déduit donc que :

$$Ab + aB - ab \leq \underbrace{f(x)g(x)}_{=(fg)(x)} \leq (A - a)(B - b) + Ab + aB - ab$$

La fonction fg est donc bornée sur I . Ainsi :

le produit de deux fonctions bornées est une fonction bornée

Exercice 24

1. Montrons que les fonctions f_0, f_1 et f_2 sont bornées sur $\mathbb{R}$.

★ La fonction $f_0 : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

On en déduit le tableau de variations de f_0 sur $\mathbb{R}$ suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_0'(x)$	$+$	0	$-$
f_0	0	1	0

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq f_0(x) \leq 1$$

La fonction f_0 est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

★ La fonction $f_1 : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annulant pas) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1'(x) = \frac{1+x^2 - x \times (2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

On en déduit le tableau de variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f_1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{1}{2} \leq f_1(x) \leq \frac{1}{2}$$

La fonction f_1 est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

★ La fonction $f_2 : x \mapsto \frac{x^2}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_2'(x) = \frac{2x(1+x^2) - x^2 \times (2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

On en déduit le tableau de variations de f_2 sur $\mathbb{R}$ suivant (les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent en factorisant par x^2 au dénominateur) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_2'(x)$	$-$	0	$+$
f_2	1	0	1

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq f_2(x) \leq 1$$

La fonction f_2 est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Ainsi :

les fonctions f_0 , f_1 et f_2 sont bornées sur $\mathbb{R}$

2. On suppose que $n \geq 3$. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n-2}}{\frac{1}{x^2} + 1} = +\infty$$

car $x^{n-2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ (en effet, $n \geq 3$) et $\frac{1}{x^2} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi :

si $n \geq 3$, alors la fonction f_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$

Exercice 25 On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$. Alors ou bien $f(x) < x$, ou bien $f(x) > x$. On traite les deux cas séparément.

★ **Premier cas :** $f(x) < x$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

$$f(f(x)) \leq f(x) \quad \text{et on sait que} \quad f(x) < x$$

donc $f(f(x)) < x$. Puis, à nouveau par croissance de f sur $\mathbb{R}$, on a :

$$f(f(f(x))) \leq f(x) \quad \text{i.e.} \quad (f \circ f \circ f)(x) \leq f(x) \quad \text{soit encore} \quad x \leq f(x)$$

en utilisant l'hypothèse faite sur f . Ceci est en contradiction avec l'inégalité $f(x) < x$.

★ Le cas $f(x) > x$ se traite de manière analogue.

On peut donc conclure que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x$$

Exercice 26

1. Soit $x \in I$. On raisonne par double implication (pour montrer l'équivalence (1) $\iff$ (2), il suffit de montrer que l'on a les deux implications (1) $\implies$ (2) et (2) $\implies$ (1)).

$\implies$ Montrons que (1) $\implies$ (2). Supposons donc que $(f \circ f)(x) = x$ et montrons que $f(x) = x$. Par l'absurde, supposons que $f(x) \neq x$. Alors ou bien $f(x) < x$, ou bien $f(x) > x$.

— Si $f(x) < x$, alors par stricte croissance de f sur I on a (puisque $x, f(x) \in I$) $f(f(x)) < f(x)$, i.e. $(f \circ f)(x) < f(x)$, soit encore $x < f(x)$ (puisque (1) est vérifiée). Les inégalités $f(x) < x$ et $x < f(x)$ sont en contradiction.

— On obtient également une contradiction si on suppose que $f(x) > x$.

Finalement, $f(x) = x$ et donc (2) est vraie.

$\impliedby$ Montrons que (2) $\implies$ (1). Supposons donc que $f(x) = x$ et montrons que $(f \circ f)(x) = x$. Comme $f(x) = x$, on a $f(f(x)) = f(x)$, i.e. $(f \circ f)(x) = f(x)$ et $f(x) = x$ (d'après (2)) donc $(f \circ f)(x) = x$.

Finalement :

les assertions (1) et (2) sont équivalentes

2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{ax} \end{cases}$. Celle-ci est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car elle y est dérivable et car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = a e^{ax} > 0 \quad (\text{car } a > 0 \text{ et } e^{ax} > 0)$$

D'après la question précédente, un nombre réel x est tel que $(f \circ f)(x) = x$ (i.e. $e^{ae^{ax}} = x$) si et seulement si $f(x) = x$ (i.e. $e^{ax} = x$). Considérons la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{ax} - x \end{cases}. \text{ La fonction } g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = a e^{ax} - 1$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) > 0 \iff e^{ax} > \frac{1}{a} \iff ax > \ln\left(\frac{1}{a}\right) \iff x > -\frac{\ln(a)}{a}$$

On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{\ln(a)}{a}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\ln(a)}{a}, +\infty\right[$.

x	$-\infty$	$-\frac{\ln(a)}{a}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$+\infty$	$\frac{\ln(a)+1}{a}$	$+\infty$

La limite de g en $-\infty$ est immédiate. De plus :

$$g\left(-\frac{\ln(a)}{a}\right) = e^{-\ln(a)} + \frac{\ln(a)}{a} = \frac{1}{e^{\ln(a)}} + \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(a)+1}{a}$$

et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax} \left(1 - \frac{x}{e^{ax}}\right) = +\infty$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax} = +\infty$ (puisque $a > 0$) et car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{ax}} = 0$ par croissances comparées. Rappelons qu'il s'agit de déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On distingue trois cas.

★ **Premier cas :** $a > e^{-1}$

Dans ce cas, $\ln(a) > -1$ (par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et car $\ln(e^{-1}) = -1$) donc $\frac{\ln(a)+1}{a} > 0$. On déduit du tableau de variations ci-dessus que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) > 0$$

La fonction g ne s'annule donc pas sur $\mathbb{R}$.

★ **Deuxième cas :** $a = e^{-1}$

Ici, le minimum de g sur $\mathbb{R}$ vaut $g(a) = 0$. Comme de plus g est strictement monotone sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$, la fonction g s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$ (à savoir en $a = e^{-1}$).

★ **Troisième cas :** $a < e^{-1}$

Dans ce dernier cas, on a $\frac{\ln(a)+1}{a} < 0$. La fonction g étant continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{\ln(a)}{a}\right]$, le théorème de la bijection nous permet d'affirmer que la fonction g s'annule une et une seule fois dans cet intervalle car $g\left(-\frac{\ln(a)}{a}\right) < 0$. De la même manière, g s'annule une unique fois sur l'intervalle $\left[-\frac{\ln(a)}{a}, +\infty\right[$.

Finalement :

- ★ si $a > e^{-1}$, l'équation proposée n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$;
- ★ si $a = e^{-1}$, alors l'équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ (et cette solution est $x = e^{-1}$) ;
- ★ si $a < e^{-1}$, alors l'équation admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.